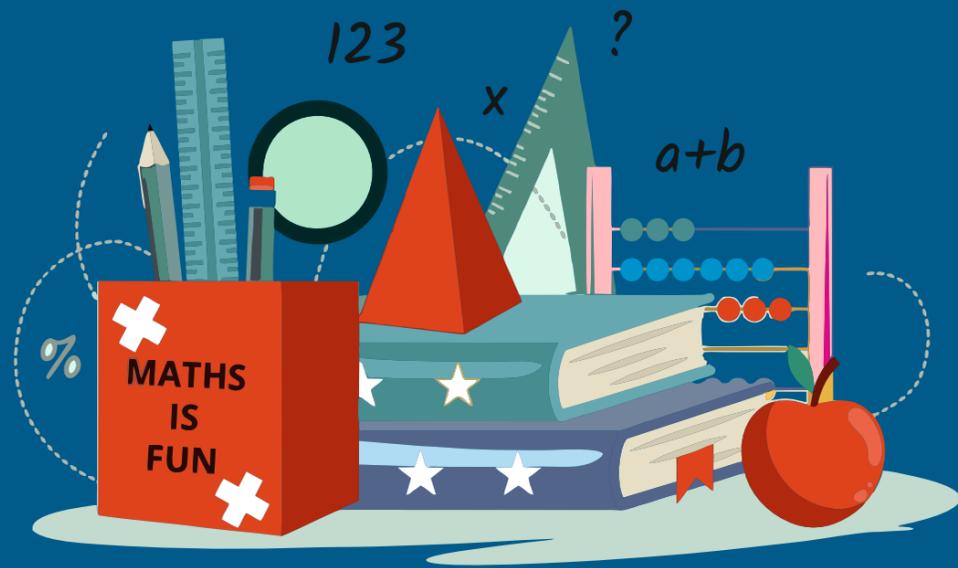


All truths are easy to understand once they are discovered; the point is to discover them.

- Galileo Galilei



State Council of Educational Research & Training
Andhra Pradesh



MATHEMATICS

గణితశాస్త్రం

7

Free distribution by Samagra Shiksha, Government of Andhra Pradesh



0756

విద్యా S మతాభివృద్ధి



एन सी ई आर टी
NCERT

Semester (సెమిస్టర్) - 1

MATHEMATICS

Semester (సెమిస్టర్) - 1

Class VII



सत्यमेव जयते

CONSTITUTION OF INDIA

Preamble

WE, THE PEOPLE OF INDIA, having solemnly resolved to constitute India into a SOVEREIGN SOCIALIST SECULAR DEMOCRATIC REPUBLIC and to secure to all its citizens:

JUSTICE

Social, economic and political;

LIBERTY

of thought, expression, belief, faith and worship;

EQUALITY

of status and of opportunity; and to promote among them all

FRATERNITY

assuring the dignity of the individual and the unity and integrity of the Nation;

IN OUR CONSTITUENT ASSEMBLY this twenty-sixth day of November, 1949, do HEREBY ADOPT, ENACT AND GIVE TO OURSELVES THIS CONSTITUTION



భారత రాజ్యాంగం - పౌర విధులు

1. రాజ్యాంగమునకు బద్ధుడై వుండుట, దాని ఆదర్శాలను, సంస్థలను, జాతీయ పతాకమును, జాతీయ గీతమును గౌరవించుట;
2. జాతీయ స్వాతంత్ర్య పోరాటమునకు స్ఫూర్తినిచ్చిన ఉన్నతాదర్శములను మనస్సుయందు ఉంచుకొని వాటిని అనుసరించుట;
3. భారత సార్వభౌమత్వం, ఐక్యత, అఖండతను సమర్థించుట మరియు సంరక్షించుట.
4. దేశమును రక్షించుట మరియు కోరినపుడు జాతికి సేవ చేయుట;
5. భారత ప్రజల మధ్య మత, భాష, ప్రాంతీయ, వర్గ వైవిధ్యములను అధిగమించి, సామరస్యమును, సోదర భావమును పెంపొందించుట, స్త్రీల గౌరవం తగ్గించు ఆచారములను విడనాడుట;
6. మన ఉమ్మడి సంస్కృతినీ, సుసంపన్న సంప్రదాయాలను గౌరవించి రక్షించుట;
7. అడవులు, సరస్సులు, నదులు, అడవి జంతువులతో సహా ప్రాకృతిక పరిసరాలను కాపాడి అభివృద్ధి చేయుట మరియు సమస్త జీవుల యెడల కరుణార్థత కలిగి వుండుట.
8. శాస్త్రీయ దృక్పథాన్ని, మానవతావాదాన్ని, జిజ్ఞాసను, సంస్కరణ తత్వాన్ని పెంపొందించుకొనటం;
9. ప్రజల ఆస్తిని సంరక్షించుట, హింసను విడనాడుట;
10. ప్రయత్నాలు, సాధనల ఉన్నతస్థాయిలను నిరంతరం అందుకొనునట్లుగా వైయక్తిక, సమిష్టి కార్య రంగాలన్నింటిలో శ్రేష్ఠత కోసం, కృషి చేయుట ప్రాథమిక కర్తవ్యమై వుండవలెను.
11. ఆరు నుండి పద్నాలుగు సంవత్సరముల వయస్సు కలిగిన బాలునికి లేదా బాలికకు తల్లి తండ్రి లేదా సంరక్షకునిగావున్న వ్యక్తి తనబిడ్డ లేదా సందర్శానుసారము తన సంరక్షితునికి విద్యార్జనకు అవకాశములు కల్పించవలెను.

(అధికరణం 51 A)

విద్యాహక్కు చట్టం

6 నుండి 14 సంవత్సరముల పిల్లలందరికి ఉచిత నిర్బంధ ఎలిమెంటరీ విద్యనందించడానికి ఉద్దేశించబడినవి. ఇది ఏప్రిల్ 1, 2010 నుండి అమల్లోకి వచ్చింది.

చట్టంలోని ముఖ్యాంశాలు:

- పిల్లలందరికి అందుబాటులో పాఠశాలలను ఏర్పాటుచేయాలి.
- పాఠశాలలకు మౌలిక వసతులను కల్పించాలి.
- పిల్లలందరిని వయస్సుకు తగిన తరగతిలో చేర్పించాలి.
- వయస్సుకు తగ్గ తరగతిలో చేర్చిన తర్వాత తోటి వారితో సమానంగా ఉండటానికి ప్రత్యేకశిక్షణ ఇప్పించాలి.
- ప్రత్యేక అవసరాలు కలిగిన పిల్లలకు సాధారణ పిల్లలతోపాటు విద్యకొనసాగించడానికి తగువసతులు ఏర్పాటు చేయాలి.
- బడిలో చేర్చుకోడానికి ఎలాంటి పరీక్షలు నిర్వహించరాదు. ఎటువంటి రుసుము, చార్జీలు వసూలు చేయరాదు.
- బడిలో చేరిన పిల్లల పేరు తీసివేయడం, అదే తరగతిలో కొనసాగించడం చేయరాదు.
- పిల్లల్ని శారీరకంగా, మానసికంగా హింసించరాదు.
- వయస్సు నిర్ధారణ పత్రం, ఇతర ధృవీకరణ పత్రాలు లేవనే కారణం చేత పిల్లలకు బడిలో ప్రవేశాన్ని నిరాకరించరాదు.
- తగిన అర్హతలున్న వారిని మాత్రమే ఉపాధ్యాయులుగా నియమించాలి.
- పిల్లలు నిర్దేశించిన సామర్థ్యాలు సాధించేలా బోధనాభ్యసనం, మూల్యాంకనం ఉండాలి.
- ఎలిమెంటరీ విద్య పూర్తయ్యేవరకు పిల్లలకు ఎలాంటి బోర్డు పరీక్షలు నిర్వహించరాదు.
- పద్నాలుగు సంవత్సరాలు పూర్తయినప్పటికీనీ, ఎలిమెంటరీ విద్య పూర్తయ్యేవరకు పాఠశాలలో పిల్లలు కొనసాగవచ్చును.
- బలహీన వర్గాలకు, ప్రతికూల పరిస్థితులను ఎదుర్కొంటున్న బృందాలకు చెందిన పిల్లలు ఏ విధమైన వివక్షతకు గురికాకుండా చూడాలి.
- రాజ్యాంగంలో పొందుపరిచిన విలువలకు అనుగుణంగా, విద్యార్థులను భయం, ఆందోళనకు గురిచేయని రీతిలో వారి సర్వతోముఖాభివృద్ధికి తోడ్పడే పాఠ్యప్రణాళిక రూపొందించాలి.

Mathematics

Textbook for Class VII

Semester - 1



0756



State Council of Educational Research & Training
Andhra Pradesh



© Government of Andhra Pradesh, Amaravati

First Published 2023

All rights reserved

No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means without the prior permission in writing of the publisher, nor be otherwise circulated in any form of binding or cover other than that in which it is published and without a similar condition including this condition being imposed on the subsequent purchaser.

The copyright holder of this book is the Commissioner of School Education, Amaravati, Andhra Pradesh.

This book has been printed on 70 G.S.M. SS Maplitho
Title Page 200 G.S.M. White Art Card

Free distribution by Samagra Shiksha, Government of Andhra Pradesh

Printed in India
at the A.P. Govt. Text Book Press
Amaravati
Andhra Pradesh

MATHEMATICS

Class - VII Semester - 1

Text Book Development Committee

Sri **Praveen Prakash** I.A.S
Principal Secretary to Government
Department of School Education, AP

Sri **S. Suresh Kumar** I.A.S
Commissioner of School Education &
State Project Director, Samagra Shiksha, AP

Ms. **Nidhi Meena** I.A.S
Special Officer English Medium Project
O/o the Commissioner of School Education, AP

Dr. **B. Pratap Reddy**
MA., B.Ed., Ph.D.
Director, SCERT, AP

Sri **K. Ravindranadh Reddy**
M.A., B.Ed.
Director, Govt. Text book Press, AP

Programme Co-ordinator

Dr. **G. Kesava Reddy**
Prof. C&T, SCERT, AP

Subject Co-ordinators

Sri. **Kathari Satish Babu**
Faculty, SCERT, AP

Sri. **Kesiraju Srinivas**
Faculty, SCERT, AP

Sri. **Sarikonda Satish**
Faculty, SCERT, AP

Technical Co-ordinator

Dr. **Ch.V.S. Ramesh Kumar**
Faculty, SCERT-AP

Published by Samagra Shiksha, Government of Andhra Pradesh, Amaravati.

Translators

Sri Gangalapudi Bhasker, SA(Maths)
Z.P.H.S, Venkatagiri, Tirupathi Dt.

Sri Pathivada Ravi Sankar, SA(Maths)
Z.P.H.S, Komaragiri, Kakinada Dt

Sri Syad Shahinsha, SA(Maths)
Mpl.H.S, Ch.R.Palem, Bhimavaram, West Godavari Dt

Sri Bhushanam Narasimha Prathap, SA(Maths)
Z.P.H.S, Narasapuram, Ananthapuramu Dt.

Dr. Chennamsetti Ramesh, SA(Maths)
M.P.U.P.S, Vallabharaopalem, Guntur Dt.

Sri Rangam Reddy Sankara Narayana Reddy, SA(Maths)
ZPHS, Nallamada, Sri Satya Sai Dt

Sri Peddinti VLN Sri Ram, SA(Maths)
Jn.Mpl.HS, Amalapuram, Dr.B.R. Ambedkar Konaseema Dt.

Smt. Yasam Jaya Bharathi, SA(Maths)
ZPHS(G), Giddalur, Prakasam Dt.

Sri Gorthi VS Sastry, SA(Maths)
ZPHS, Kollipadu, Srikakulam Dt.

Smt. Cripati Radhika, SA(Maths)
ZPGHS, Gooty, Ananatapuramu Dt.

Sri Tupakula Murali, SA(Maths)
ZPHS, Karakambadi, Tirupathi Dt.

Designing & Page Layout Durga Graphics, Bapatla.

Foreword

The National Curriculum Framework (NCF), 2005, recommends that children's life at school must be linked to their life outside the school. This principle marks a departure from the legacy of bookish learning which continues to shape our system and causes a gap between the school, home and community. The syllabi and textbooks developed on the basis of NCF signify an attempt to implement this basic idea. They also attempt to discourage rote learning and the maintenance of sharp boundaries between different subject areas. We hope these measures will take us significantly further in the direction of a child-centred system of education outlined in the National Policy on Education (1986).

The success of this effort depends on the steps that school principals and teachers will take to encourage children to reflect on their own learning and to pursue imaginative activities and questions. We must recognise that, given space, time and freedom, children generate new knowledge by engaging with the information passed on to them by adults. Treating the prescribed textbook as the sole basis of examination is one of the key reasons why other resources and sites of learning are ignored. Inculcating creativity and initiative is possible if we perceive and treat children as participants in learning, not as receivers of a fixed body of knowledge.

These aims imply considerable change in school routines and mode of functioning. Flexibility in the daily time-table is as necessary as rigour in implementing the annual calendar so that the required number of teaching days are actually devoted to teaching. The methods used for teaching and evaluation will also determine how effective this textbook proves for making children's life at school a happy experience, rather than a source of stress or boredom. Syllabus designers have tried to address the problem of curricular burden by restructuring and reorienting knowledge at different stages with greater consideration for child psychology and the time available for teaching. The textbook attempts to enhance this endeavour by giving higher priority and space to opportunities for contemplation and wondering, discussion in small groups, and activities requiring hands-on experience.

The National Council of Educational Research and Training (NCERT) appreciates the hard work done by the textbook development committee responsible for this book. We wish to thank the Chairperson of the advisory group in science and mathematics, Professor J.V. Narlikar and the Chief Advisor for this book, Dr H.K. Dewan for guiding the work of this committee. Several teachers contributed to the development of this textbook; we are grateful to their principals for making this possible. We are indebted to the institutions and organisations which have generously permitted us to draw upon their resources, material and personnel. We are especially grateful to the members of the National Monitoring Committee, appointed by the Department of Secondary and Higher Education, Ministry of Human Resource Development under the Chairpersonship of Professor Mrinal Miri and Professor G.P. Deshpande, for their valuable time and contribution. As an organisation committed to systemic reform and continuous improvement in the quality of its products, NCERT welcomes comments and suggestions which will enable us to undertake further revision and refinement.

New Delhi
20 November 2006

Director
National Council of Educational
Research and Training

Rationalisation of Content in the Textbooks

In view of the COVID-19 pandemic, it is imperative to reduce content load on students. The National Education Policy 2020, also emphasises reducing the content load and providing opportunities for experiential learning with creative mindset. In this background, the NCERT has undertaken the exercise to rationalise the textbooks across all classes. Learning Outcomes already developed by the NCERT across classes have been taken into consideration in this exercise.

Contents of the textbooks have been rationalised in view of the following:

- Overlapping with similar content included in other subject areas in the same class
- Similar content included in the lower or higher class in the same subject
- Difficulty level
- Content, which is easily accessible to students without much interventions from teachers and can be learned by children through self-learning or peer-learning
- Content, which is irrelevant in the present context

This present edition, is a reformatted version after carrying out the changes given above.

FOREWORD

“The only way to learn Mathematics is to do Mathematics ”- Paul Halmos

India has a rich tradition and several contributions to Mathematics, Since ancient times and the legacy has continued over generations by various means, Mathematics provides an effective way of building mental discipline and encourages logical reasoning and mental rigor. Besides this, mathematical knowledge also plays a crucial role in understanding the Content of other School Subjects in the School.

The New Educational policy (NEP), 2020, provides a platform to build, nurture, foster, encourage and multiply mathematical thinking. It's introduced the reforms needed to balance the need for 21st century employment and entrepreneurship, which is marked by critical, lateral and mathematical thinking.

As efforts are made in preparing high-quality bilingual text books and teaching-learning materials for mathematics, so that the students are enabled to think and speak about the subject both in their home language / mother tongue and English .

The State council of Educational Research and Training (SCERT), Andhra Pradesh (A.P.) has been adopting the National Council of Educational Research and Training (NCERT) Curriculum in the State Starting from the Academic year 2022-23, for the class VIII and now, it is for the class VII in this academic year, 2023-24, with the sole aim of preparing the Government School Students, hailing from even a very backward area, to compete on par with any corporate School student in this Competitive world.

We are thankful and indebted to our Honourable chief Minister Sri Y. S. Jagan Mohan Reddy who's committed for Systematic reforms and continuous improvement in quality education, in order to groom and see our students, as Global citizens, We extend our gratitude to our Hon'ble Minister for Education, Sri Botcha Satyanarayana for his continued support in this endeavour. Our special thanks to Sri Praveen Prakash, IAS, Principal Secretary to Government, Department of School Education, A.P., Sri. S. Suresh Kumar, IAS, Commissioner of School Education & State Project Director, Smagra Shiksha, A.P. and Ms. Nidhi Meena IAS, Special officer, English Medium Project, A.P., for their constant motivation and guidance.

We convey our sincere thanks to the translators who've carried out the translation work of NCERT class VII mathematics textbook, content into Telugu Language, we also thank our Editors, Subject Co-ordinators and DTP and Layout designers for their Contribution for the development of this textbook.

We invite Constructive feedback from the teachers, parents and Educationalists for further improvement of the text book, in the interest of student s' community.

“Teaching Mathematics is a journey, not a destination” Keep going ahead.

Dr. B. Pratap Reddy,
Director,
State Council of Educational
Research and Training
Andhra Pradesh

Preface

The National Curriculum Framework (NCF), 2005 suggests the need for developing the ability for mathematisation in the child. It points out that the aim of learning mathematics is not merely being able to do quantitative calculations but also to develop abilities in the child that would enable her/him to redefine her/his relationship with the World. The NCF-2005 also lays emphasis on development in the children logical abilities as well as abilities to comprehend space, spatial transformations and develop the ability to visualise both these. It recommends that mathematics needs to slowly move towards abstraction even though it starts from concrete experiences and models. The ability to generalise and perceive patterns is an important step in being able to relate to the abstract and logic governed nature of the subject.

We also know that most children in upper primary and secondary classes develop a fear of mathematics and it is one of the reasons for students not being able to continue in schools. NCF-2005 has also mentioned this problem and has therefore emphasised the need to develop a programme which is relevant and meaningful. The need for conceptualising mathematics teaching allows children to explore concepts as well as develop their own ways of solving problems. This also forms corner-stone of the principles highlighted in the NCF-2005.

In Class VI we have begun the process of developing a programme which would help children understand the abstract nature of mathematics while developing in them the ability to construct their own concepts. As suggested by NCF-2005, an attempt has been made to allow multiple ways of solving problems and encouraging children to develop strategies different from each other. There is an emphasis on working with basic principles rather than on memorisation of algorithms and short-cuts.

The Class VII textbook has continued that spirit and has attempted to use language which the children can read and understand themselves. This reading can be in groups or individual and at some places require help and support by the teacher. We also tried to include a variety of examples and opportunities for children to set problems. The appearance of the book has sought to be made pleasant by including many illustrations. The book attempts to engage the mind of the child actively and provides opportunities to use concepts and develop her/his own structures rather than struggling with unnecessarily complicated terms and numbers.

We hope that this book would help all children in their attempt to learn mathematics and would build in them the ability to appreciate its power and beauty. We also hope that this would enable to revisit and consolidate concepts and skills that they have learnt in the primary school. We hope to strengthen the foundation of mathematics, on which further engagement with studies as well as her daily life would become possible in an enriched manner.

The team in developing the textbook consists of many teachers who are experienced and brought to the team the view point of the child and the school. We also had people who have done research in learning of mathematics and those who have been writing textbooks for mathematics for many years. The team has tried to make an effort to remove fear of mathematics from the minds of children and make it a part of their daily routine even outside the school. We had many discussions and a review process with some other teachers of schools across the country. The effort by the team has been to accommodate all the comments. In the end, I would like to place on record our gratefulness to Prof Krishna Kumar, Director, NCERT, Prof G. Ravindra, Joint Director, NCERT and Prof Hukum Singh, Head, DESM, for giving opportunity to me and the team to work on this challenging task. I am also grateful to Prof J.V. Narlikar, Chairperson of the Advisory Group in Science and Mathematics for his suggestions. I am also grateful for the support of all those who were part of this team including Prof S.K. Singh Gautam, Dr V.P. Singh and Dr Ashutosh K. Wazalwar from NCERT, who have worked very hard to make this possible. In the end I must thank the Publication Department of NCERT for its support and advice and those from Vidya Bhawan who helped produce the book.

The process of developing materials is a continuous one and we would hope to make this book better. Suggestions and comments on the book are most welcome.

Dr H.K. Dewan
Chief Advisor
Textbook Development Committee

A Note for the Teachers

This book is a continuation of the process and builds on what was initiated in Class VI. We had shared with you the main points reflected in NCF-2005. These include relating mathematics to a wider development of abilities in children, moving away from complex calculations and algorithms following, to understanding and constructing a framework of understanding. The mathematical ideas in the mind of the child grow neither by telling nor by merely giving explanations. For children to learn mathematics, to be confident in it and understand the foundational ideas, they need to develop their own framework of concepts. This would require a classroom where children discuss ideas, look for solutions of problems, set new problems and find not only their own ways of solving problems but also their own definitions with the language they can use and understand. These definitions need not be as general and complete as the standard ones.

In the mathematics class it is important to help children read with understanding the textbook and other references. The reading of materials is not normally considered to be related to learning of mathematics but learning mathematics any further would require the child to comprehend the text. The text in mathematics uses a language that has brevity. It requires the ability to deal with terseness and with symbols, to follow logical arguments and appreciate the need for keeping certain factors and constraints. Children need practice in translating mathematical statements into normal statements expressing ideas in words and vice-a-versa. We would require children to become confident of using language in words and also being able to communicate through mathematical statements.

Mathematics at the upper primary stage is a major challenge and has to perform the dual role of being both close to the experience and environment of the child and being abstract. Children often are not able to work in terms of ideas alone. They need the comfort of context and/or models linked to their experience to find meaning. This stage presents before us the challenge of engaging the children while using the contexts but gradually moving them away from such dependence. So while children should be able to identify the principles to be used in a contextual situation, they should not be dependent or be limited to contexts. As we progress further in the middle school there would be greater requirement from the child to be able to do this.

Learning mathematics is not about remembering solutions or methods but knowing how to solve problems. Problem-solving strategies give learners opportunities to think rationally, enabling them to understand and create methods as well as processes; they become active participants in the construction of new knowledge rather than being passive receivers. Learners need to identify and define a problem, select or design possible solutions and revise or redesign the steps, if required. The role of a teacher gets modified to that of a guide and facilitator. Students need to be provided with activities and challenging problems, along with sets of many problem-solving experiences.

On being presented a problem, children first need to decode it. They need to identify the knowledge required for attempting it and build a model for it. This model could be in the form of an illustration or a situation construct. We must remember that for generating proofs in geometry the figures constructed are also models of the ideal dimensionless figure. These diagrams are, however, more abstract than the concrete models required for attempting problems in arithmetic and algebra. Helping children to develop the ability to construct appropriate models by breaking up the problems and evolving their own strategies and analysis of problems is extremely important. This should replace prescriptive algorithms to solve problems.

Teachers are expected to encourage cooperative learning. Children learn a lot in purposeful conversation with each other. Our classrooms should develop in the students the desire and capacity to learn from each other rather than compete. Conversation is not noise and consultation is not cheating. It is a challenge to make possible classroom groups that benefit the most from being with each other

and in which each child contributes to the learning of the group. Teachers must recognise that different children and different groups will use distinct strategies. Some of these strategies would appear to be more efficient and some not as efficient. They would reflect the modelling done by each group and would indicate the process of thinking used. It is inappropriate to identify the best strategy or pull down incorrect strategies. We need to record all strategies adopted and analyse them. During this, it is crucial to discuss why some of the strategies are unsuccessful. The class as a group can improve upon the ineffective and unsuccessful strategies and correct them. This implies that we need to complete each strategy rather than discard some as incorrect or inappropriate. Exposures to a variety of strategies would deepen mathematical understanding and ability to learn from others. This would also help them to understand the importance of being aware of what one is doing.

Enquiry to understand is one of the natural ways by which students acquire and construct knowledge. The process can even begin with casual observations and end in generation and acquisition of knowledge. This can be aided by providing examples for different forms of questioning-explorative, open-ended, contextual, error detection etc. Students need to get exposed to challenging investigations. For example in geometry there could be things like, experimenting with suitable nets for solids, visualising solids through shadow play, slicing and elevations etc. In arithmetic we can make them explore relationships among members, generalise the relationships, discover patterns and rules and then form algebraic relations etc.

Children need the opportunity to follow logical arguments and find loopholes in the arguments presented. This will lead them to understand the requirement of a proof.

At this stage topics like Geometry are poised to enter a formal stage. Provide activities that encourage students to exercise creativity and imagination while discovering geometric vocabulary and relationships using simple geometric tools.

Mathematics has to emerge as a subject of exploration and creation rather than an exercise of finding answers to old and complicated problems. There is a need to encourage children to find many different ways to solve problems. They also need to appreciate the use of many alternative algorithms and strategies that may be adopted to solve a problem.

Topics like Integers, Fractions and Decimals, Symmetry have been presented here by linking them with their introductory parts studied in earlier classes. An attempt has been made to link chapters with each other and the ideas introduced in the initial chapters have been used to evolve concepts in the subsequent chapters. Please devote enough time to the ideas of negative integers, rational numbers, exploring statements in Geometry and visualising solids shapes.

We hope that the book will help children learn to enjoy mathematics and be confident in the concepts introduced. We want to recommend the creation of opportunity for thinking individually and collectively. Group discussions need to become a regular feature of mathematics classroom thereby making learners confident about mathematics and make the fear of mathematics a thing of past.

We look forward to your comments and suggestions regarding the book and hope that you will send interesting exercises, activities and tasks that you develop during the course of teaching, to be included in the future editions.

Textbook Development Committee

CHAIRPERSON, ADVISORY GROUP IN SCIENCE AND MATHEMATICS

J.V. Narlikar, *Emeritus Professor*, Inter University Centre for Astronomy and Astrophysics (IUCCA), Ganeshkhind, Pune University, Pune, Maharashtra

CHIEF ADVISOR

H.K. Dewan, Vidya Bhawan Society, Udaipur, Rajasthan

CHIEF COORDINATOR

Hukum Singh, *Professor and Head (Retd.)*, DESM, NCERT, New Delhi

MEMBERS

Anjali Gupte, *Teacher*, Vidya Bhawan Public School, Udaipur, Rajasthan

Avantika Dam, *TGT*, CIE Experimental Basic School, Department of Education, Delhi

H.C. Pradhan, *Professor*, Homi Bhabha Centre for Science Education, TIFR, Mumbai, Maharashtra

Mahendra Shankar, *Lecturer (S.G.) (Retd.)*, NCERT, New Delhi

Meena Shrimali, *Teacher*, Vidya Bhawan Senior Secondary School, Udaipur, Rajasthan

R. Athmaraman, *Mathematics Education Consultant*, TI Matric Higher Secondary School and AMTI, Chennai, Tamil Nadu

S.K.S. Gautam, *Professor*, DESM, NCERT, New Delhi

Shradha Agarwal, *PGT*, Sir Padampat Singhanian Education Centre, Kanpur (U.P.)

Srijata Das, *Senior Lecturer* in Mathematics, SCERT, New Delhi

V.P. Singh, *Reader (Retd.)*, DESM, NCERT, New Delhi

MEMBER-COORDINATOR

Ashutosh K. Wazalwar, *Professor*, DESM, NCERT, New Delhi

Acknowledgements

The Council gratefully acknowledges the valuable contributions of the following participants of the Textbook Review Workshop – Ms. Nirupma Sahni, *TGT*, Mahavir Digambar Jain Sr. Sec. School, Jaipur; Dr Roohi Fatima, *TGT*, Jamia Middle School, New Delhi; Ms. Deepti Mathur, *TGT*, Mother's International School, New Delhi; Shri K. Balaji, *TGT*, Kendriya Vidyalaya, Donimalai, Karnataka; Shri Amit Bajaj, *TGT*, CRPF Public School, Delhi; Ms. Omlata Singh, *TGT*, Presentation Convent Sr. Sec. School, Delhi; Shri Nagesh S. Mone, *TGT*, Dravid High School, Wai, Maharashtra; Shri Gorakh Nath Sharma, *PGT*, Jawahar Navodaya Vidyalaya, Mesra, Ranchi, Jharkhand; Shri Ajay Kumar Singh, *TGT*, Ramjas Sr. Sec. School, No.3, Delhi; Ms. Ragini Subramanian, *TGT*, SRDF Vivekananda Vidyalaya, Chennai, Tamil Nadu; Shri Rajkumar Dhawan, *PGT*, Geeta Sr. Sec. School No.2, Delhi; Dr Sanjay Mudgil, *Lecturer*, CIET, NCERT, New Delhi; Dr. Sushma Jaireth, *Reader*, DWS, NCERT, New Delhi; Dr Mona Yadav, *Lecturer*, DWS, NCERT, New Delhi.

The Council acknowledges the comments/suggestions given by Dr Ram Avtar (*Retd. Professor*, NCERT) *Consultant*, DESM, NCERT, New Delhi, Dr R.P. Maurya, *Reader*, DESM, NCERT, New Delhi and Shri Sanjay Bolia, *Senior Teacher*, Vidya Bhawan Basic Secondary School, Udaipur, Rajasthan for the improvement of the content.

The Council acknowledges the support and facilities provided by Vidya Bhawan Society and its staff, Udaipur, for conducting workshops of the development committee at Udaipur, and to the Director, Centre for Science Education and Communication (CSEC), Delhi University for providing library help.

The Council acknowledges the academic and administrative support of Professor Hukum Singh, *Head*, DESM, NCERT, New Delhi.

The Council also acknowledges the efforts of S.M. Ikram, *DTP Operator*, Vidya Bhawan Society Udaipur; Sajjad Haider Ansari, Rakesh Kumar and Neelam Walecha, *DTP Operators*, Kanwar Singh, *Copy Editor*, NCERT; Abhimanu Mohanty, *Proof Reader*, NCERT; Deepak Kapoor, *Computer Station Incharge*, DESM, NCERT for technical assistance, APC-office and the Administrative Staff, DESM, NCERT; and the Publication Department of the NCERT.

NATIONAL ANTHEM

జాతీయ గీతం

Jana gana mana adhinayaka jaya he

Bharata bhagya vidhata

Panjaba Sindhu Gujarata Maratha

Dravida Utkala Banga

Vindhya Himachala Yamuna Ganga

uchchala jaladhi taranga

*Tava Subha name jage, tave subha
asisa mage,*

gahe tava jaya gatha.

Jana gana mangala dayaka jaya he

Bharata bhagya vidhata.

Jaya he, Jaya he, Jaya he,

jaya jaya jaya jaya he.

- Rabindranath Tagore

జనగణమన అధినాయక జయహే!

భారత భాగ్యవిధాతా!

పంజాబ, సింధు, గుజరాత, మరాఠా,

ద్రావిడ, ఉత్కళ, వంగా!

వింధ్య, హిమాచల, యమునా, గంగా!

ఉచ్చల జలధి తరంగా!

తవ శుభనామే జాగే!

తవ శుభ ఆశిష మాగే!

గాహే తవ జయగాథా!

జనగణ మంగళదాయక జయహే!

భారత భాగ్యవిధాతా!

జయహే! జయహే! జయహే!

జయ జయ జయ జయహే!!

- రవీంద్రనాథ్ ఠాగూర్

PLEDGE

ప్రతిజ్ఞ

*India is my country. All Indians are my brothers and sisters.
I love my country and I am proud of its rich and varied heritage.*

I shall always strive to be worthy of it.

*I shall give my parents, teachers and all elders respect,
and treat everyone with courtesy. I shall be kind to animals.*

To my country and my people, I pledge my devotion.

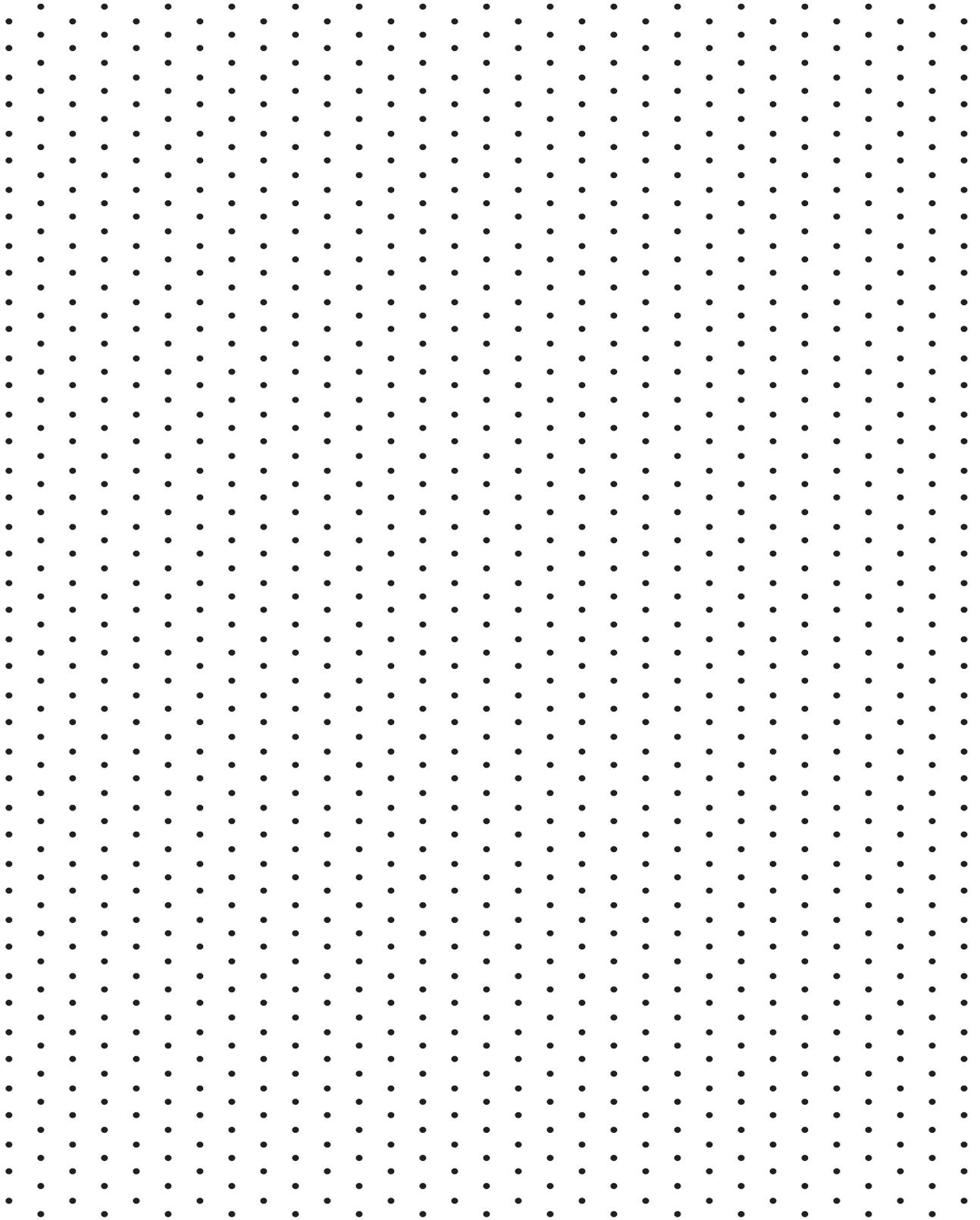
In their well-being and prosperity alone lies my happiness.

- Pydimarri Venkata Subba Rao

భారతదేశం నా మాతృభూమి. భారతీయులందరూ నా సహోదరులు.
నేను నా దేశాన్ని ప్రేమిస్తున్నాను. సుసంపన్నమైన, బహువిధమైన నా దేశ వారసత్వ
సంపద నాకు గర్వకారణం. దీనికి అర్హత పొందడానికై సర్వదా నేను కృషి చేస్తాను.
నా తల్లిదండ్రుల్ని, ఉపాధ్యాయుల్ని పెద్దలందరినీ గౌరవిస్తాను. ప్రతివారితోను మర్యాదగా
నడుచుకొంటాను. జంతువులపట్ల దయతో ఉంటాను.
నా దేశంపట్ల, నా ప్రజలపట్ల సేవానిరతితో ఉంటానని ప్రతిజ్ఞ చేస్తున్నాను.
వారి శ్రేయోభివృద్ధులే నా ఆనందానికి మూలం.

- పైడిమర్రి వెంకటసుబ్బారావు

Isometric Dot Sheet



Contents

Chapter 1	Integers	02-39
	పూర్ణ సంఖ్యలు	
Chapter 2	Fractions and Decimals	40 - 87
	భిన్నాలు మరియు దశాంశాలు	
Chapter 3	Data Handling	88 - 117
	దత్తాంశ నిర్వహణ	
Chapter 4	Simple Equations	118 - 147
	సామాన్య సమీకరణాలు	
Chapter 5	Lines and Angles	148 - 175
	రేఖలు మరియు కోణాలు	
Chapter 6	The Triangle and its Properties	176 - 215
	త్రిభుజము మరియు ధర్మాలు	
Chapter 7	Comparing Quantities	216 - 247
	రాశులను పోల్చడం	
	Answers	248 - 262
	జవాబులు	



పూర్ణ సంఖ్యలు



1.1 పూర్ణ సంఖ్యల సంకలనం మరియు వ్యవకలనం - వాటి ధర్మాలు

మనం 6వ తరగతిలో పూర్ణాంకాలు మరియు పూర్ణ సంఖ్యలను గురించి నేర్చుకున్నాం. మనము పూర్ణ సంఖ్యల సంకలనం మరియు వ్యవకలనం గురించి కూడా నేర్చుకున్నాం.

1.1.1 సంకలన సంవృత ధర్మం

రెండు పూర్ణాంకాల మొత్తం కూడా ఒక పూర్ణాంకమే అని మనము నేర్చుకున్నాం. ఉదాహరణకు, $17 + 24 = 41$ ఇది కూడా ఒక పూర్ణాంకం. ఈ ధర్మాన్ని పూర్ణాంకాలపై సంకలన సంవృత ధర్మం అని అంటారని మనకు తెలుసు.

ఈ ధర్మం పూర్ణ సంఖ్యల విషయంలో నిజమో కాదో చూద్దాం.

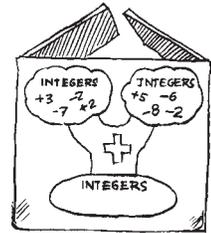
కొన్ని జతల పూర్ణ సంఖ్యలు ఈ క్రింది విధంగా ఉన్నాయి. కింది పట్టికను పరిశీలించండి మరియు దానిని పూర్తి చేయండి.

ప్రవచనం

- (i) $17 + 23 = 40$
- (ii) $(-10) + 3 = \underline{\hspace{2cm}}$
- (iii) $(-75) + 18 = \underline{\hspace{2cm}}$
- (iv) $19 + (-25) = -6$
- (v) $27 + (-27) = \underline{\hspace{2cm}}$
- (vi) $(-20) + 0 = \underline{\hspace{2cm}}$
- (vii) $(-35) + (-10) = \underline{\hspace{2cm}}$

పరిశీలనలు

- ఫలితం ఒక పూర్ణ సంఖ్య
 $\underline{\hspace{2cm}}$
- ఫలితం ఒక పూర్ణ సంఖ్య
 $\underline{\hspace{2cm}}$
- $\underline{\hspace{2cm}}$
- $\underline{\hspace{2cm}}$



మీరు ఏమి గమనించారు? రెండు పూర్ణ సంఖ్యల మొత్తం ఎల్లప్పుడూ పూర్ణ సంఖ్యేనా?

మొత్తము పూర్ణ సంఖ్య కాని పూర్ణ సంఖ్యల జతను మీరు కనుగొనగలరా?

రెండు పూర్ణ సంఖ్యల మొత్తం పూర్ణ సంఖ్యనే. పూర్ణ సంఖ్యలు సంకలన సంవృత ధర్మాన్ని పాటిస్తాయని మనం చెప్పవచ్చు.

సాధారణంగా, ఏ రెండు పూర్ణ సంఖ్యలు a మరియు b లకు $a + b$ ఒక పూర్ణ సంఖ్య అగును.

In general, for any two integers a and b , we can say

$$a + b = b + a$$

- We know that subtraction is not commutative for whole numbers. Is it commutative for integers?

Consider the integers 5 and (-3) .

Is $5 - (-3)$ the same as $(-3) - 5$? No, because $5 - (-3) = 5 + 3 = 8$, and $(-3) - 5 = -3 - 5 = -8$.

Take at least five different pairs of integers and check this.

We conclude that subtraction is not commutative for integers.

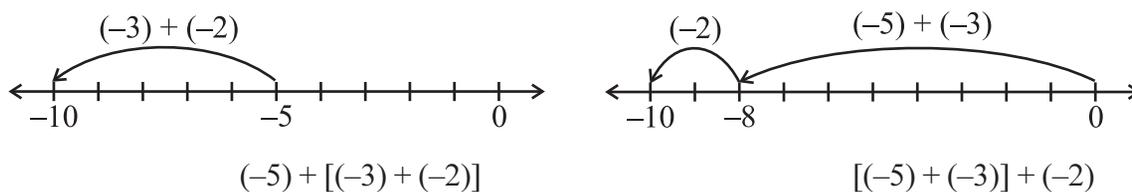
1.1.4 Associative Property

Observe the following examples:

Consider the integers -3 , -2 and -5 .

Look at $(-5) + [(-3) + (-2)]$ and $[(-5) + (-3)] + (-2)$.

In the first sum (-3) and (-2) are grouped together and in the second (-5) and (-3) are grouped together. We will check whether we get different results.



In both the cases, we get -10 .

i.e., $(-5) + [(-3) + (-2)] = [(-5) + (-2)] + (-3)$

Similarly consider -3 , 1 and -7 .

$$(-3) + [1 + (-7)] = -3 + \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$[(-3) + 1] + (-7) = -2 + \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

Is $(-3) + [1 + (-7)]$ same as $[(-3) + 1] + (-7)$?

Take five more such examples. You will not find any example for which the sums are different. *Addition is associative for integers.*

In general for any integers a , b and c , we can say

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

సాధారణంగా, a మరియు b లు రెండు పూర్ణసంఖ్యలు అయిన,

$$a + b = b + a$$

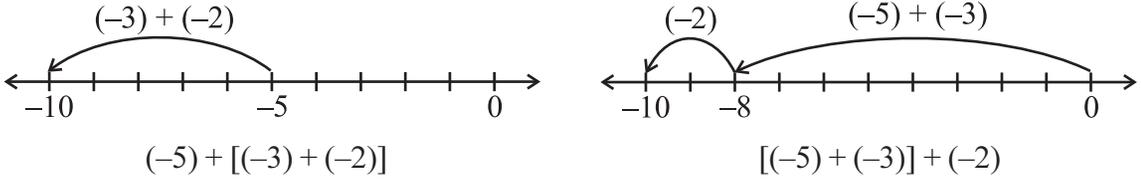
- పూర్ణాంకాల వ్యవకలనం అనేది స్థిత్యంతరం కాదని మనకు తెలుసు. ఇది పూర్ణ సంఖ్యలపై స్థిత్యంతరమా? పూర్ణ సంఖ్యలు 5 మరియు (-3) తీసుకుందాం.
 $5 - (-3)$ మరియు $(-3) - 5$? లు సమానమా? కాదు, ఎందుకంటే $5 - (-3) = 5 + 3 = 8$, మరియు $(-3) - 5 = -3 - 5 = -8$.
 కనీసం ఐదు విభిన్న జతల పూర్ణ సంఖ్యలను తీసుకొని దీనిని సరిచూడండి.
 పూర్ణ సంఖ్యలు వ్యవకలనంలో స్థిత్యంతర ధర్మాన్ని పాటించవని మనం చెప్పవచ్చు.

1.1.4 సహచర ధర్మం

ఈ కింది ఉదాహరణలను పరిశీలించండి:
 పూర్ణ సంఖ్యలు $-3, -2$ మరియు -5 లను తీసుకుందాం.

$(-5) + [(-3) + (-2)]$ మరియు $[(-5) + (-3)] + (-2)$ లను చూద్దాం.

మొదటి మొత్తంలో (-3) మరియు (-2) కలిసి సమూహంగా చేయబడ్డాయి. మరియు రెండవదానిలో (-5) మరియు (-3) సమూహంగా చేయబడ్డాయి. మనం వేర్వేరు ఫలితాలను పొందుతాయేమో సరిచూద్దాం.



రెండు సందర్భాల్లోనూ, మనకు -10 వస్తుంది.

అంటే, $(-5) + [(-3) + (-2)] = [(-5) + (-2)] + (-3)$

ఇదేవిధంగా, $-3, 1$ మరియు -7 లను తీసుకుందాం.

$(-3) + [1 + (-7)] = -3 + \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

$[(-3) + 1] + (-7) = -2 + \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

$(-3) + [1 + (-7)]$ కి $[(-3) + 1] + (-7)$ సమానమా?

ఇలాంటి మరో ఐదు ఉదాహరణలను తీసుకోండి. మొత్తాలు వేరుగా ఉన్న ఏ ఉదాహరణను మీరు కనుగొనలేరు. పూర్ణ సంఖ్యలు సంకలనంలో సహచరధర్మాన్ని పాటిస్తాయని చెప్పవచ్చు.

సాధారణంగా, ఏవేని పూర్ణ సంఖ్యలు a, b మరియు c , లకు,

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

1.1.5 Additive Identity

When we add zero to any whole number, we get the same whole number. Zero is an additive identity for whole numbers. Is it an additive identity again for integers also?

Observe the following and fill in the blanks:

- | | |
|--|--|
| (i) $(-8) + 0 = -8$ | (ii) $0 + (-8) = -8$ |
| (iii) $(-23) + 0 = \underline{\hspace{2cm}}$ | (iv) $0 + (-37) = -37$ |
| (v) $0 + (-59) = \underline{\hspace{2cm}}$ | (vi) $0 + \underline{\hspace{2cm}} = -43$ |
| (vii) $-61 + \underline{\hspace{2cm}} = -61$ | (viii) $\underline{\hspace{2cm}} + 0 = \underline{\hspace{2cm}}$ |

The above examples show that zero is an additive identity for integers.

You can verify it by adding zero to any other five integers.

In general, for any integer a

$$a + 0 = a = 0 + a$$

TRY THESE

1. Write a pair of integers whose sum gives

- | | |
|--|---|
| (a) a negative integer | (b) zero |
| (c) an integer smaller than both the integers. | (d) an integer smaller than only one of the integers. |
| (e) an integer greater than both the integers. | |

2. Write a pair of integers whose difference gives

- | | |
|--|---|
| (a) a negative integer. | (b) zero. |
| (c) an integer smaller than both the integers. | (d) an integer greater than only one of the integers. |
| (e) an integer greater than both the integers. | |



EXAMPLE 1 Write down a pair of integers whose

- | | |
|-----------------------|------------------------|
| (a) sum is -3 | (b) difference is -5 |
| (c) difference is 2 | (d) sum is 0 |

SOLUTION

(a) $(-1) + (-2) = -3$	or	$(-5) + 2 = -3$
(b) $(-9) - (-4) = -5$	or	$(-2) - 3 = -5$
(c) $(-7) - (-9) = 2$	or	$1 - (-1) = 2$
(d) $(-10) + 10 = 0$	or	$5 + (-5) = 0$



Can you write more pairs in these examples?

1.1.5 సంకలన తత్వమాంశం

ఏదైనా పూర్ణాంకానికి సున్నా కలిపినపుడు, అదే పూర్ణాంకాన్ని పొందుతాం. పూర్ణాంకాలకు సున్నా సంకలన తత్వమాంశం అవుతుంది. ఇది పూర్ణ సంఖ్యలకు కూడా సంకలన తత్వమాంశం అవుతుందా?

కింది వాటిని గమనించి, ఖాళీలను పూరించండి:

- | | |
|--|--|
| (i) $(-8) + 0 = -8$ | (ii) $0 + (-8) = -8$ |
| (iii) $(-23) + 0 = \underline{\hspace{2cm}}$ | (iv) $0 + (-37) = -37$ |
| (v) $0 + (-59) = \underline{\hspace{2cm}}$ | (vi) $0 + \underline{\hspace{2cm}} = -43$ |
| (vii) $-61 + \underline{\hspace{2cm}} = -61$ | (viii) $\underline{\hspace{2cm}} + 0 = \underline{\hspace{2cm}}$ |

పై ఉదాహరణలు సున్నా అనేది పూర్ణ సంఖ్యలకు కూడా సంకలన తత్వమాంశం అని సూచిస్తున్నాయి.

ఏవైనా 5 పూర్ణ సంఖ్యలకు సున్నాను కలపడం ద్వారా దీనిని సరిచూడవచ్చు.

సాధారణంగా, ఏదైనా పూర్ణ సంఖ్య a కు,

$$a + 0 = a = 0 + a$$

ప్రయత్నించండి

1. పూర్ణ సంఖ్యల మొత్తం కింది విధముగా అగునట్లు పూర్ణ సంఖ్యల జతలు రాయండి.

- | | |
|---|--|
| (a) ఒక ఋణ పూర్ణ సంఖ్య | (b) సున్న |
| (c) రెండు పూర్ణ సంఖ్యల కన్నా తక్కువైన ఒక పూర్ణ సంఖ్య. | (d) ఒకపూర్ణ సంఖ్య కన్నా తక్కువైన పూర్ణ సంఖ్య |
| (e) రెండు పూర్ణ సంఖ్యల కన్నా ఎక్కువైన ఒక పూర్ణ సంఖ్య | |



2. రెండు పూర్ణ సంఖ్యల భేదము కింది విధముగా అగునట్లు పూర్ణ సంఖ్యల జతలు రాయండి.

- | | |
|--|---|
| (a) ఒక ఋణ పూర్ణ సంఖ్య | (b) సున్న |
| (c) ఆ రెండు పూర్ణ సంఖ్యల కన్నా తక్కువైన పూర్ణ సంఖ్య. | (d) ఒక పూర్ణ సంఖ్య కన్నా ఎక్కువైన పూర్ణ సంఖ్య |
| (e) రెండు పూర్ణ సంఖ్యల కన్నా తక్కువైన పూర్ణ సంఖ్య. | |

ఉదాహరణ 1 కింది విధంగా అగునట్లు పూర్ణ సంఖ్యల జతలను రాయండి.

- | | |
|-----------------|----------------|
| (a) మొత్తం -3 | (b) భేదం -5 |
| (c) భేదం 2 | (d) మొత్తం 0 |

సాధన

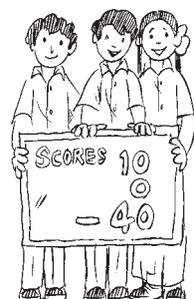
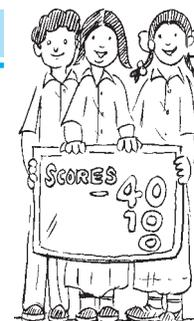
- | | |
|------------------------|----------------------|
| (a) $(-1) + (-2) = -3$ | లేదా $(-5) + 2 = -3$ |
| (b) $(-9) - (-4) = -5$ | లేదా $(-2) - 3 = -5$ |
| (c) $(-7) - (-9) = 2$ | లేదా $1 - (-1) = 2$ |
| (d) $(-10) + 10 = 0$ | లేదా $5 + (-5) = 0$ |



ఈ ఉదాహరణలలో మీరు మరిన్ని జతలు రాయగలరా?

EXERCISE 1.1

- Write down a pair of integers whose:
 - sum is -7
 - difference is -10
 - sum is 0
- Write a pair of negative integers whose difference gives 8 .
 - Write a negative integer and a positive integer whose sum is -5 .
 - Write a negative integer and a positive integer whose difference is -3 .
- In a quiz, team A scored $-40, 10, 0$ and team B scored $10, 0, -40$ in three successive rounds. Which team scored more? Can we say that we can add integers in any order?
- Fill in the blanks to make the following statements true:
 - $(-5) + (-8) = (-8) + (\dots\dots\dots)$
 - $-53 + \dots\dots\dots = -53$
 - $17 + \dots\dots\dots = 0$
 - $[13 + (-12)] + (\dots\dots\dots) = 13 + [(-12) + (-7)]$
 - $(-4) + [15 + (-3)] = [-4 + 15] + \dots\dots\dots$



1.2 MULTIPLICATION OF INTEGERS

We can add and subtract integers. Let us now learn how to multiply integers.

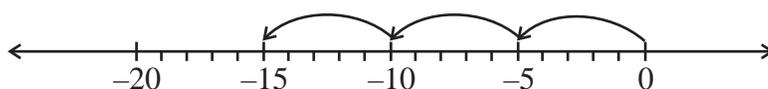
1.2.1 Multiplication of a Positive and a Negative Integer

We know that multiplication of whole numbers is repeated addition. For example,

$$5 + 5 + 5 = 3 \times 5 = 15$$

Can you represent addition of integers in the same way?

We have from the following number line, $(-5) + (-5) + (-5) = -15$



But we can also write

$$(-5) + (-5) + (-5) = 3 \times (-5)$$

Therefore,

$$3 \times (-5) = -15$$

TRY THESE

Find:

$$4 \times (-8),$$

$$8 \times (-2),$$

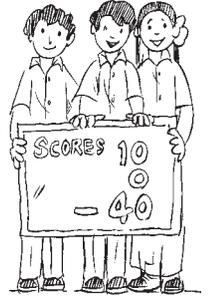
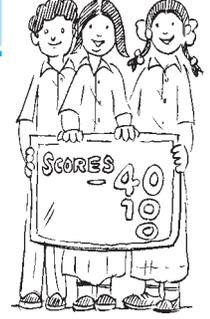
$$3 \times (-7),$$

$$10 \times (-1)$$

using number line.

అభ్యాసం 1. 1

1. కింది విధంగా అగునట్లు పూర్ణ సంఖ్యల జతను రాయండి:
 - (a) మొత్తం -7
 - (b) భేదం -10
 - (c) మొత్తం 0
2. (a) భేదం 8 అగునట్లు ఋణ పూర్ణ సంఖ్యల జతను రాయండి.
 (b) మొత్తం -5 అగునట్లు ఒక ధన పూర్ణ సంఖ్య మరియు ఒక ఋణ పూర్ణ సంఖ్యను రాయండి.
 (c) భేదం -3 అగునట్లు ఒక ధన పూర్ణ సంఖ్య మరియు ఒక ఋణ పూర్ణ సంఖ్యను రాయండి.
3. ఒక క్విజ్ లో, 3 వరుస రౌండ్ లో జట్టు A స్కోరు $-40, 10, 0$ మరియు జట్టు B స్కోరు $10, 0, -40$ ఏ జట్టు ఎక్కువ స్కోరు చేసింది? పూర్ణ సంఖ్యలను ఏ క్రమంలోనైనా కలపవచ్చని చెప్పగలమా?
4. దిగువ ప్రవచనాలను సత్యం చేయడం కొరకు ఖాళీలను నింపండి:
 - (i) $(-5) + (-8) = (-8) + (\dots\dots\dots)$
 - (ii) $-53 + \dots\dots\dots = -53$
 - (iii) $17 + \dots\dots\dots = 0$
 - (iv) $[13 + (-12)] + (\dots\dots\dots) = 13 + [(-12) + (-7)]$
 - (v) $(-4) + [15 + (-3)] = [-4 + 15] + \dots\dots\dots$



1.2 పూర్ణ సంఖ్యల గుణకారం

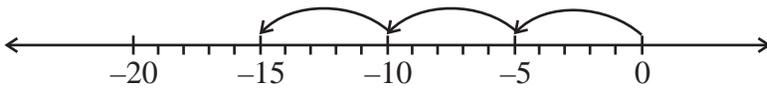
మనం పూర్ణ సంఖ్యలను సంకలనం మరియు వ్యవకలనం చేయగలం. పూర్ణ సంఖ్యలను ఎలా గుణించాలో మనం ఇప్పుడు నేర్చుకుందాం.

1.2.1 ఒక ధన మరియు ఒక ఋణ పూర్ణ సంఖ్యల గుణకారం

పూర్ణాంకాల గుణకారం పునరావృత సంకలనం అని మనకు తెలుసు. ఉదాహరణకు,
 $5 + 5 + 5 = 3 \times 5 = 15$

పూర్ణ సంఖ్యల సంకలనాన్ని కూడా ఈవిధంగా సూచించగలమా?

కింది సంఖ్యా రేఖ నుండి, $(-5) + (-5) + (-5) = -15$



కానీ, మనం కింది విధంగా రాయవచ్చు.

$$(-5) + (-5) + (-5) = 3 \times (-5)$$

కావున,

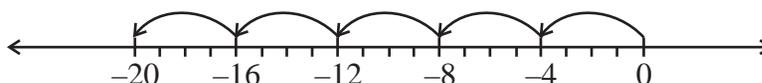
$$3 \times (-5) = -15$$

ప్రయత్నించండి

- $4 \times (-8),$
- $8 \times (-2),$
- $3 \times (-7),$
- $10 \times (-1)$

లను సంఖ్యా రేఖను ఉపయోగించి కనుగొనండి.

Similarly $(-4) + (-4) + (-4) + (-4) + (-4) = 5 \times (-4) = -20$



And $(-3) + (-3) + (-3) + (-3) = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

Also, $(-7) + (-7) + (-7) = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

Let us see how to find the product of a positive integer and a negative integer without using number line.

Let us find $3 \times (-5)$ in a different way. First find 3×5 and then put minus sign (-) before the product obtained. You get -15 . That is we find $-(3 \times 5)$ to get -15 .

Similarly, $5 \times (-4) = -(5 \times 4) = -20$.

Find in a similar way,

$$4 \times (-8) = \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}, \quad 3 \times (-7) = \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$$

$$6 \times (-5) = \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}, \quad 2 \times (-9) = \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$$

TRY THESE

Find:

- (i) $6 \times (-19)$
- (ii) $12 \times (-32)$
- (iii) $7 \times (-22)$

Using this method we thus have,

$$10 \times (-43) = \underline{\hspace{1cm}} - (10 \times 43) = -430$$

Till now we multiplied integers as (positive integer) \times (negative integer).

Let us now multiply them as (negative integer) \times (positive integer).

We first find -3×5 .

To find this, observe the following pattern:

We have,

$$3 \times 5 = 15$$

$$2 \times 5 = 10 = 15 - 5$$

$$1 \times 5 = 5 = 10 - 5$$

$$0 \times 5 = 0 = 5 - 5$$

So,

$$-1 \times 5 = 0 - 5 = -5$$

$$-2 \times 5 = -5 - 5 = -10$$

$$-3 \times 5 = -10 - 5 = -15$$

We already have

$$3 \times (-5) = -15$$

So we get

$$(-3) \times 5 = -15 = 3 \times (-5)$$

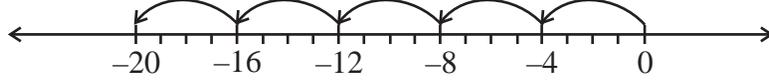
Using such patterns, we also get $(-5) \times 4 = -20 = 5 \times (-4)$

Using patterns, find $(-4) \times 8$, $(-3) \times 7$, $(-6) \times 5$ and $(-2) \times 9$

Check whether, $(-4) \times 8 = 4 \times (-8)$, $(-3) \times 7 = 3 \times (-7)$, $(-6) \times 5 = 6 \times (-5)$



ఇదే విధంగా, $(-4) + (-4) + (-4) + (-4) + (-4) = 5 \times (-4) = -20$



మరియు $(-3) + (-3) + (-3) + (-3) = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

అలాగే, $(-7) + (-7) + (-7) = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

సంఖ్య రేఖను ఉపయోగించకుండా ఒక ధనపూర్ణ సంఖ్య మరియు ఒక ఋణ పూర్ణ సంఖ్యల లబ్ధం ఎలా కనుగొనాలో చూద్దాం.

$3 \times (-5)$ యొక్క లబ్ధాన్ని మరొక విధంగా కనుగొందాం. మొదట 3×5 ల లబ్ధం కనుగొని, తరువాత పొందిన లబ్ధము ముందు ఋణాత్మక గుర్తు $(-)$ ఉంచాలి. మనం -15 ను పొందుతాం. అంటే $-(3 \times 5)$ విలువ -15 అని మనం కనుగొంటాం.

ఇదేవిధంగా, $5 \times (-4) = -(5 \times 4) = -20$.

ఇదేవిధంగా కింది వాటిని కనుగొనండి.

$$4 \times (-8) = \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}, \quad 3 \times (-7) = \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$$

$$6 \times (-5) = \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}, \quad 2 \times (-9) = \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$$

ప్రయత్నించండి

(i) $6 \times (-19)$

(ii) $12 \times (-32)$

(iii) $7 \times (-22)$

లను కనుగొనండి.

ఈ విధానాన్ని ఉపయోగించి,

$$10 \times (-43) = \underline{\hspace{1cm}} - (10 \times 43) = -430 \text{ అని మనం పొందుతాం.}$$

ఇప్పటి వరకు పూర్ణ సంఖ్యలను (ధన పూర్ణ సంఖ్య) \times (ఋణ పూర్ణ సంఖ్య) గా గుణించాం. మనం ఇప్పుడు (ఋణ పూర్ణ సంఖ్య) \times (ధన పూర్ణ సంఖ్య) గా గుణకారం చేద్దాం.

ముందుగా -3×5 ను కనుగొందాం.

దీనిని కనుగొనుటకు, కింది అమరికను పరిశీలిద్దాం:

ఇక్కడ,

$$3 \times 5 = 15$$

$$2 \times 5 = 10 = 15 - 5$$

$$1 \times 5 = 5 = 10 - 5$$

$$0 \times 5 = 0 = 5 - 5$$

కావున,

$$-1 \times 5 = 0 - 5 = -5$$

$$-2 \times 5 = -5 - 5 = -10$$

$$-3 \times 5 = -10 - 5 = -15$$

ఇది వరకే

$$3 \times (-5) = -15 \text{ అని మనకు తెలుసు.}$$

కావున,

$$(-3) \times 5 = -15 = 3 \times (-5)$$

ఇలాంటి అమరికలను ఉపయోగించి $(-5) \times 4 = -20 = 5 \times (-4)$ ని కూడా పొందగలం.

అమరికను ఉపయోగించి, $(-4) \times 8$, $(-3) \times 7$, $(-6) \times 5$ మరియు $(-2) \times 9$ లను కనుగొనండి.

$$(-4) \times 8 = 4 \times (-8), \quad (-3) \times 7 = 3 \times (-7), \quad (-6) \times 5 = 6 \times (-5)$$



and $(-2) \times 9 = 2 \times (-9)$

Using this we get, $(-33) \times 5 = 33 \times (-5) = -165$

We thus find that while *multiplying a positive integer and a negative integer, we multiply them as whole numbers and put a minus sign (-) before the product. We thus get a negative integer.*

TRY THESE

1. Find: (a) $15 \times (-16)$ (b) $21 \times (-32)$
 (c) $(-42) \times 12$ (d) -55×15
2. Check if (a) $25 \times (-21) = (-25) \times 21$ (b) $(-23) \times 20 = 23 \times (-20)$

Write five more such examples.



In general, for any two positive integers a and b we can say

$$a \times (-b) = (-a) \times b = -(a \times b)$$

1.2.2 Multiplication of two Negative Integers

Can you find the product $(-3) \times (-2)$?

Observe the following:

$$-3 \times 4 = -12$$

$$-3 \times 3 = -9 = -12 - (-3)$$

$$-3 \times 2 = -6 = -9 - (-3)$$

$$-3 \times 1 = -3 = -6 - (-3)$$

$$-3 \times 0 = 0 = -3 - (-3)$$

$$-3 \times -1 = 0 - (-3) = 0 + 3 = 3$$

$$-3 \times -2 = 3 - (-3) = 3 + 3 = 6$$



Do you see any pattern? Observe how the products change.

Based on this observation, complete the following:

$$-3 \times -3 = \underline{\quad\quad} \quad -3 \times -4 = \underline{\quad\quad}$$

Now observe these products and fill in the blanks:

$$-4 \times 4 = -16$$

$$-4 \times 3 = -12 = -16 + 4$$

$$-4 \times 2 = \underline{\quad\quad} = -12 + 4$$

మరియు $(-2) \times 9 = 2 \times (-9)$ లను సరిచూడండి.

దీని ఆధారంగా, $(-33) \times 5 = 33 \times (-5) = -165$ ను పొందగలం.

అందువలన, ఒక ధన పూర్ణ సంఖ్య మరియు ఒక ఋణ పూర్ణ సంఖ్యను గుణించినప్పుడు మనం వాటిని పూర్ణాంకాలుగా పరిగణించి గుణిస్తాం. మరియు లబ్ధం ముందు ఋణ గుర్తు (-) రాస్తాం. ఈ విధంగా ఒక ఋణ పూర్ణ సంఖ్యను పొందుతాం.

ప్రయత్నించండి

- కనుగొనండి: (a) $15 \times (-16)$ (b) $21 \times (-32)$
(c) $(-42) \times 12$ (d) -55×15
- సరిచూడండి. (a) $25 \times (-21) = (-25) \times 21$ (b) $(-23) \times 20 = 23 \times (-20)$

ఇలాంటి మరో ఐదు ఉదాహరణలు రాయండి.



సాధారణంగా, ఏవైనా రెండు పూర్ణ సంఖ్యలు a, b లకు,

$$a \times (-b) = (-a) \times b = -(a \times b)$$

1.2.2 రెండు ఋణ పూర్ణ సంఖ్యల గుణకారం

$(-3) \times (-2)$ లబ్ధాన్ని మీరు కనుగొనగలరా?

కింది వాటిని పరిశీలించండి:

$$\begin{aligned} -3 \times 4 &= -12 \\ -3 \times 3 &= -9 = -12 - (-3) \\ -3 \times 2 &= -6 = -9 - (-3) \\ -3 \times 1 &= -3 = -6 - (-3) \\ -3 \times 0 &= 0 = -3 - (-3) \\ -3 \times -1 &= 0 - (-3) = 0 + 3 = 3 \\ -3 \times -2 &= 3 - (-3) = 3 + 3 = 6 \end{aligned}$$



మీరు ఏదైనా అమరికను గమనించారా? లబ్ధాలు ఏవిధంగా మారుతాయో గమనించండి.

ఈ పరిశీలన ఆధారంగా, కింది వాటిని పూరించండి.

$$-3 \times -3 = \underline{\hspace{2cm}} \quad -3 \times -4 = \underline{\hspace{2cm}}$$

ఇప్పుడు ఈ పరిశీలన ఆధారంగా, కింది వాటిని పూర్తి చేయండి:

$$\begin{aligned} -4 \times 4 &= -16 \\ -4 \times 3 &= -12 = -16 + 4 \\ -4 \times 2 &= \underline{\hspace{2cm}} = -12 + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -4 \times 1 &= \underline{\hspace{2cm}} \\
 -4 \times 0 &= \underline{\hspace{2cm}} \\
 -4 \times (-1) &= \underline{\hspace{2cm}} \\
 -4 \times (-2) &= \underline{\hspace{2cm}} \\
 -4 \times (-3) &= \underline{\hspace{2cm}}
 \end{aligned}$$

TRY THESE

- (i) Starting from $(-5) \times 4$, find $(-5) \times (-6)$
(ii) Starting from $(-6) \times 3$, find $(-6) \times (-7)$

From these patterns we observe that,

$$(-3) \times (-1) = 3 = 3 \times 1$$

$$(-3) \times (-2) = 6 = 3 \times 2$$

$$(-3) \times (-3) = 9 = 3 \times 3$$

and $(-4) \times (-1) = 4 = 4 \times 1$

So, $(-4) \times (-2) = 4 \times 2 = \underline{\hspace{2cm}}$

$$(-4) \times (-3) = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

So observing these products we can say that the *product of two negative integers is a positive integer. We multiply the two negative integers as whole numbers and put the positive sign before the product.*

Thus, we have $(-10) \times (-12) = +120 = 120$

Similarly $(-15) \times (-6) = +90 = 90$

In general, for any two positive integers a and b ,

$$(-a) \times (-b) = a \times b$$

TRY THESE

Find: $(-31) \times (-100)$, $(-25) \times (-72)$, $(-83) \times (-28)$

Game 1

- (i) Take a board marked from -104 to 104 as shown in the figure.
- (ii) Take a bag containing two blue and two red dice. Number of dots on the blue dice indicate positive integers and number of dots on the red dice indicate negative integers.
- (iii) Every player will place his/her counter at zero.
- (iv) Each player will take out two dice at a time from the bag and throw them.
- (v) After every throw, the player has to multiply the numbers marked on the dice.

$$\begin{aligned}
 -4 \times 1 &= \underline{\hspace{2cm}} \\
 -4 \times 0 &= \underline{\hspace{2cm}} \\
 -4 \times (-1) &= \underline{\hspace{2cm}} \\
 -4 \times (-2) &= \underline{\hspace{2cm}} \\
 -4 \times (-3) &= \underline{\hspace{2cm}}
 \end{aligned}$$

ప్రయత్నించండి

- (i) $(-5) \times 4$ తో ప్రారంభించి, $(-5) \times (-6)$ ను కనుగొనండి.
- (ii) $(-6) \times 3$ తో ప్రారంభించి, $(-6) \times (-7)$ ను కనుగొనండి.

ఈ అమరికల నుండి మనం ఏమి గమనించామంటే,

$$\begin{aligned}
 (-3) \times (-1) &= 3 = 3 \times 1 \\
 (-3) \times (-2) &= 6 = 3 \times 2 \\
 (-3) \times (-3) &= 9 = 3 \times 3
 \end{aligned}$$

మరియు $(-4) \times (-1) = 4 = 4 \times 1$

కావున, $(-4) \times (-2) = 4 \times 2 = \underline{\hspace{2cm}}$
 $(-4) \times (-3) = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

ఈ లబ్ధాలను గమనించి, రెండు ఋణ పూర్ణ సంఖ్యల లబ్ధం ఒక ధన పూర్ణ సంఖ్య అని మనం చెప్పవచ్చు. మనం వాటిని పూర్ణాంకాలుగా పరిగణించి గుణిస్తాం. మరియు లబ్ధం ముందు ధన గుర్తు ఉంచుతాం.

ఈ విధంగా, $(-10) \times (-12) = +120 = 120$ అని మనం పొందుతాం.

ఇదే విధంగా, $(-15) \times (-6) = +90 = 90$

సాధారణంగా, ఏవైనా రెండు పూర్ణ సంఖ్యలు a, b లకు,

$$(-a) \times (-b) = a \times b$$

ప్రయత్నించండి

$(-31) \times (-100), (-25) \times (-72), (-83) \times (-28)$ ల విలువను కనుగొనండి:

ఆట 1

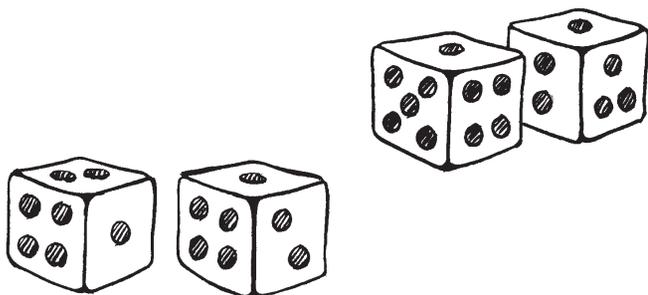
- (i) పటంలో చూపించిన విధంగా -104 నుంచి 104 వరకు గుర్తించిన బోర్డును తీసుకోండి.
- (ii) రెండు నీలం మరియు రెండు ఎరుపు పాచికలు ఉన్న ఒక సంచినీ తీసుకోండి. నీలం పాచికపై చుక్కల సంఖ్య ధన పూర్ణ సంఖ్యను సూచిస్తుంది మరియు ఎరుపు పాచికపై చుక్కల సంఖ్య ఋణ పూర్ణ సంఖ్యను సూచిస్తుంది.
- (iii) ప్రతి ఆటగాడు తన కౌంటర్‌ని సున్నా వద్ద ఉంచుతాడు.
- (iv) ప్రతి ఆటగాడు బ్యాక్ నుండి ఒకేసారి రెండు పాచికలు తీసి దొర్లిస్తాడు.
- (v) పాచికలను దొర్లించిన ప్రతిసారి, ఆటగాడు పాచికలపై గుర్తించబడ్డ సంఖ్యలను గుణించాలి.

104	103	102	101	100	99	98	97	96	95	94
83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93
82	81	80	79	78	77	76	75	74	73	72
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71
60	59	58	57	56	55	54	53	52	51	50
39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28
17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6
-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
-6	-7	-8	-9	-10	-11	-12	-13	-14	-15	-16
-27	-26	-25	-24	-23	-22	-21	-20	-19	-18	-17
-28	-29	-30	-31	-32	-33	-34	-35	-36	-37	-38
-49	-48	-47	-46	-45	-44	-43	-42	-41	-40	-39
-50	-51	-52	-53	-54	-55	-56	-57	-58	-59	-60
-71	-70	-69	-68	-67	-66	-65	-64	-63	-62	-61
-72	-73	-74	-75	-76	-77	-78	-79	-80	-81	-82
-93	-92	-91	-90	-89	-88	-87	-86	-85	-84	-83
-94	-95	-96	-97	-98	-99	-100	-101	-102	-103	-104



(vi) If the product is a positive integer then the player will move his counter towards 104; if the product is a negative integer then the player will move his counter towards -104.

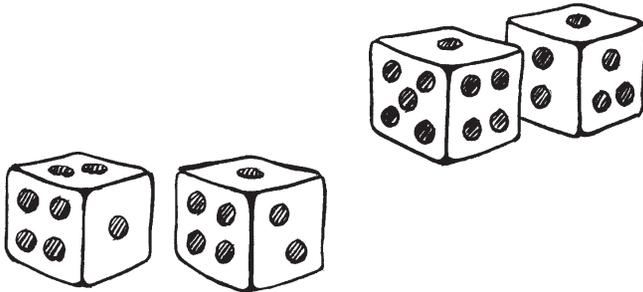
(vii) The player who reaches either -104 or 104 first is the winner.



104	103	102	101	100	99	98	97	96	95	94
83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93
82	81	80	79	78	77	76	75	74	73	72
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71
60	59	58	57	56	55	54	53	52	51	50
39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28
17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6
-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
-6	-7	-8	-9	-10	-11	-12	-13	-14	-15	-16
-27	-26	-25	-24	-23	-22	-21	-20	-19	-18	-17
-28	-29	-30	-31	-32	-33	-34	-35	-36	-37	-38
-49	-48	-47	-46	-45	-44	-43	-42	-41	-40	-39
-50	-51	-52	-53	-54	-55	-56	-57	-58	-59	-60
-71	-70	-69	-68	-67	-66	-65	-64	-63	-62	-61
-72	-73	-74	-75	-76	-77	-78	-79	-80	-81	-82
-93	-92	-91	-90	-89	-88	-87	-86	-85	-84	-83
-94	-95	-96	-97	-98	-99	-100	-101	-102	-103	-104



- (vi) లబ్ధము ధన పూర్ణ సంఖ్య, అయినప్పుడు ఆటగాడు తన కౌంటర్‌ను 104 వైపుకు కదిలించాలి. ఒకవేళ లబ్ధం ఋణ పూర్ణ సంఖ్య అయినప్పుడు ఆటగాడు తన కౌంటర్‌ను -104 వైపుకు కదిలించాలి.
- (vii) మొదట -104 లేదా 104 కు చేరుకున్న ఆటగాడు విజేత అవుతాడు.



1.3 PROPERTIES OF MULTIPLICATION OF INTEGERS

1.3.1 Closure under Multiplication

1. Observe the following table and complete it:

Statement	Inference
$(-20) \times (-5) = 100$	Product is an integer
$(-15) \times 17 = -255$	Product is an integer
$(-30) \times 12 = \underline{\hspace{2cm}}$	
$(-15) \times (-23) = \underline{\hspace{2cm}}$	
$(-14) \times (-13) = \underline{\hspace{2cm}}$	
$12 \times (-30) = \underline{\hspace{2cm}}$	

What do you observe? Can you find a pair of integers whose product is not an integer? No. This gives us an idea that the product of two integers is again an integer. So we can say that *integers are closed under multiplication*.

In general,

$$a \times b \text{ is an integer, for all integers } a \text{ and } b.$$

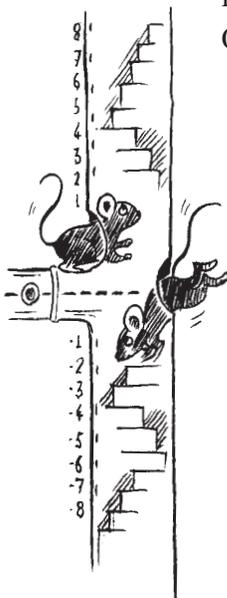
Find the product of five more pairs of integers and verify the above statement.

1.3.2 Commutativity of Multiplication

We know that multiplication is commutative for whole numbers. Can we say, multiplication is also commutative for integers?

Observe the following table and complete it:

Statement 1	Statement 2	Inference
$3 \times (-4) = -12$	$(-4) \times 3 = -12$	$3 \times (-4) = (-4) \times 3$
$(-30) \times 12 = \underline{\hspace{2cm}}$	$12 \times (-30) = \underline{\hspace{2cm}}$	
$(-15) \times (-10) = 150$	$(-10) \times (-15) = 150$	
$(-35) \times (-12) = \underline{\hspace{2cm}}$	$(-12) \times (-35) = \underline{\hspace{2cm}}$	
$(-17) \times 0 = \underline{\hspace{2cm}}$		
$\underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$	$(-1) \times (-15) = \underline{\hspace{2cm}}$	



1.3 పూర్ణ సంఖ్యల గుణకార ధర్మాలు

1.3.1 గుణకార సంవృత ధర్మం

1. కింది పట్టికను పరిశీలించి, దానిని పూర్తి చేయండి:

ప్రవచనం	సారాంశం
$(-20) \times (-5) = 100$	ఫలితం ఒక పూర్ణ సంఖ్య
$(-15) \times 17 = -255$	ఫలితం ఒక పూర్ణ సంఖ్య
$(-30) \times 12 = \underline{\hspace{2cm}}$	
$(-15) \times (-23) = \underline{\hspace{2cm}}$	
$(-14) \times (-13) = \underline{\hspace{2cm}}$	
$12 \times (-30) = \underline{\hspace{2cm}}$	

మీరు ఏమి గమనించారు? లబ్ధం పూర్ణ సంఖ్య కాని ఒక పూర్ణ సంఖ్యల జతను కనుగొనగలమా? కనుగొనలేం. ఇది రెండు పూర్ణ సంఖ్యల యొక్క లబ్ధం కూడా ఒక పూర్ణ సంఖ్య అనే ఆలోచనను ఇస్తుంది. కావున, పూర్ణ సంఖ్యలు, గుణకారము దృష్ట్యా సంవృతం అని మనం చెప్పవచ్చు. సాధారణంగా,

a మరియు b లు ఏవైనా రెండు పూర్ణ సంఖ్యలైన $a \times b$ కూడా పూర్ణసంఖ్యే

మరొక 5 జతల పూర్ణ సంఖ్యల లబ్ధాన్ని కనుగొనుము మరియు పై ప్రవచనాన్ని సరిచూడుము.

1.3.2 గుణకారవినిమయ (స్థిత్యంతర) ధర్మము

పూర్ణాంకాలు గుణకార స్థిత్యంతర ధర్మాన్ని పాటిస్తాయని మనకు తెలుసు. పూర్ణ సంఖ్యలు కూడా గుణకార స్థిత్యంతర ధర్మాన్ని పాటిస్తాయని మనం చెప్పగలమా?

కింది పట్టికను పరిశీలించి, పూర్తి చేయండి:

ప్రవచనం 1	ప్రవచనం 2	సారాంశం
$3 \times (-4) = -12$	$(-4) \times 3 = -12$	$3 \times (-4) = (-4) \times 3$
$(-30) \times 12 = \underline{\hspace{2cm}}$	$12 \times (-30) = \underline{\hspace{2cm}}$	
$(-15) \times (-10) = 150$	$(-10) \times (-15) = 150$	
$(-35) \times (-12) = \underline{\hspace{2cm}}$	$(-12) \times (-35) = \underline{\hspace{2cm}}$	
$(-17) \times 0 = \underline{\hspace{2cm}}$		
$\underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$	$(-1) \times (-15) = \underline{\hspace{2cm}}$	



What are your observations? The above examples suggest *multiplication is commutative for integers*. Write five more such examples and verify.

In general, for any two integers a and b ,

$$a \times b = b \times a$$

1.3.3 Multiplication by Zero

We know that any whole number when multiplied by zero gives zero. Observe the following products of negative integers and zero. These are obtained from the patterns done earlier.

$$(-3) \times 0 = 0$$

$$0 \times (-4) = 0$$

$$-5 \times 0 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$0 \times (-6) = \underline{\hspace{2cm}}$$

This shows that the product of a negative integer and zero is zero.

In general, for any integer a ,

$$a \times 0 = 0 \times a = 0$$

1.3.4 Multiplicative Identity

We know that 1 is the multiplicative identity for whole numbers.

Check that 1 is the multiplicative identity for integers as well. Observe the following products of integers with 1.

$$(-3) \times 1 = -3$$

$$1 \times 5 = 5$$

$$(-4) \times 1 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$1 \times 8 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$1 \times (-5) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$3 \times 1 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$1 \times (-6) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$7 \times 1 = \underline{\hspace{2cm}}$$

This shows that 1 is the multiplicative identity for integers also.

In general, for any integer a we have,

$$a \times 1 = 1 \times a = a$$

What happens when we multiply any integer with -1 ? Complete the following:

$$(-3) \times (-1) = 3$$

$$3 \times (-1) = -3$$

$$(-6) \times (-1) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(-1) \times 13 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(-1) \times (-25) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$18 \times (-1) = \underline{\hspace{2cm}}$$

0 is the additive identity whereas 1 is the multiplicative identity for integers. We get additive inverse of an integer a when we multiply (-1) to a , i.e. $a \times (-1) = (-1) \times a = -a$

What do you observe?

Can we say -1 is a multiplicative identity of integers? No.

నీవు ఏమి పరిశీలించావు? పై ఉదాహరణలు పూర్ణ సంఖ్యలు గుణకారం దృష్ట్యా వినిమయ (స్థిత్యంతర) న్యాయాన్ని పాటిస్తాయని సూచిస్తాయి. అటువంటి మరో ఐదు ఉదాహరణలు రాయండి మరియు సరిచూడండి. సాధారణంగా, ఏవేని రెండు పూర్ణ సంఖ్యలు a, b లకు,

$$a \times b = b \times a$$

1.3.2 సున్నాతో గుణకారం

ఏదైనా పూర్ణాంకాన్ని సున్నాతో గుణించినప్పుడు సున్నా వస్తుందని మనకు తెలుసు. ఋణ పూర్ణ సంఖ్యలు మరియు సున్నాల లబ్ధాలను గమనించండి. ఇంతకు ముందు చేసిన అమరికల నుండి ఇవి పొందవచ్చు.

$$\begin{aligned} (-3) \times 0 &= 0 \\ 0 \times (-4) &= 0 \\ -5 \times 0 &= \underline{\hspace{2cm}} \\ 0 \times (-6) &= \underline{\hspace{2cm}} \end{aligned}$$

దీని నుండి ఒక ఋణ పూర్ణ సంఖ్య మరియు సున్నాల లబ్ధం సున్నా అని చెప్పవచ్చు. సాధారణంగా, ఏదేని పూర్ణ సంఖ్య a కు,

$$a \times 0 = 0 \times a = 0$$

1.3.4 గుణకార తత్వమాంశం

పూర్ణాంకాలకు గుణకార తత్వమాంశం '1' అని మనకు తెలుసు.

పూర్ణ సంఖ్యలకు కూడా 1 గుణకార తత్వమాంశం అవుతుందేమో సరిచూడండి. 1 తో కిందనివ్వబడిన పూర్ణ సంఖ్యల లబ్ధాలను గమనించండి.

$$\begin{aligned} (-3) \times 1 &= -3 & 1 \times 5 &= 5 \\ (-4) \times 1 &= \underline{\hspace{2cm}} & 1 \times 8 &= \underline{\hspace{2cm}} \\ 1 \times (-5) &= \underline{\hspace{2cm}} & 3 \times 1 &= \underline{\hspace{2cm}} \\ 1 \times (-6) &= \underline{\hspace{2cm}} & 7 \times 1 &= \underline{\hspace{2cm}} \end{aligned}$$

దీని నుండి పూర్ణ సంఖ్యలకు కూడా 1 గుణకార తత్వమాంశం అవుతుందని చెప్పవచ్చు. సాధారణంగా, ఏదేని పూర్ణ సంఖ్య a కు,

$$a \times 1 = 1 \times a = a$$

మనం ఏదైనా పూర్ణ సంఖ్యను -1 తో గుణించినప్పుడు ఏమి జరుగుతుంది? కింది వాటిని పూర్తి చేయండి:

$$\begin{aligned} (-3) \times (-1) &= 3 \\ 3 \times (-1) &= -3 \\ (-6) \times (-1) &= \underline{\hspace{2cm}} \\ (-1) \times 13 &= \underline{\hspace{2cm}} \\ (-1) \times (-25) &= \underline{\hspace{2cm}} \\ 18 \times (-1) &= \underline{\hspace{2cm}} \end{aligned}$$

పూర్ణ సంఖ్యలకు సంకలన తత్వమాంశం '0' మరియు గుణకార తత్వమాంశం '1'. a అనే పూర్ణ సంఖ్యను -1 చే గుణించుట ద్వారా దాని సంకలన విలోమం పొందవచ్చు. అనగా, $a \times (-1) = (-1) \times a = -a$

మీరు ఏమి గమనించారు?

పూర్ణ సంఖ్యలకు -1 గుణకార తత్వమాంశం అని చెప్పవచ్చా? చెప్పలేం.

1.3.5 Associativity for Multiplication

Consider -3 , -2 and 5 .

Look at $[(-3) \times (-2)] \times 5$ and $(-3) \times [(-2) \times 5]$.

In the first case (-3) and (-2) are grouped together and in the second (-2) and 5 are grouped together.

We see that $[(-3) \times (-2)] \times 5 = 6 \times 5 = 30$

and $(-3) \times [(-2) \times 5] = (-3) \times (-10) = 30$

So, we get the same answer in both the cases.

Thus, $[(-3) \times (-2)] \times 5 = (-3) \times [(-2) \times 5]$

Look at this and complete the products:

$$[(7) \times (-6)] \times 4 = \underline{\hspace{2cm}} \times 4 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$7 \times [(-6) \times 4] = 7 \times \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\text{Is } [7 \times (-6)] \times 4 = 7 \times [(-6) \times 4]?$$

Does the grouping of integers affect the product of integers? No.

In general, for any three integers a , b and c

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

Take any five values for a , b and c each and verify this property.

Thus, like whole numbers, *the product of three integers does not depend upon the grouping of integers and this is called the associative property for multiplication of integers.*

1.3.6 Distributive Property

We know

$$16 \times (10 + 2) = (16 \times 10) + (16 \times 2) \quad [\text{Distributivity of multiplication over addition}]$$

Let us check if this is true for integers also.

Observe the following:

$$(a) \quad (-2) \times (3 + 5) = -2 \times 8 = -16$$

$$\text{and} \quad [(-2) \times 3] + [(-2) \times 5] = (-6) + (-10) = -16$$

$$\text{So,} \quad (-2) \times (3 + 5) = [(-2) \times 3] + [(-2) \times 5]$$

$$(b) \quad (-4) \times [(-2) + 7] = (-4) \times 5 = -20$$

$$\text{and} \quad [(-4) \times (-2)] + [(-4) \times 7] = 8 + (-28) = -20$$

$$\text{So,} \quad (-4) \times [(-2) + 7] = [(-4) \times (-2)] + [(-4) \times 7]$$

$$(c) \quad (-8) \times [(-2) + (-1)] = (-8) \times (-3) = 24$$

$$\text{and} \quad [(-8) \times (-2)] + [(-8) \times (-1)] = 16 + 8 = 24$$

$$\text{So,} \quad (-8) \times [(-2) + (-1)] = [(-8) \times (-2)] + [(-8) \times (-1)]$$



1.3.5 గుణకార సహచర న్యాయం

మూడు పూర్ణ సంఖ్యలు -3 , -2 మరియు 5 .

$$[(-3) \times (-2)] \times 5 \text{ మరియు } (-3) \times [(-2) \times 5].$$

మొదటి సందర్భంలో (-3) మరియు (-2) లు సమూహంగా చేయబడ్డాయి. రెండవదానిలో (-2) మరియు 5 సమూహంగా చేయబడ్డాయి.

$$\text{మనం } [(-3) \times (-2)] \times 5 = 6 \times 5 = 30$$

$$\text{మరియు } (-3) \times [(-2) \times 5] = (-3) \times (-10) = 30 \text{ అని చూస్తాం.}$$

కావున, రెండు సందర్భాలలో కూడా మనం ఒకే సమాధానం పొందుతాం.

$$\text{అనగా, } [(-3) \times (-2)] \times 5 = (-3) \times [(-2) \times 5]$$

దీనిని గమనించండి మరియు లబ్ధాలను పూర్తి చేయండి:

$$[(7) \times (-6)] \times 4 = \underline{\hspace{2cm}} \times 4 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$7 \times [(-6) \times 4] = 7 \times \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$[7 \times (-6)] \times 4 = 7 \times [(-6) \times 4] \text{ అగునా?}$$

పూర్ణ సంఖ్యలను సమూహాలుగా చేయడం వలన లబ్ధం మారినదా? లేదు.

సాధారణంగా, ఏవైనా మూడు పూర్ణ సంఖ్యలు a , b మరియు c లకు,

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

a , b మరియు c లకు ఏవైనా 5 విలువలు తీసుకుని ఈ ధర్మాన్ని సరిచూడండి.

కావున, పూర్ణాంకాల వలే, 3 పూర్ణ సంఖ్యల లబ్ధం అనేది సమూహం చేయడంపై ఆధారపడదు. దీనినే పూర్ణ సంఖ్యలపై గుణకార సహచర న్యాయం అంటారు.



1.3.6 విభాగ న్యాయం

$16 \times (10 + 2) = (16 \times 10) + (16 \times 2)$ అని మనకు తెలుసు. [సంకలనంపై గుణకార విభాగ న్యాయం]

ఇది పూర్ణ సంఖ్యల విషయంలో కూడా నిజమని మనం ఇప్పుడు సరిచూద్దాం.

కింది వాటిని పరిశీలించండి

(a) $(-2) \times (3 + 5) = -2 \times 8 = -16$

మరియు $[(-2) \times 3] + [(-2) \times 5] = (-6) + (-10) = -16$

కావున, $(-2) \times (3 + 5) = [(-2) \times 3] + [(-2) \times 5]$

(b) $(-4) \times [(-2) + 7] = (-4) \times 5 = -20$

మరియు $[(-4) \times (-2)] + [(-4) \times 7] = 8 + (-28) = -20$

కావున, $(-4) \times [(-2) + 7] = [(-4) \times (-2)] + [(-4) \times 7]$

(c) $(-8) \times [(-2) + (-1)] = (-8) \times (-3) = 24$

మరియు $[(-8) \times (-2)] + [(-8) \times (-1)] = 16 + 8 = 24$

కావున, $(-8) \times [(-2) + (-1)] = [(-8) \times (-2)] + [(-8) \times (-1)]$

Can we say that the distributivity of multiplication over addition is true for integers also? Yes.

In general, for any integers a , b and c ,

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

Take atleast five different values for each of a , b and c and verify the above Distributive property.

TRY THESE

- (i) Is $10 \times [(6 + (-2))] = 10 \times 6 + 10 \times (-2)$?
 (ii) Is $(-15) \times [(-7) + (-1)] = (-15) \times (-7) + (-15) \times (-1)$?



Now consider the following:

Can we say $4 \times (3 - 8) = 4 \times 3 - 4 \times 8$?

Let us check:

$$4 \times (3 - 8) = 4 \times (-5) = -20$$

$$4 \times 3 - 4 \times 8 = 12 - 32 = -20$$

So, $4 \times (3 - 8) = 4 \times 3 - 4 \times 8$.

Look at the following:

$$(-5) \times [(-4) - (-6)] = (-5) \times 2 = -10$$

$$[(-5) \times (-4)] - [(-5) \times (-6)] = 20 - 30 = -10$$

So, $(-5) \times [(-4) - (-6)] = [(-5) \times (-4)] - [(-5) \times (-6)]$

Check this for $(-9) \times [10 - (-3)]$ and $[(-9) \times 10] - [(-9) \times (-3)]$

You will find that these are also equal.

In general, for any three integers a , b and c ,

$$a \times (b - c) = a \times b - a \times c$$

Take atleast five different values for each of a , b and c and verify this property.

TRY THESE

- (i) Is $10 \times (6 - (-2)) = 10 \times 6 - 10 \times (-2)$?
 (ii) Is $(-15) \times [(-7) - (-1)] = (-15) \times (-7) - (-15) \times (-1)$?



పూర్ణ సంఖ్యలకు సంకలనం పై గుణకార విభాగ న్యాయం వర్తిస్తుందని అనుకుంటున్నారా? అవును. సాధారణంగా, ఏవైనా మూడు పూర్ణ సంఖ్యలు a, b మరియు c లకు,

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

a, b మరియు c లకు కనీసం 5 వేరు వేరు పూర్ణ సంఖ్యలు తీసుకుని ఈ విభాగ న్యాయాన్ని సరిచూడండి.

ప్రయత్నించండి

- (i) $10 \times [(6 + (-2))] = 10 \times 6 + 10 \times (-2)$ అవుతుందా?
- (ii) $(-15) \times [(-7) + (-1)] = (-15) \times (-7) + (-15) \times (-1)$ అవుతుందా?



ఇప్పుడు కింది వాటిని గమనించండి:

$$4 \times (3 - 8) = 4 \times 3 - 4 \times 8 \text{ అని చెప్పవచ్చా?}$$

సరిచూచుట:

$$4 \times (3 - 8) = 4 \times (-5) = -20$$

$$4 \times 3 - 4 \times 8 = 12 - 32 = -20$$

కావున, $4 \times (3 - 8) = 4 \times 3 - 4 \times 8.$

ఈ కింది వాటిని చూడండి:

$$(-5) \times [(-4) - (-6)] = (-5) \times 2 = -10$$

$$[(-5) \times (-4)] - [(-5) \times (-6)] = 20 - 30 = -10$$

కావున, $(-5) \times [(-4) - (-6)] = [(-5) \times (-4)] - [(-5) \times (-6)]$

$(-9) \times [10 - (-3)]$ మరియు $[(-9) \times 10] - [(-9) \times (-3)]$ ను పై విధంగా సరిచూడండి.

ఇవి కూడా సమానమని మీరు కనుగొంటారు.

సాధారణంగా, ఏవైనా మూడు పూర్ణ సంఖ్యలు a, b మరియు c లకు,

$$a \times (b - c) = a \times b - a \times c$$

a, b మరియు c లకు కనీసం 5 వేరు వేరు పూర్ణ సంఖ్యలు తీసుకుని ఈ విభాగ న్యాయాన్ని సరిచూడండి.

ప్రయత్నించండి

- (i) $10 \times (6 - (-2)) = 10 \times 6 - 10 \times (-2)$ అవుతుందా?
- (ii) $(-15) \times [(-7) - (-1)] = (-15) \times (-7) - (-15) \times (-1)$ అవుతుందా?



అభ్యాసం 1. 2

1. కింది వాటి లబ్ధాలను కనుగొనండి:

- (a) $3 \times (-1)$ (b) $(-1) \times 225$
 (c) $(-21) \times (-30)$ (d) $(-316) \times (-1)$
 (e) $(-15) \times 0 \times (-18)$ (f) $(-12) \times (-11) \times (10)$
 (g) $9 \times (-3) \times (-6)$ (h) $(-18) \times (-5) \times (-4)$
 (i) $(-1) \times (-2) \times (-3) \times 4$ (j) $(-3) \times (-6) \times (-2) \times (-1)$



2. కింది వాటిని సరిచూడండి:

- (a) $18 \times [7 + (-3)] = [18 \times 7] + [18 \times (-3)]$
 (b) $(-21) \times [(-4) + (-6)] = [(-21) \times (-4)] + [(-21) \times (-6)]$

3. (i) ఏదేని పూర్ణ సంఖ్య a అయిన, $(-1) \times a$ విలువ దేనికి సమానం?

(ii) (-1) తో గుణించగా కింది వాటిని లబ్ధంగా ఇచ్చు పూర్ణ సంఖ్యలను కనుగొనండి.

- (a) -22 (b) 37 (c) 0

4. $(-1) \times 5$ తో ప్రారంభించి, $(-1) \times (-1) = 1$ వచ్చునట్లు వేరు వేరు లబ్ధాలతో అమరికను రాయండి.

1.4 పూర్ణ సంఖ్యల భాగహారం

భాగహారం అనేది గుణకారం యొక్క విలోమ పరిక్రియ అని మనకు తెలుసు. మనం పూర్ణాంకాల ఉదాహరణతో దానిని చూద్దాం.

ఇప్పుడు $3 \times 5 = 15$

కావున, $15 \div 5 = 3$ మరియు $15 \div 3 = 5$

అదేవిధంగా, $4 \times 3 = 12$ కావున, $12 \div 4 = 3$ మరియు $12 \div 3 = 4$

పూర్ణాంకాల ప్రతి గుణకార వాక్యానికి రెండు భాగహార వాక్యాలు ఉంటాయని మనం చెప్పవచ్చు.

పూర్ణ సంఖ్యలకు గుణకార వాక్యాన్ని రాసి, దానికి సంబంధించిన భాగహార వాక్యాలు మీరు రాయగలరా?

గుణకార వాక్యము	సంబంధిత భాగహార వాక్యాలు
$2 \times (-6) = (-12)$	$(-12) \div (-6) = 2$, $(-12) \div 2 = (-6)$
$(-4) \times 5 = (-20)$	$(-20) \div 5 = (-4)$, $(-20) \div (-4) = 5$
$(-8) \times (-9) = 72$	$72 \div \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$, $72 \div \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$
$(-3) \times (-7) = \underline{\hspace{1cm}}$	$\underline{\hspace{1cm}} \div (-3) = \underline{\hspace{1cm}}$, $\underline{\hspace{1cm}}$
$(-8) \times 4 = \underline{\hspace{1cm}}$	$\underline{\hspace{1cm}}$, $\underline{\hspace{1cm}}$
$5 \times (-9) = \underline{\hspace{1cm}}$	$\underline{\hspace{1cm}}$, $\underline{\hspace{1cm}}$
$(-10) \times (-5) = \underline{\hspace{1cm}}$	$\underline{\hspace{1cm}}$, $\underline{\hspace{1cm}}$

From the above we observe that :

$$(-12) \div 2 = (-6)$$

$$(-20) \div 5 = (-4)$$

$$(-32) \div 4 = (-8)$$

$$(-45) \div 5 = (-9)$$

We observe that *when we divide a negative integer by a positive integer, we divide them as whole numbers and then put a minus sign (-) before the quotient.*

- We also observe that:

$$72 \div (-8) = -9 \quad \text{and} \quad 50 \div (-10) = -5$$

$$72 \div (-9) = -8 \quad \quad \quad 50 \div (-5) = -10$$

So we can say that *when we divide a positive integer by a negative integer, we first divide them as whole numbers and then put a minus sign (-) before the quotient.*

In general, for any two positive integers a and b

$$a \div (-b) = (-a) \div b \quad \text{where } b \neq 0$$

TRY THESE

Find:

(a) $(-100) \div 5$ (b) $(-81) \div 9$

(c) $(-75) \div 5$ (d) $(-32) \div 2$

Can we say that

$$(-48) \div 8 = 48 \div (-8)?$$

Let us check. We know that

$$(-48) \div 8 = -6$$

$$\text{and } 48 \div (-8) = -6$$

$$\text{So } (-48) \div 8 = 48 \div (-8)$$

Check this for

(i) $90 \div (-45)$ and $(-90) \div 45$

(ii) $(-136) \div 4$ and $136 \div (-4)$

TRY THESE

Find: (a) $125 \div (-25)$ (b) $80 \div (-5)$ (c) $64 \div (-16)$

- Lastly, we observe that

$$(-12) \div (-6) = 2; (-20) \div (-4) = 5; (-32) \div (-8) = 4; (-45) \div (-9) = 5$$

So, we can say that *when we divide a negative integer by a negative integer, we first divide them as whole numbers and then put a positive sign (+).*

In general, for any two positive integers a and b

$$(-a) \div (-b) = a \div b \quad \text{where } b \neq 0$$

TRY THESE

Find: (a) $(-36) \div (-4)$ (b) $(-201) \div (-3)$ (c) $(-325) \div (-13)$

1.5 PROPERTIES OF DIVISION OF INTEGERS

Observe the following table and complete it:

What do you observe? We observe that integers are not closed under division.

Statement	Inference	Statement	Inference
$(-8) \div (-4) = 2$	Result is an integer	$(-8) \div 3 = \frac{-8}{3}$	_____
$(-4) \div (-8) = \frac{-4}{-8}$	Result is not an integer	$3 \div (-8) = \frac{3}{-8}$	_____



పైన పేర్కొన్న వాటి నుండి మనం వీటిని గమనించవచ్చు :

$$(-12) \div 2 = (-6)$$

$$(-20) \div 5 = (-4)$$

$$(-32) \div 4 = (-8)$$

$$(-45) \div 5 = (-9)$$

ఒక ఋణ పూర్ణ సంఖ్యను ఒక ధన పూర్ణ సంఖ్యతో భాగించినపుడు, మనం వాటిని పూర్ణాంకాలుగా భాగించి, వచ్చిన భాగఫలం ముందు ఋణ గుర్తు (-)ను పెట్టాలని గమనించవచ్చు.

● మనం వీటిని కూడా గమనిస్తాం:

$$72 \div (-8) = -9 \quad \text{మరియు} \quad 50 \div (-10) = -5$$

$$72 \div (-9) = -8 \quad \text{మరియు} \quad 50 \div (-5) = -10$$

కావున, మనము ఒక ధన పూర్ణ సంఖ్యను ఒక ఋణ పూర్ణ సంఖ్యతో భాగించినపుడు, మొదట, వాటిని పూర్ణాంకాలుగా భాగించి, వచ్చిన భాగఫలం ముందు ఋణ గుర్తు (-) ను పెట్టాలి.

సాధారణంగా, ఏవైనా రెండు పూర్ణ సంఖ్యలు a మరియు b

$$a \div (-b) = (-a) \div b \quad \text{ఇక్కడ } b \neq 0$$

ప్రయత్నించండి

కింది వాటిని కనుగొనండి:

(a) $(-100) \div 5$ (b) $(-81) \div 9$

(c) $(-75) \div 5$ (d) $(-32) \div 2$

$(-48) \div 8 = 48 \div (-8)$ అని మనం చెప్పగలమా? సరిచూద్దాం.

$$(-48) \div 8 = -6$$

మరియు $48 \div (-8) = -6$ అని మనకు తెలుసు

కావున $(-48) \div 8 = 48 \div (-8)$

కింది వాటిని సరిచూడండి

(i) $90 \div (-45)$ మరియు $(-90) \div 45$

(ii) $(-136) \div 4$ మరియు $136 \div (-4)$

ప్రయత్నించండి

విలువలు కనుగొనండి: (a) $125 \div (-25)$ (b) $80 \div (-5)$ (c) $64 \div (-16)$

● చివరగా, మనం వీటిని గమనిస్తాం:

$$(-12) \div (-6) = 2; (-20) \div (-4) = 5; (-32) \div (-8) = 4; (-45) \div (-9) = 5$$

కావున, ఒక ఋణ పూర్ణ సంఖ్యను ఒక ఋణ పూర్ణ సంఖ్యతో భాగించినపుడు, వాటిని పూర్ణాంకాలుగా భాగించి, వచ్చిన భాగఫలం ముందు ధన గుర్తు (+) ను ఉంచాలి.

సాధారణంగా, ఏవైనా రెండు పూర్ణ సంఖ్యలు a మరియు b

$$(-a) \div (-b) = a \div b \quad \text{ఇక్కడ } b \neq 0$$



ప్రయత్నించండి

విలువలు కనుగొనండి: (a) $(-36) \div (-4)$ (b) $(-201) \div (-3)$ (c) $(-325) \div (-13)$

1.5 పూర్ణ సంఖ్యల భాగహార ధర్మాలు

కింది పట్టికను గమనించి దానిని పూర్తి చేయండి:

మీరు ఏమి గమనించారు? భాగహారం దృష్ట్యా సంవృత ధర్మాన్ని పాటించవని మనం గమనిస్తాం.



ప్రవచనం	సారాంశం	ప్రవచనం	సారాంశం
$(-8) \div (-4) = 2$	ఫలితం ఒక పూర్ణ సంఖ్య	$(-8) \div 3 = \frac{-8}{3}$	_____
$(-4) \div (-8) = \frac{-4}{-8}$	ఫలితం ఒక పూర్ణ సంఖ్య కాదు	$3 \div (-8) = \frac{3}{-8}$	_____

Justify it by taking five more examples of your own.

- We know that division is not commutative for whole numbers. Let us check it for integers also.

You can see from the table that $(-8) \div (-4) \neq (-4) \div (-8)$.

Is $(-9) \div 3$ the same as $3 \div (-9)$?

Is $(-30) \div (-6)$ the same as $(-6) \div (-30)$?

Can we say that division is commutative for integers? No.

You can verify it by taking five more pairs of integers.

- Like whole numbers, any integer divided by zero is meaningless and zero divided by an integer other than zero is equal to zero i.e., *for any integer a , $a \div 0$ is not defined but $0 \div a = 0$ for $a \neq 0$.*
- When we divide a whole number by 1 it gives the same whole number. Let us check whether it is true for negative integers also.

Observe the following :

$$(-8) \div 1 = (-8) \qquad (-11) \div 1 = -11 \qquad (-13) \div 1 = -13$$

$$(-25) \div 1 = \underline{\hspace{2cm}} \qquad (-37) \div 1 = \underline{\hspace{2cm}} \qquad (-48) \div 1 = \underline{\hspace{2cm}}$$

This shows that negative integer divided by 1 gives the same negative integer. So, *any integer divided by 1 gives the same integer.*

In general, for any integer a ,

$$a \div 1 = a$$

- What happens when we divide any integer by (-1) ? Complete the following table

$$(-8) \div (-1) = 8 \qquad 11 \div (-1) = -11 \qquad 13 \div (-1) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(-25) \div (-1) = \underline{\hspace{2cm}} \qquad (-37) \div (-1) = \underline{\hspace{2cm}} \qquad -48 \div (-1) = \underline{\hspace{2cm}}$$

What do you observe?

We can say that if any integer is divided by (-1) it does not give the same integer.

- Can we say $[(-16) \div 4] \div (-2)$ is the same as $(-16) \div [4 \div (-2)]$?

We know that $[(-16) \div 4] \div (-2) = (-4) \div (-2) = 2$

and $(-16) \div [4 \div (-2)] = (-16) \div (-2) = 8$

So $[(-16) \div 4] \div (-2) \neq (-16) \div [4 \div (-2)]$

Can you say that division is associative for integers? No.

Verify it by taking five more examples of your own.



TRY THESE

Is (i) $1 \div a = 1$?

(ii) $a \div (-1) = -a$? for any integer a .

Take different values of a and check.

మీ స్వంత ఐదు ఉదాహరణలను తీసుకోవడం ద్వారా దీనిని సరిచూడండి.

- పూర్ణాంకాలు భాగహారం దృష్ట్యా వినిమయ (స్థిత్యంతర) న్యాయాన్ని పాటించవని మనకు తెలుసు. పూర్ణ సంఖ్యలకు కూడా దీనిని సరిచూద్దాం.

పట్టిక నుండి, $(-8) \div (-4) \neq (-4) \div (-8)$ అని మనం గమనించవచ్చు.

$(-9) \div 3$ అనునది $3 \div (-9)$ కు సమానమా?

$(-30) \div (-6)$ అనునది $(-6) \div (-30)$ కు సమానమా?

పూర్ణ సంఖ్యలు భాగహారం దృష్ట్యా వినిమయ (స్థిత్యంతర) న్యాయాన్ని పాటిస్తాయని మనం చెప్పగలమా? చెప్పలేం. మరో ఐదు జతల పూర్ణ సంఖ్యలను తీసుకోవడం ద్వారా మీరు దీనిని సరిచూడవచ్చు.

- పూర్ణాంకాలవలె, ఒక పూర్ణ సంఖ్యను సున్నాతో భాగహారం చేయుట అర్థరహితం మరియు సున్నాను శూన్యేతర పూర్ణ సంఖ్య భాగహారం చేసిన, అది 0 కు సమానం. అనగా, ఏ పూర్ణ సంఖ్య a కైనా $a \div 0$ విలువ నిర్వచించబడదు. కానీ, $a \neq 0$ నకు $0 \div a = 0$.

- పూర్ణాంకాన్ని 1 తో భాగహారం చేసిన అదే పూర్ణాంకాన్ని ఇస్తుంది. ఋణ పూర్ణ సంఖ్యలకు కూడా ఇది నిజమేనా అని మనం ఇప్పుడు చూద్దాం.

కింది వాటిని పరిశీలించండి:

$$(-8) \div 1 = (-8)$$

$$(-11) \div 1 = -11$$

$$(-13) \div 1 = -13$$

$$(-25) \div 1 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(-37) \div 1 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(-48) \div 1 = \underline{\hspace{2cm}}$$

దీనిని బట్టి, ఒక ఋణ పూర్ణ సంఖ్యను 1 తో భాగహారం చేసిన అదే ఋణ పూర్ణ సంఖ్యను ఇస్తుంది. కావున, ఏదేని ఒక పూర్ణ సంఖ్యను 1 తో భాగహారం చేసిన అది ఒక పూర్ణ సంఖ్యను ఇస్తుంది.

సాధారణంగా, ఏదేని పూర్ణ సంఖ్య a కు,

$$a \div 1 = a$$

- ఏదైనా పూర్ణ సంఖ్యను (-1) తో భాగహారం చేసిన ఏమి జరుగుతుంది? కింది పట్టికను పూర్తి చేయండి

$$(-8) \div (-1) = 8$$

$$11 \div (-1) = -11$$

$$13 \div (-1) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(-25) \div (-1) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(-37) \div (-1) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$-48 \div (-1) = \underline{\hspace{2cm}}$$

మీరు ఏమి గమనించారు?

ఏదైనా పూర్ణ సంఖ్యను (-1) తో భాగహారం చేసినచో, అది పూర్ణ సంఖ్యను ఇవ్వదని మనం చెప్పవచ్చు.

- $[(-16) \div 4] \div (-2)$ మరియు $(-16) \div [4 \div (-2)]$ సమానమని మనం చెప్పగలమా?

$$[(-16) \div 4] \div (-2) = (-4) \div (-2) = 2 \text{ అని మనకు తెలుసు.}$$



ప్రయత్నించండి

(i) $1 \div a = 1$ అవుతుందా?

(ii) $a \div (-1) = -a$? ఏదేని పూర్ణ సంఖ్య a యొక్క వేరు వేరు విలువలను తీసుకోండి మరియు a ను సరిచూడండి.

మరియు $(-16) \div [4 \div (-2)] = (-16) \div (-2) = 8$

కావున, $[(-16) \div 4] \div (-2) \neq (-16) \div [4 \div (-2)]$

పూర్ణ సంఖ్యలు భాగహారం దృష్ట్యా సహచర న్యాయాన్ని పాటిస్తాయని మనం చెప్పవచ్చా? చెప్పలేం. మీ స్వంతంగా మరో ఐదు ఉదాహరణలను తీసుకోవడం ద్వారా దీనిని ధృవీకరించండి.

EXAMPLE 2 In a test (+5) marks are given for every correct answer and (−2) marks are given for every incorrect answer. (i) Radhika answered all the questions and scored 30 marks though she got 10 correct answers. (ii) Jay also answered all the questions and scored (−12) marks though he got 4 correct answers. How many incorrect answers had they attempted?

SOLUTION

- (i) Marks given for one correct answer = 5

So, marks given for 10 correct answers = $5 \times 10 = 50$

Radhika's score = 30

Marks obtained for incorrect answers = $30 - 50 = -20$

Marks given for one incorrect answer = (−2)

Therefore, number of incorrect answers = $(-20) \div (-2) = 10$

- (ii) Marks given for 4 correct answers = $5 \times 4 = 20$

Jay's score = −12

Marks obtained for incorrect answers = $-12 - 20 = -32$

Marks given for one incorrect answer = (−2)

Therefore number of incorrect answers = $(-32) \div (-2) = 16$



EXAMPLE 3 A shopkeeper earns a profit of ₹ 1 by selling one pen and incurs a loss of 40 paise per pencil while selling pencils of her old stock.

- (i) In a particular month she incurs a loss of ₹ 5. In this period, she sold 45 pens. How many pencils did she sell in this period?
- (ii) In the next month she earns neither profit nor loss. If she sold 70 pens, how many pencils did she sell?

SOLUTION

- (i) Profit earned by selling one pen = ₹ 1

Profit earned by selling 45 pens = ₹ 45, which we denote by +₹ 45

Total loss given = ₹ 5, which we denote by −₹ 5

Profit earned + Loss incurred = Total loss

Therefore, Loss incurred = Total Loss − Profit earned

= ₹ (−5 − 45) = ₹ (−50) = −5000 paise

Loss incurred by selling one pencil = 40 paise which we write as −40 paise

So, number of pencils sold = $(-5000) \div (-40) = 125$



పూర్ణ సంఖ్యలు

ఉదాహరణ 2

ఒక పరీక్షలో, ప్రతి సరైన సమాధానానికి (+5) మార్కులు, మరియు ప్రతి తప్పు సమాధానానికి (-2) మార్కులు ఇవ్వబడతాయి. (i) రాధిక అన్ని ప్రశ్నలకు సమాధానాలు రాయగా, 10 సరైనవి మరియు ఆమె 30 మార్కులు పొందింది. (ii) జై కూడా అన్ని ప్రశ్నలకు సమాధానాలు రాయగా, 4 సరైనవి మరియు అతను (-12) మార్కులు పొందాడు. వారు రాసిన తప్పు సమాధానాలు ఎన్ని?

సాధన

- (i) ఒక సరైన సమాధానానికి ఇవ్వబడ్డ మార్కులు = 5
కావున, 10 సరైన సమాధానాలకు మార్కులు = $5 \times 10 = 50$
రాధిక మార్కులు = 30
తప్పు సమాధానాలకు ఇవ్వబడిన మార్కులు = $30 - 50 = -20$
ఒక తప్పు సమాధానానికి ఇవ్వబడ్డ మార్కులు = (-2)
కాబట్టి, రాధిక రాసిన తప్పు సమాధానాలు = $(-20) \div (-2) = 10$
- (ii) 4 సరైన సమాధానాలకు ఇవ్వబడ్డ మార్కులు = $5 \times 4 = 20$
జై మార్కులు = -12
తప్పు సమాధానాలకు ఇవ్వబడిన మార్కులు = $-12 - 20 = -32$
ఒక తప్పు సమాధానానికి ఇవ్వబడ్డ మార్కులు = (-2)
కాబట్టి, జై రాసిన తప్పు సమాధానాలు = $(-32) \div (-2) = 16$



ఉదాహరణ 3

ఒక దుకాణదారురాలు ఒక పెన్నును అమ్మడం ద్వారా ₹ 1 లాభాన్ని సంపాదిస్తుంది. మరియు ఆమె పాత స్టాక్ పెన్సిళ్లను అమ్మేటప్పుడు ప్రతి పెన్సిల్ కు 40 పైసలు నష్టం వాటిల్లింది.

- (i) ఒక నిర్దిష్ట నెలలో ఆమెకు ₹5 నష్టం వచ్చింది. ఈ కాలంలో, ఆమె 45 పెన్నులను అమ్మింది. ఈ కాలంలో ఆమె ఎన్ని పెన్సిళ్లు అమ్మింది?
- (ii) మరుసటి నెలలో ఆమె లాభం గానీ నష్టం గానీ పొందలేదు. ఒకవేళ ఆమె 70 పెన్నులను అమ్మినట్లయితే, ఆమె ఎన్ని పెన్సిళ్లను అమ్మింది?

సాధన

- (i) ఒక పెన్ను అమ్మడం ద్వారా పొందిన లాభం = ₹ 1
45 పెన్నులు అమ్మడం ద్వారా పొందిన లాభం = ₹ 45, దీనిని మనం + ₹ 45 తో సూచిస్తాం.
ఇవ్వబడ్డ మొత్తం నష్టం = ₹ 5, దీనిని మనం - ₹ 5 తో సూచిస్తాం.
సంపాదించిన లాభం + కలిగిన నష్టం = మొత్తం నష్టం
కాబట్టి, కలిగిన నష్టం = మొత్తం నష్టం - సంపాదించిన లాభం
= ₹ (-5 - 45) = ₹ (-50) = -5000 పైసలు
ఒక పెన్సిల్ అమ్మడం ద్వారా కలిగే నష్టం = 40 పైసలు, దీనిని మనం -40 ద్వారా సూచిస్తాం.
కావున, అమ్మిన పెన్సిళ్ల సంఖ్య = $(-5000) \div (-40) = 125$



- (ii) In the next month there is neither profit nor loss.

So, Profit earned + Loss incurred = 0

i.e., Profit earned = - Loss incurred.

Now, profit earned by selling 70 pens = ₹ 70

Hence, loss incurred by selling pencils = ₹ 70 which we indicate by - ₹ 70 or -7,000 paise.

Total number of pencils sold = $(-7000) \div (-40) = 175$ pencils.

EXERCISE 1.3

1. Evaluate each of the following:

(a) $(-30) \div 10$ (b) $50 \div (-5)$ (c) $(-36) \div (-9)$

(d) $(-49) \div (49)$ (e) $13 \div [(-2) + 1]$ (f) $0 \div (-12)$

(g) $(-31) \div [(-30) + (-1)]$

(h) $[(-36) \div 12] \div 3$ (i) $[(-6) + 5] \div [(-2) + 1]$

2. Verify that $a \div (b + c) \neq (a \div b) + (a \div c)$ for each of the following values of a, b and c .

(a) $a = 12, b = -4, c = 2$

(b) $a = (-10), b = 1, c = 1$

3. Fill in the blanks:

(a) $369 \div \underline{\hspace{2cm}} = 369$

(b) $(-75) \div \underline{\hspace{2cm}} = -1$

(c) $(-206) \div \underline{\hspace{2cm}} = 1$

(d) $-87 \div \underline{\hspace{2cm}} = 87$

(e) $\underline{\hspace{2cm}} \div 1 = -87$

(f) $\underline{\hspace{2cm}} \div 48 = -1$

(g) $20 \div \underline{\hspace{2cm}} = -2$

(h) $\underline{\hspace{2cm}} \div (4) = -3$

4. Write five pairs of integers (a, b) such that $a \div b = -3$. One such pair is $(6, -2)$ because $6 \div (-2) = (-3)$.

5. The temperature at 12 noon was 10°C above zero. If it decreases at the rate of 2°C per hour until midnight, at what time would the temperature be 8°C below zero? What would be the temperature at mid-night?

6. In a class test (+ 3) marks are given for every correct answer and (-2) marks are given for every incorrect answer and no marks for not attempting any question. (i) Radhika scored 20 marks. If she has got 12 correct answers, how many questions has she attempted incorrectly? (ii) Mohini scores -5 marks in this test, though she has got 7 correct answers. How many questions has she attempted incorrectly?



7. An elevator descends into a mine shaft at the rate of 6 m/min. If the descent starts from 10 m above the ground level, how long will it take to reach -350 m.

(ii) మరుసటి నెలలో లాభం గానీ నష్టం గానీ లేదు.

కావున, సంపాదించిన లాభం + కలిగిన నష్టం = 0

అనగా, సంపాదించిన లాభం = - జరిగిన నష్టం.

ఇప్పుడు, 70 పెన్నులు అమ్మడం ద్వారా లాభం = ₹ 70

అందువల్ల, పెన్సిళ్లు అమ్మడం వల్ల కలిగిన నష్టం = ₹ 70 దీనిని మనం - ₹ 70 లేదా - 7,000 పైసలు ద్వారా సూచిస్తాం.

విక్రయించిన మొత్తం పెన్సిళ్ల సంఖ్య = $(-7000) \div (-40) = 175$ పెన్సిళ్లు.

అభ్యాసం 1. 3

1. కింది వాటిని లెక్కించండి:

- (a) $(-30) \div 10$ (b) $50 \div (-5)$ (c) $(-36) \div (-9)$
 (d) $(-49) \div (49)$ (e) $13 \div [(-2) + 1]$ (f) $0 \div (-12)$
 (g) $(-31) \div [(-30) + (-1)]$
 (h) $[(-36) \div 12] \div 3$ (i) $[(-6) + 5] \div [(-2) + 1]$

2. కింది a, b మరియు c విలువలకు $a \div (b + c) \neq (a \div b) + (a \div c)$ ను సరిచూడండి.

- (a) $a = 12, b = -4, c = 2$ (b) $a = (-10), b = 1, c = 1$

3. ఖాళీలు పూరించండి:

- (a) $369 \div \underline{\hspace{2cm}} = 369$ (b) $(-75) \div \underline{\hspace{2cm}} = -1$
 (c) $(-206) \div \underline{\hspace{2cm}} = 1$ (d) $-87 \div \underline{\hspace{2cm}} = 87$
 (e) $\underline{\hspace{2cm}} \div 1 = -87$ (f) $\underline{\hspace{2cm}} \div 48 = -1$
 (g) $20 \div \underline{\hspace{2cm}} = -2$ (h) $\underline{\hspace{2cm}} \div (4) = -3$

4. $a \div b = -3$ అగునట్లు 5 పూర్ణ సంఖ్యల జతలు (a, b) రాయండి. (ఉదాహరణ: $(6, -2)$ ఎందుకంటే $6 \div (-2) = (-3)$).

5. మధ్యాహ్నం 12 గంటల సమయంలో ఉష్ణోగ్రత 10°C అని గుర్తించబడింది. ఉష్ణోగ్రత ప్రతి గంటకు 2°C చొప్పున తగ్గుతూ ఉన్నచో, ఎన్ని గంటల సమయంలో ఉష్ణోగ్రత 0°C కన్నా 8°C తక్కువగా ఉంటుంది? అర్ధరాత్రి 12 గంటల సమయంలో ఉష్ణోగ్రత ఎంత ఉంటుంది?

6. ఒక పరీక్షలో, ప్రతి సరైన సమాధానానికి $(+3)$ మార్కులు, మరియు ప్రతి తప్పుకు (-2) మార్కులు మరియు సమాధానం రాయని వాటికి 0 మార్కులు ఇవ్వబడతాయి. (i) రాధిక 20 మార్కులు పొందింది. ఆమె 12 సరైన సమాధానాలు రాసినచో, ఎన్ని ప్రశ్నలకు తప్పు సమాధానాలు రాసింది? (ii) మోహిని -5 మార్కులు పొందింది. ఆమె 7 సరైన సమాధానాలు రాసినచో, ఎన్ని ప్రశ్నలకు తప్పు సమాధానాలు రాసింది.

7. ఒక ఎలివేటర్, గనిలోనికి నిమిషానికి 6 మీ. వేగంతో దిగుతుంది. అది నేలమట్టం నుండి 10మీ. పైనుండి దిగుచున్నచో, -350 మీ.ను చేరుటకు ఎంత సమయం పడుతుంది.



WHAT HAVE WE DISCUSSED?

1. We now study the properties satisfied by addition and subtraction.
 - (a) Integers are closed for addition and subtraction both. That is, $a + b$ and $a - b$ are again integers, where a and b are any integers.
 - (b) Addition is commutative for integers, i.e., $a + b = b + a$ for all integers a and b .
 - (c) Addition is associative for integers, i.e., $(a + b) + c = a + (b + c)$ for all integers a , b and c .
 - (d) Integer 0 is the identity under addition. That is, $a + 0 = 0 + a = a$ for every integer a .
2. We studied, how integers could be multiplied, and found that product of a positive and a negative integer is a negative integer, whereas the product of two negative integers is a positive integer. For example, $-2 \times 7 = -14$ and $-3 \times -8 = 24$.
3. Product of even number of negative integers is positive, whereas the product of odd number of negative integers is negative.
4. Integers show some properties under multiplication.
 - (a) Integers are closed under multiplication. That is, $a \times b$ is an integer for any two integers a and b .
 - (b) Multiplication is commutative for integers. That is, $a \times b = b \times a$ for any integers a and b .
 - (c) The integer 1 is the identity under multiplication, i.e., $1 \times a = a \times 1 = a$ for any integer a .
 - (d) Multiplication is associative for integers, i.e., $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ for any three integers a , b and c .
5. Under addition and multiplication, integers show a property called distributive property. That is, $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ for any three integers a , b and c .
6. The properties of commutativity, associativity under addition and multiplication, and the distributive property help us to make our calculations easier.
7. We also learnt how to divide integers. We found that,
 - (a) When a positive integer is divided by a negative integer, the quotient obtained is negative and vice-versa.
 - (b) Division of a negative integer by another negative integer gives positive as quotient.
8. For any integer a , we have
 - (a) $a \div 0$ is not defined
 - (b) $a \div 1 = a$



మనం ఏమి చర్చించాం?

- ఇప్పుడు మనం సంకలనం మరియు వ్యవకలన ధర్మాల గురించి తెలుసుకున్నాం.
 - అనగా, a మరియు b లు ఏవైనా రెండు పూర్ణ సంఖ్యలు అయిన $a + b$ మరియు $a - b$ కూడా పూర్ణ సంఖ్యలు అవుతాయి.
 - పూర్ణ సంఖ్యలు సంకలనం దృష్ట్యా వినిమయ(స్థిత్యంతర) న్యాయం పాటిస్తాయి. అనగా, a మరియు b లు ఏవైనా రెండు పూర్ణ సంఖ్యలైన, $a + b = b + a$
 - పూర్ణ సంఖ్యలు సంకలనం దృష్ట్యా సహచర న్యాయం పాటిస్తాయి, అనగా, a, b మరియు c లు మూడు పూర్ణ సంఖ్యలైన, $(a + b) + c = a + (b + c)$
 - పూర్ణ సంఖ్యలకు సంకలన తత్వమాంశం '0'. అనగా, a ఏదేని పూర్ణ సంఖ్య అయిన, $a + 0 = 0 + a = a$.
- పూర్ణ సంఖ్యలను ఎలా గుణకారం చేయాలో తెలుసుకున్నాం. ఒక ధన మరియు ఒక ఋణ పూర్ణ సంఖ్యల లబ్ధం ఒక ఋణ పూర్ణ సంఖ్య అవుతుంది. రెండు ఋణ పూర్ణ సంఖ్యల లబ్ధం ఎల్లప్పుడూ ధన పూర్ణ సంఖ్య అవుతుంది. ఉదాహరణకు, $-2 \times 7 = -14$ మరియు $-3 \times -8 = 24$.
- గుణకారాలలో ఋణ పూర్ణ సంఖ్యల సంఖ్య, సరి సంఖ్య అయితే లబ్ధం ధన పూర్ణ సంఖ్య, అలాగే ఋణ పూర్ణ సంఖ్యల సంఖ్య బేసి సంఖ్య అయితే లబ్ధం ఋణ పూర్ణ సంఖ్య అవుతుంది.
- పూర్ణ సంఖ్యలు గుణకారం దృష్ట్యా కింది ధర్మాలను పాటిస్తాయి.
 - పూర్ణ సంఖ్యలు గుణకారం దృష్ట్యా సంవృత ధర్మాన్ని పాటిస్తాయి. అనగా, a మరియు b లు ఏవైనా రెండు పూర్ణ సంఖ్యలైన $a \times b$ పూర్ణ సంఖ్య అవుతుంది.
 - పూర్ణ సంఖ్యలు గుణకారం దృష్ట్యా వినిమయ (స్థిత్యంతర) న్యాయముపాటిస్తాయి. అనగా, a మరియు b లు ఏవైనా రెండు పూర్ణ సంఖ్యలైన $a \times b = b \times a$.
 - పూర్ణ సంఖ్యలకు గుణకార తత్వమాంశము '1'. అనగా, a ఏవైనా రెండు పూర్ణ సంఖ్యలైన $1 \times a = a \times 1 = a$.
 - పూర్ణ సంఖ్యలు గుణకారం దృష్ట్యా సహచర న్యాయం పాటిస్తాయి. అనగా, a, b మరియు c లు మూడు పూర్ణ సంఖ్యలైన, $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$.
- పూర్ణ సంఖ్యలలో గుణకారం సంకలనం పై విభాగ న్యాయాన్ని పాటిస్తుంది అనగా, a, b మరియు c లు మూడు పూర్ణ సంఖ్యలైన, $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$.
- సంకలనం మరియు గుణకారం దృష్ట్యా వినిమయ, సహచర ధర్మాలు మరియు విభాగ న్యాయాలు గణనలు సులభంగా చేయడానికి ఉపయోగపడతాయి.
- పూర్ణ సంఖ్యలను ఎలా భాగహారం చేయాలో కూడా తెలుసుకున్నాం. మనం నేర్చున్నవి:
 - ధన పూర్ణ సంఖ్యను ఋణ పూర్ణ సంఖ్యతో భాగించిన భాగఫలం ఋణాత్మకం. అలాగే, ఋణ పూర్ణ సంఖ్యను ధన పూర్ణ సంఖ్యతో భాగించిన భాగఫలం ఋణాత్మకం.
 - ఋణ పూర్ణ సంఖ్యను ఋణ పూర్ణ సంఖ్యతో భాగించిన భాగఫలం ధనాత్మకం.
- సాధారణంగా, a పూర్ణ సంఖ్య అయిన,
 - $a \div 0$ నిర్వచించబడదు.
 - $a \div 1 = a$



Fractions and Decimals



2.1 MULTIPLICATION OF FRACTIONS

You know how to find the area of a rectangle. It is equal to length \times breadth. If the length and breadth of a rectangle are 7 cm and 4 cm respectively, then what will be its area? Its area would be $7 \times 4 = 28 \text{ cm}^2$.

What will be the area of the rectangle if its length and breadth are $7\frac{1}{2}$ cm and

$3\frac{1}{2}$ cm respectively? You will say it will be $7\frac{1}{2} \times 3\frac{1}{2} = \frac{15}{2} \times \frac{7}{2} \text{ cm}^2$. The numbers $\frac{15}{2}$

and $\frac{7}{2}$ are fractions. To calculate the area of the given rectangle, we need to know how to multiply fractions. We shall learn that now.

2.1.1 Multiplication of a Fraction by a Whole Number

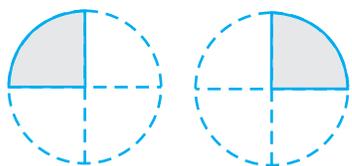


Fig 2.1

Observe the pictures at the left (Fig 2.1). Each shaded part is $\frac{1}{4}$ part of a circle. How much will the two shaded parts represent together?

They will represent $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 2 \times \frac{1}{4}$.

Combining the two shaded parts, we get Fig 2.2. What part of a circle does the shaded part in Fig 2.2 represent? It represents $\frac{2}{4}$ part of a circle.



Fig 2.2

భిన్నాలు మరియు దశాంశాలు



అధ్యాయం - 2

2.1 భిన్నాల గుణకారం

దీర్ఘ చతురస్ర వైశాల్యం ఎలా కనుక్కోవాలో మీకు తెలుసు. ఇది పొడవు \times వెడల్పుకు సమానం. దీర్ఘ చతురస్రం యొక్క పొడవు మరియు వెడల్పులు క్రమంగా 7సెం.మీ. మరియు 4సెం.మీ అయితే దాని వైశాల్యం ఎంత? దాని వైశాల్యం $7 \times 4 = 28$ సెం.మీ² అవుతుంది.

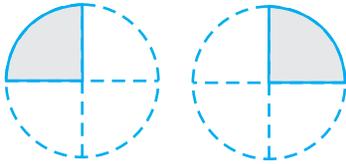
పొడవు మరియు వెడల్పులు క్రమంగా $7\frac{1}{2}$ సెం.మీ. మరియు $3\frac{1}{2}$ సెం.మీ. అయితే దీర్ఘ

చతురస్ర వైశాల్యం ఎంత? $7\frac{1}{2} \times 3\frac{1}{2} = \frac{15}{2} \times \frac{7}{2}$ సెం.మీ². అని మీరు చెప్పగలరు. $\frac{15}{2}$ మరియు

$\frac{7}{2}$ అనేవి భిన్నాలు. ఇవ్వబడిన దీర్ఘచతురస్రం వైశాల్యం కనుక్కోవాలంటే భిన్నాల గుణకారం మీరు తెలుసుకోవడం అవసరం. మనం ఇప్పుడు అది నేర్చుకుందాం.

2.1.1 భిన్నాన్ని పూర్ణాంకం చేత గుణించడం

ఎడమవైపు ఉన్న చిత్రాన్ని గమనించండి (పటం 2.1). షేడ్ చేసిన ప్రతి భాగం



వృత్తంలో $\frac{1}{4}$ వ వంతు. షేడ్ చేసిన రెండు భాగాల మొత్తం దేన్ని సూచిస్తుంది?

అవి $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 2 \times \frac{1}{4}$ అని సూచిస్తాయి.

పటం 2.1

షేడ్ చేసిన రెండు భాగాలను కలిపిన, పటం 2.2 పొందుతాం. పటం 2.2 లో షేడ్ చేసిన భాగం

వృత్తంలో ఏ భాగాన్ని సూచిస్తుంది? వృత్తంలో $\frac{2}{4}$ వ భాగాన్ని సూచిస్తుంది.



పటం 2.2

The shaded portions in Fig 2.1 taken together are the same as the shaded portion in Fig 2.2, i.e., we get Fig 2.3.



Fig 2.3

or $2 \times \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$.

Can you now tell what this picture will represent? (Fig 2.4)

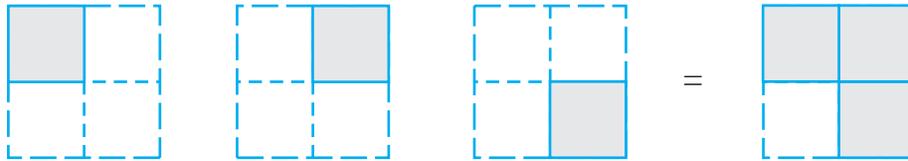


Fig 2.4

And this? (Fig 2.5)

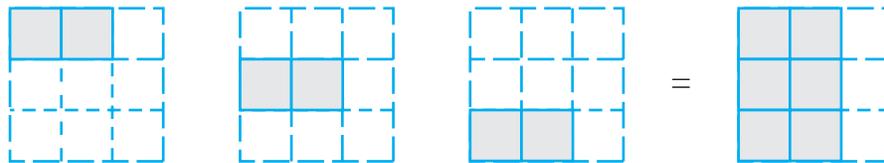


Fig 2.5

Let us now find $3 \times \frac{1}{2}$.

We have $3 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

We also have $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1+1+1}{2} = \frac{3 \times 1}{2} = \frac{3}{2}$

So $3 \times \frac{1}{2} = \frac{3 \times 1}{2} = \frac{3}{2}$

Similarly $\frac{2}{3} \times 5 = \frac{2 \times 5}{3} = ?$

Can you tell $3 \times \frac{2}{7} = ?$ $4 \times \frac{3}{5} = ?$

The fractions that we considered till now, i.e., $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{7}$ and $\frac{3}{5}$ were proper fractions.

పటం 2.1 లో షేడ్ చేసిన భాగాలను కలిపి తీసుకున్న అది పటం 2.2 లో షేడ్ చేసిన భాగానికి సమానం అంటే పటం 2.3 పొందుతాం.



పటం 2.3

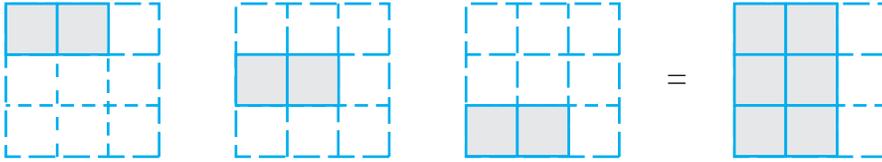
లేదా $2 \times \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$.

ఈ చిత్రం దేనిని సూచిస్తుందో చెప్పగలరా? (పటం 2.4)



పటం 2.4

మరియు ఇది? (పటం 2.5)



పటం 2.5

ఇప్పుడు $3 \times \frac{1}{2}$ కనుక్కుదాం.

మనకు $3 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

మనకు $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1+1+1}{2} = \frac{3 \times 1}{2} = \frac{3}{2}$

కాబట్టి $3 \times \frac{1}{2} = \frac{3 \times 1}{2} = \frac{3}{2}$

అదేవిధంగా $\frac{2}{3} \times 5 = \frac{2 \times 5}{3} = ?$

మీరు చెప్పగలరా $3 \times \frac{2}{7} = ?$ $4 \times \frac{3}{5} = ?$

ఇప్పటి వరకు పరిగణించిన భిన్నాలు, అనగా $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{7}$ మరియు $\frac{3}{5}$ క్రమభిన్నాలు.

For improper fractions also we have,

$$2 \times \frac{5}{3} = \frac{2 \times 5}{3} = \frac{10}{3}$$

Try, $3 \times \frac{8}{7} = ?$ $4 \times \frac{7}{5} = ?$

Thus, to multiply a whole number with a proper or an improper fraction, we multiply the whole number with the numerator of the fraction, keeping the denominator same.

TRY THESE



1. Find: (a) $\frac{2}{7} \times 3$ (b) $\frac{9}{7} \times 6$ (c) $3 \times \frac{1}{8}$ (d) $\frac{13}{11} \times 6$

If the product is an improper fraction express it as a mixed fraction.

2. Represent pictorially: $2 \times \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$

TRY THESE

Find: (i) $5 \times 2\frac{3}{7}$

(ii) $1\frac{4}{9} \times 6$



To multiply a mixed fraction to a whole number, first convert the mixed fraction to an improper fraction and then multiply.

Therefore, $3 \times 2\frac{5}{7} = 3 \times \frac{19}{7} = \frac{57}{7} = 8\frac{1}{7}$.

Similarly, $2 \times 4\frac{2}{5} = 2 \times \frac{22}{5} = ?$



Fraction as an operator 'of'

Observe these figures (Fig 2.6)

The two squares are exactly similar.

Each shaded portion represents $\frac{1}{2}$ of 1.

So, both the shaded portions together will represent $\frac{1}{2}$ of 2.

Combine the 2 shaded $\frac{1}{2}$ parts. It represents 1.

So, we say $\frac{1}{2}$ of 2 is 1. We can also get it as $\frac{1}{2} \times 2 = 1$.

Thus, $\frac{1}{2}$ of 2 = $\frac{1}{2} \times 2 = 1$

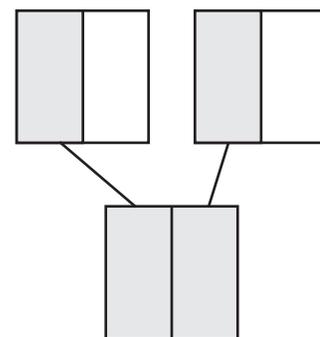


Fig 2.6

అపక్రమ భిన్నాల కోసం కూడా మనం

$$2 \times \frac{5}{3} = \frac{2 \times 5}{3} = \frac{10}{3} \text{ కలిగి ఉన్నాం.}$$

ప్రయత్నించండి,

$$3 \times \frac{8}{7} = ? \quad 4 \times \frac{7}{5} = ?$$

ఒక పూర్ణాంకను క్రమ లేదా అపక్రమ భిన్నంతో గుణించడానికి హారాన్ని అలాగే ఉంచి పూర్ణాంకాన్ని లవంతో గుణిస్తాం.

ప్రయత్నించండి



1. (a) $\frac{2}{7} \times 3$ (b) $\frac{9}{7} \times 6$ (c) $3 \times \frac{1}{8}$ (d) $\frac{13}{11} \times 6$

ఒకవేళ లబ్ధం అపక్రమ భిన్నమైతే దానిని మిశ్రమ భిన్నంగా కనుక్కోండి.

2. పట రూపంలో ప్రదర్శించండి : $2 \times \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$

ప్రయత్నించండి

కనుక్కోండి: (i) $5 \times 2\frac{3}{7}$

కాబట్టి, $3 \times 2\frac{5}{7} = 3 \times \frac{19}{7} = \frac{57}{7} = 8\frac{1}{7}$.

(ii) $1\frac{4}{9} \times 6$

అదేవిధంగా $2 \times 4\frac{2}{5} = 2 \times \frac{22}{5} = ?$



‘లో’ ప్రక్రియగా భిన్నం

ఈ పటాలను గమనించండి (పటం 2.6)
రెండు చతురస్రాలు ఖచ్చితంగా సర్వ సమానాలు.

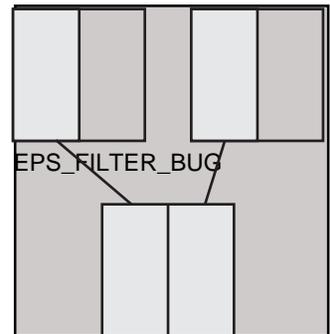
షేడ్ చేసిన ప్రతి భాగం 1 లో $\frac{1}{2}$

కాబట్టి, షేడ్ చేసిన రెండు భాగాలు కలిపి 2 లో $\frac{1}{2}$ గా సూచిస్తాయి.

షేడ్ చేసిన రెండు $\frac{1}{2}$ భాగాలను కలపగా అవి 1 ని సూచిస్తాయి.

కాబట్టి, 2లో $\frac{1}{2}$ అంటే 1 అని అంటాం. దీన్ని $\frac{1}{2} \times 2 = 1$ గా కూడా చెప్పవచ్చు.

ఈవిధంగా, 2 లో $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 2 = 1$



పటం 2.6

Also, look at these similar squares (Fig 2.7).

Each shaded portion represents $\frac{1}{2}$ of 1.

So, the three shaded portions represent $\frac{1}{2}$ of 3.

Combine the 3 shaded parts.

It represents $1\frac{1}{2}$ i.e., $\frac{3}{2}$.

So, $\frac{1}{2}$ of 3 is $\frac{3}{2}$. Also, $\frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}$.

Thus, $\frac{1}{2}$ of 3 = $\frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}$.

So we see that ‘of’ represents multiplication.

Farida has 20 marbles. Reshma has $\frac{1}{5}$ th of the number of marbles what Farida has. How many marbles Reshma has? As, ‘of’ indicates multiplication, so, Reshma has $\frac{1}{5} \times 20 = 4$ marbles.

Similarly, we have $\frac{1}{2}$ of 16 is $\frac{1}{2} \times 16 = \frac{16}{2} = 8$.

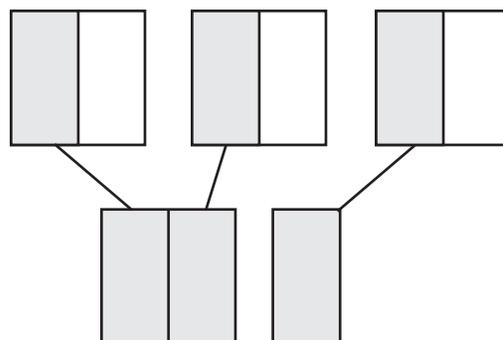


Fig 2.7



TRY THESE

Can you tell, what is (i) $\frac{1}{2}$ of 10?, (ii) $\frac{1}{4}$ of 16?, (iii) $\frac{2}{5}$ of 25?

EXAMPLE 1 In a class of 40 students $\frac{1}{5}$ of the total number of students like to study

English, $\frac{2}{5}$ of the total number like to study Mathematics and the remaining students like to study Science.

- How many students like to study English?
- How many students like to study Mathematics?
- What fraction of the total number of students like to study Science?

SOLUTION Total number of students in the class = 40.

- Of these $\frac{1}{5}$ of the total number of students like to study English.



భిన్నాలు మలయోదశాంశాలు

ఈ సరూప చతురస్రాలను చూడండి (పటం 2.7).

షేడ్ చేసిన ప్రతి భాగం 1 లో $\frac{1}{2}$ వ భాగంగా సూచిస్తుంది.

కాబట్టి, షేడ్ చేసిన మూడు భాగాలు 3 లో $\frac{1}{2}$ వ భాగంగా సూచిస్తుంది.

షేడ్ చేసిన 3 భాగాలను కలపండి.

అది $1\frac{1}{2}$ అంటే $\frac{3}{2}$ ను సూచిస్తుంది.

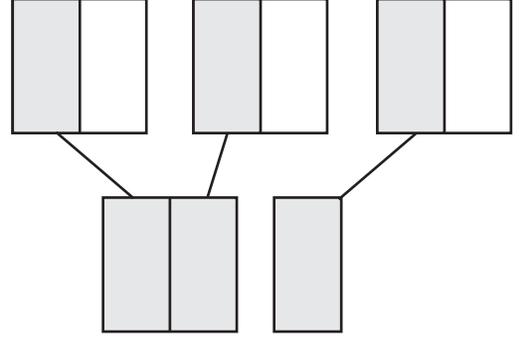
కాబట్టి 3లో $\frac{1}{2}$ అనగా $\frac{3}{2}$ ఇంకా $= \frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}$

అందువల్ల 3లో $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}$

కాబట్టి 'లో' అనేది గుణకారాన్ని సూచిస్తుందని మనం చూడవచ్చు

ఫరీదా 20 గోళీలను కలిగి ఉంది. ఫరీదా వద్ద గల గోళీలలో $\frac{1}{5}$ వ భాగం రేషు కలిగి ఉంది. రేషు ఎన్ని గోళీలు కలిగి ఉంది? 'లో' అనేది గుణకారాన్ని సూచిస్తుంది, కాబట్టి రేషు $\frac{1}{5} \times 20 = 4$ గోళీలు కలిగి ఉంటుంది.

ఇదేవిధంగా, 16 లో $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 16 = \frac{16}{2} = 8$.



పటం 2.7



ప్రయత్నించండి

(i) 10 లో $\frac{1}{2}$?, (ii) 16 లో $\frac{1}{4}$?, (iii) 25 లో $\frac{2}{5}$? ఎంతో చెప్పగలరా?



ఉదాహరణ 1 ఒక తరగతిలో 40 మంది విద్యార్థులు ఉన్నారు. మొత్తం విద్యార్థుల సంఖ్యలో $\frac{1}{5}$ వ వంతు

ఇంగ్లీష్ చదవడానికి ఇష్టపడతారు. మొత్తం సంఖ్యలో $\frac{2}{5}$ వ వంతు గణితాన్ని చదవడానికి

ఇష్టపడతారు మరియు మిగిలిన విద్యార్థులు సైన్స్ చదవడానికి ఇష్టపడతారు.

- ఎంత మంది విద్యార్థులు ఇంగ్లీషు చదవడానికి ఇష్టపడుతున్నారు?
- ఎంత మంది విద్యార్థులు గణితాన్ని చదవడానికి ఇష్టపడుతున్నారు?
- మొత్తం విద్యార్థుల సంఖ్యలో ఎంత భాగం సైన్స్ చదవడానికి ఇష్టపడుతున్నారు?

సాధన

తరగతిలోని మొత్తం విద్యార్థుల సంఖ్య = 40.

- వీటిలో మొత్తం విద్యార్థుల సంఖ్యలో $\frac{1}{5}$ వ వంతు ఇంగ్లీష్ చదవడానికి ఇష్టపడతారు.

Thus, the number of students who like to study English = $\frac{1}{5}$ of 40 = $\frac{1}{5} \times 40 = 8$.

- (ii) Try yourself.
 (iii) The number of students who like English and Mathematics = $8 + 16 = 24$. Thus, the number of students who like Science = $40 - 24 = 16$.

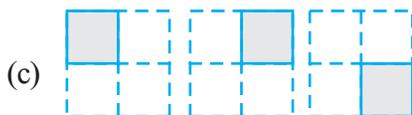
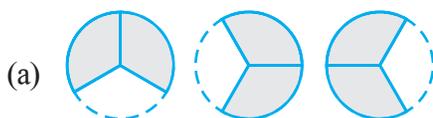
Thus, the required fraction is $\frac{16}{40}$.

EXERCISE 2.1

1. Which of the drawings (a) to (d) show :

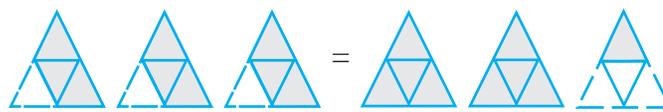
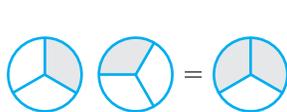


- (i) $2 \times \frac{1}{5}$ (ii) $2 \times \frac{1}{2}$ (iii) $3 \times \frac{2}{3}$ (iv) $3 \times \frac{1}{4}$



2. Some pictures (a) to (c) are given below. Tell which of them show:

- (i) $3 \times \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$ (ii) $2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ (iii) $3 \times \frac{3}{4} = 2\frac{1}{4}$



(a)

(b)



(c)

3. Multiply and reduce to lowest form and convert into a mixed fraction:

- (i) $7 \times \frac{3}{5}$ (ii) $4 \times \frac{1}{3}$ (iii) $2 \times \frac{6}{7}$ (iv) $5 \times \frac{2}{9}$ (v) $\frac{2}{3} \times 4$
 (vi) $\frac{5}{2} \times 6$ (vii) $11 \times \frac{4}{7}$ (viii) $20 \times \frac{4}{5}$ (ix) $13 \times \frac{1}{3}$ (x) $15 \times \frac{3}{5}$

కాబట్టి ఇంగ్లీష్ చదవడానికి ఇష్టపడే విద్యార్థుల సంఖ్య = 40 లో $\frac{1}{5} = \frac{1}{5} \times 40 = 8$.

(ii) సొంతంగా ప్రయత్నించండి .

(iii) ఇంగ్లీష్ మరియు గణితం చదవడానికి ఇష్టపడే విద్యార్థుల సంఖ్య = 8 + 16 = 24. కావున సైన్స్ చదవడానికి ఇష్టపడే విద్యార్థుల సంఖ్య = 40 - 24 = 16.

కాబట్టి, కావలసిన భిన్నం $\frac{16}{40}$.

అభ్యాసం 1.2

1. కింది పటాలలో (a) నుండి (d) వరకు ఏ భిన్నాన్ని సూచిస్తుంది.

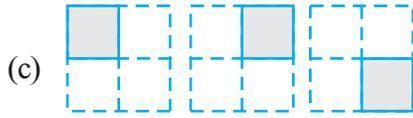
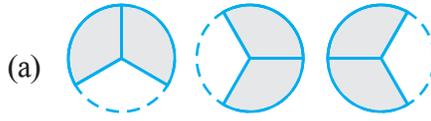


(i) $2 \times \frac{1}{5}$

(ii) $2 \times \frac{1}{2}$

(iii) $3 \times \frac{2}{3}$

(iv) $3 \times \frac{1}{4}$



2. కొన్ని పటాలు (a) నుండి (c) వరకు ఇవ్వబడ్డాయి. వాటిలో ఏది ఏ భిన్నాన్ని చూపుతుందో చెప్పండి:

(i) $3 \times \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$

(ii) $2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

(iii) $3 \times \frac{3}{4} = 2 \frac{1}{4}$



(a)



(b)



(c)

3. కింది వాటిని గుణించండి మరియు సూక్ష్మరూపంలో రాయండి. మరియు మిత్రమ భిన్నంలోకి మార్చండి.

(i) $7 \times \frac{3}{5}$

(ii) $4 \times \frac{1}{3}$

(iii) $2 \times \frac{6}{7}$

(iv) $5 \times \frac{2}{9}$

(v) $\frac{2}{3} \times 4$

(vi) $\frac{5}{2} \times 6$

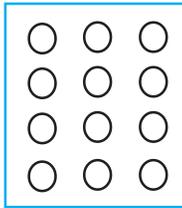
(vii) $11 \times \frac{4}{7}$

(viii) $20 \times \frac{4}{5}$

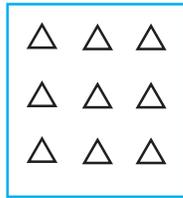
(ix) $13 \times \frac{1}{3}$

(x) $15 \times \frac{3}{5}$

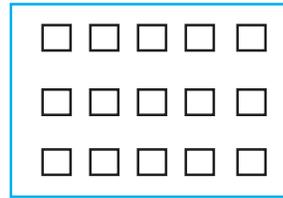
4. Shade: (i) $\frac{1}{2}$ of the circles in box (a) (ii) $\frac{2}{3}$ of the triangles in box (b)
 (iii) $\frac{3}{5}$ of the squares in box (c).



(a)



(b)



(c)

5. Find:

(a) $\frac{1}{2}$ of (i) 24 (ii) 46 (b) $\frac{2}{3}$ of (i) 18 (ii) 27

(c) $\frac{3}{4}$ of (i) 16 (ii) 36 (d) $\frac{4}{5}$ of (i) 20 (ii) 35

6. Multiply and express as a mixed fraction :

(a) $3 \times 5\frac{1}{5}$ (b) $5 \times 6\frac{3}{4}$ (c) $7 \times 2\frac{1}{4}$

(d) $4 \times 6\frac{1}{3}$ (e) $3\frac{1}{4} \times 6$ (f) $3\frac{2}{5} \times 8$

7. Find: (a) $\frac{1}{2}$ of (i) $2\frac{3}{4}$ (ii) $4\frac{2}{9}$ (b) $\frac{5}{8}$ of (i) $3\frac{5}{6}$ (ii) $9\frac{2}{3}$

8. Vidya and Pratap went for a picnic. Their mother gave them a water bottle that contained 5 litres of water. Vidya consumed $\frac{2}{5}$ of the water. Pratap consumed the remaining water.

- (i) How much water did Vidya drink?
 (ii) What fraction of the total quantity of water did Pratap drink?

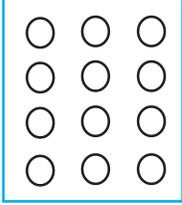


2.1.2 Multiplication of a Fraction by a Fraction

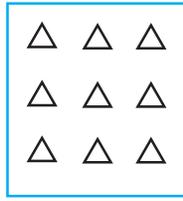
Farida had a 9 cm long strip of ribbon. She cut this strip into four equal parts. How did she do it? She folded the strip twice. What fraction of the total length will each part represent?

Each part will be $\frac{9}{4}$ of the strip. She took one part and divided it in two equal parts by

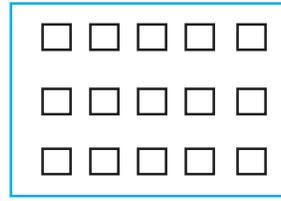
4. షేడ్ చేయండి: (i) పటం (a) లోని వృత్తాలలో $\frac{1}{2}$ వ భాగం (ii) పటం (b) త్రిభుజులలోని $\frac{2}{3}$ వ భాగం (iii) పటం (c) లోని దీర్ఘచతురస్రాలలో $\frac{3}{5}$ వ భాగం.



(a)



(b)



(c)

5. కనుక్కోండి.

- (a) (i) 24 (ii) 46 లో $\frac{1}{2}$ (b) (i) 18 (ii) 27 లో $\frac{2}{3}$
 (c) (i) 16 (ii) 36 లో $\frac{3}{4}$ (d) (i) 20 (ii) 35 లో $\frac{4}{5}$

6. గుణించండి మరియు మిశ్రమ భిన్నంగా మార్చండి.

- (a) $3 \times 5\frac{1}{5}$ (b) $5 \times 6\frac{3}{4}$ (c) $7 \times 2\frac{1}{4}$
 (d) $4 \times 6\frac{1}{3}$ (e) $3\frac{1}{4} \times 6$ (f) $3\frac{2}{5} \times 8$



7. కనుక్కోండి: (a) (i) $2\frac{3}{4}$ (ii) $4\frac{2}{9}$ లలో $\frac{1}{2}$ (b) (i) $3\frac{5}{6}$ (ii) $9\frac{2}{3}$ లలో $\frac{5}{8}$

8. విద్య ప్రతాప్ పిక్చర్ కు వెళ్లారు. వారికి వాళ్ళ తల్లి 5 లీటర్లు నీళ్ళు గల బాటిల్ ఇచ్చింది. విద్య నీళ్ళలో $\frac{2}{5}$ వ భాగం వాడింది, మిగిలినది ప్రతాప్ వాడాడు.

- (i) విద్య ఎంత నీరు తాగింది ?
 (ii) మొత్తం నీళ్ళలో ప్రతాప్ తాగిన భాగం ఎంత ?

2.1.2 భిన్నాన్ని మరో భిన్నంతో గుణించడం

ఫరీదా 9 సెం.మీ. పొడవుగల రిబ్బన్ (స్ట్రిప్/ముక్క)ను కలిగి ఉంది. ఆమె ఈ స్ట్రిప్ ని నాలుగు సమాన భాగాలుగా కత్తిరించింది. ఆమె అది ఎలా చేసింది. ఆమె స్ట్రిప్ ను రెండుసార్లు మడిచింది. ప్రతి భాగం మొత్తం

పొడవులో ఏ భాగాన్ని సూచిస్తుంది? ప్రతి భాగం స్ట్రిప్ లో $\frac{9}{4}$ వ వంతు ఉంటుంది. ఆమె ఒక భాగాన్ని తీసుకుని, ఆ భాగాన్ని ఒకసారి మడతపెట్టి రెండు సమాన భాగాలుగా విభజించింది.

folding the part once. What will one of the pieces represent? It will represent $\frac{1}{2}$ of $\frac{9}{4}$ or $\frac{1}{2} \times \frac{9}{4}$.

Let us now see how to find the product of two fractions like $\frac{1}{2} \times \frac{9}{4}$.

To do this we first learn to find the products like $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$.



Fig 2.8

- (a) How do we find $\frac{1}{3}$ of a whole? We divide the whole in three equal parts. Each of the three parts represents $\frac{1}{3}$ of the whole. Take one part of these three parts, and shade it as shown in Fig 2.8.

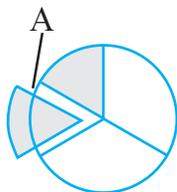


Fig 2.9

- (b) How will you find $\frac{1}{2}$ of this shaded part? Divide this one-third ($\frac{1}{3}$) shaded part into two equal parts. Each of these two parts represents $\frac{1}{2}$ of $\frac{1}{3}$ i.e., $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ (Fig 2.9).

Take out 1 part of these two and name it 'A'. 'A' represents $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$.

- (c) What fraction is 'A' of the whole? For this, divide each of the remaining $\frac{1}{3}$ parts also in two equal parts. How many such equal parts do you have now? There are six such equal parts. 'A' is one of these parts.

So, 'A' is $\frac{1}{6}$ of the whole. Thus, $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

How did we decide that 'A' was $\frac{1}{6}$ of the whole? The whole was divided in $6 = 2 \times 3$ parts and $1 = 1 \times 1$ part was taken out of it.

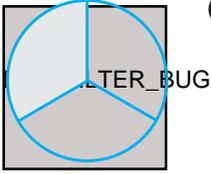
Thus,
$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = \frac{1 \times 1}{2 \times 3}$$

or
$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1 \times 1}{2 \times 3}$$

ముక్కలలో ఒకటి దేనిని సూచిస్తుంది? ఇది $\frac{9}{4}$ లో $\frac{1}{2}$ లేదా $\frac{1}{2} \times \frac{9}{4}$.

$\frac{1}{2} \times \frac{9}{4}$ వంటి భిన్నాల గుణకారాన్ని ఎలా కనుగొనాలో ఇప్పుడు చూద్దాం.

దీన్ని చేయడానికి మనం మొదట $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ వంటి లబ్ధాలను కనుగొనడం నేర్చుకుంటాము.



పటం 2.8

(a) మొత్తంలో $\frac{1}{3}$ ను ఎలా కనుక్కుంటాము? మనం మొత్తాన్ని మూడు సమాన భాగాలుగా విభజిస్తాము.

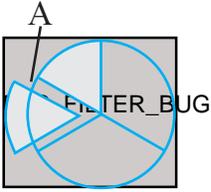
ప్రతి భాగము మొత్తంలో $\frac{1}{3}$ గా సూచిస్తాము. ఈ మూడు భాగాలలో ఒకదాన్ని తీసుకోండి. మరియు పటం 2.8 లో చూపినవిధంగా షేడ్ చేయండి.

(b) షేడ్ చేసిన భాగంలో $\frac{1}{2}$ భాగం ను ఎలా కనుక్కుంటావు? ఈ మూడింట ఒక వంతు ($\frac{1}{3}$) షేడ్ చేసిన

భాగాన్ని రెండు సమానభాగాలుగా విభజించండి. ప్రతి భాగము $\frac{1}{3}$ లో $\frac{1}{2}$ కు సూచిస్తుంది. అంటే

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ (పటం 2.9) ఈ రెండింటిలో ఒక భాగాన్ని తీయండి మరియు 'A' అని పేరు పెట్టండి. 'A'

అనేది $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ సూచిస్తుంది.



పటం 2.9

(c) 'A' అనేది మొత్తంలో ఏ భిన్నం అవుతుంది. దీనికోసం మిగిలిన ప్రతి $\frac{1}{3}$ భాగంను కూడా రెండు సమాన భాగాలుగా విభజించండి. ఇప్పుడు ఇలాంటి ఎన్ని సమానభాగాలు కలిగి ఉన్నాయి. అలాంటి అరు సమాన భాగాలు ఉన్నాయి? ఈ భాగాలలో 'A' ఒకటి.

కాబట్టి, 'A' అనేది మొత్తంలో $\frac{1}{6}$ అందువల్ల $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

'A' అనేది మొత్తంలో $\frac{1}{6}$ అని ఎలా నిర్ణయించాం? మొత్తం $6 = 2 \times 3$ భాగాలుగా విభజించబడింది మరియు $1 = 1 \times 1$ భాగం దానినుండి తీయబడింది.

అందువల్ల, $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = \frac{1 \times 1}{2 \times 3}$

లేదా $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1 \times 1}{2 \times 3}$

The value of $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$ can be found in a similar way. Divide the whole into two equal parts and then divide one of these parts in three equal parts. Take one of these parts. This will represent $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$ i.e., $\frac{1}{6}$.

Therefore $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6} = \frac{1 \times 1}{3 \times 2}$ as discussed earlier.

Hence $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

Find $\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}$ and $\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}$; $\frac{1}{2} \times \frac{1}{5}$ and $\frac{1}{5} \times \frac{1}{2}$ and check whether you get

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3}; \quad \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2}$$

TRY THESE

Fill in these boxes:

(i) $\frac{1}{2} \times \frac{1}{7} = \frac{1 \times 1}{2 \times 7} = \square$

(ii) $\frac{1}{5} \times \frac{1}{7} = \square = \square$

(iii) $\frac{1}{7} \times \frac{1}{2} = \square = \square$

(iv) $\frac{1}{7} \times \frac{1}{5} = \square = \square$



EXAMPLE 2 Sushant reads $\frac{1}{3}$ part of a book in 1 hour. How much part of the book will he read in $2\frac{1}{5}$ hours?

SOLUTION The part of the book read by Sushant in 1 hour = $\frac{1}{3}$.

So, the part of the book read by him in $2\frac{1}{5}$ hours = $2\frac{1}{5} \times \frac{1}{3}$
 $= \frac{11}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{11 \times 1}{5 \times 3} = \frac{11}{15}$

Let us now find $\frac{1}{2} \times \frac{5}{3}$. We know that $\frac{5}{3} = \frac{1}{3} \times 5$.

$$\text{So, } \frac{1}{2} \times \frac{5}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times 5 = \frac{1}{6} \times 5 = \frac{5}{6}$$



$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$ యొక్క విలువను ఇదేవిధంగా కనుక్కోవచ్చు. మొత్తాన్ని రెండు సమాన భాగాలుగా విభజించండి.

తరువాత ఈ భాగాలలో ఒకదానిని మూడు సమాన భాగాలుగా విభజించండి. వీటిలో ఒక భాగాన్ని

తీసుకోండి. ఇది $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$ అనగా $\frac{1}{6}$ ను సూచిస్తుంది.

అందువల్ల ముందుగా చర్చించిన $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6} = \frac{1 \times 1}{3 \times 2}$

కాబట్టి $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

కనుగొనండి $\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}$ మరియు $\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}$; $\frac{1}{2} \times \frac{1}{5}$ మరియు $\frac{1}{5} \times \frac{1}{2}$ మీరు దీనిని పొందుతారా లేదా అని సరిచూడండి.

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3}; \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2}$$

ప్రయత్నించండి

ఈ క్రింది గడులను పూరించండి.

(i) $\frac{1}{2} \times \frac{1}{7} = \frac{1 \times 1}{2 \times 7} = \square$

(ii) $\frac{1}{5} \times \frac{1}{7} = \square = \square$

(iii) $\frac{1}{7} \times \frac{1}{2} = \square = \square$

(iv) $\frac{1}{7} \times \frac{1}{5} = \square = \square$



ఉదాహరణ 2 సుశాంత్ ఒక పుస్తకంలోని $\frac{1}{3}$ భాగాన్ని 1గంటలో చదివాడు. పుస్తకంలోని ఎంత

భాగాన్ని అతను $2\frac{1}{5}$ గంటలలో చదువుతాడు?

సాధన

1 గంటలో సుశాంత్ చదివిన పుస్తకంలోని భాగం = $\frac{1}{3}$.

కాబట్టి, అతను $2\frac{1}{5}$ గంటలలో చదివిన పుస్తకంలోని భాగం = $2\frac{1}{5} \times \frac{1}{3}$

$$= \frac{11}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{11 \times 1}{5 \times 3} = \frac{11}{15}$$

ఇప్పుడు మనం $\frac{1}{2} \times \frac{5}{3}$ కనుక్కుందాం. $\frac{5}{3} = \frac{1}{3} \times 5$ అని మనకు తెలుసు.

$$\text{కాబట్టి, } \frac{1}{2} \times \frac{5}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times 5 = \frac{1}{6} \times 5 = \frac{5}{6}$$



Also, $\frac{5}{6} = \frac{1 \times 5}{2 \times 3}$. Thus, $\frac{1}{2} \times \frac{5}{3} = \frac{1 \times 5}{2 \times 3} = \frac{5}{6}$.

This is also shown by the figures drawn below. Each of these five equal shapes (Fig 2.10) are parts of five similar circles. Take one such shape. To obtain this shape we first divide a circle in three equal parts. Further divide each of these three parts in two equal parts. One part out of it is the shape we considered. What will it represent?

It will represent $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. The total of such parts would be $5 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.



Fig 2.10

TRY THESE



Find: $\frac{1}{3} \times \frac{4}{5}$; $\frac{2}{3} \times \frac{1}{5}$

Similarly $\frac{3}{5} \times \frac{1}{7} = \frac{3 \times 1}{5 \times 7} = \frac{3}{35}$.

We can thus find $\frac{2}{3} \times \frac{7}{5}$ as $\frac{2}{3} \times \frac{7}{5} = \frac{2 \times 7}{3 \times 5} = \frac{14}{15}$.

So, we find that we multiply two fractions as $\frac{\text{Product of Numerators}}{\text{Product of Denominators}}$.

Value of the Products

TRY THESE

Find: $\frac{8}{3} \times \frac{4}{7}$; $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$.

You have seen that the product of two whole numbers is bigger than each of the two whole numbers. For example, $3 \times 4 = 12$ and $12 > 4$, $12 > 3$. What happens to the value of the product when we multiply two fractions?

Let us first consider the product of two proper fractions.

We have,

$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$	$\frac{8}{15} < \frac{2}{3}, \frac{8}{15} < \frac{4}{5}$	Product is less than each of the fractions
$\frac{1}{5} \times \frac{2}{7} = \text{-----}$	-----, -----	-----
$\frac{3}{5} \times \frac{\square}{8} = \frac{21}{40}$	-----, -----	-----
$\frac{2}{\square} \times \frac{4}{9} = \frac{8}{45}$	-----, -----	-----

అలాగే, $\frac{5}{6} = \frac{1 \times 5}{2 \times 3}$. అదేవిధంగా $\frac{1}{2} \times \frac{5}{3} = \frac{1 \times 5}{2 \times 3} = \frac{5}{6}$.

దీనిని కింది గీసిన చిత్రాల ద్వారా కూడా చూపబడింది. ఈ ఐదు సమాన ఆకారాలలో ప్రతి ఒక్కటి (పటం 2.10) ఐదు సమాన వృత్తాల భాగాలు. అటువంటి ఒక ఆకారాన్ని తీసుకోండి. ఈ ఆకారాన్ని పొందడానికి మనం మొదట ఒక వృత్తాన్ని మూడు సమాన భాగాలుగా విభజిస్తాము. ఇంకా ఈ మూడు భాగాలను రెండు సమాన భాగాలుగా విభజించండి. అందులో ఒక భాగం మనం పరిగణించిన ఆకారం. ఇది దేనికి ప్రాతినిధ్యం వహిస్తుంది?

ఇది $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ ను ప్రాతినిధ్యం వహిస్తుంది. అటువంటి భాగాల మొత్తం $5 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.



పటం 2.10

ప్రయత్నించండి.



కనుక్కోండి: $\frac{1}{3} \times \frac{4}{5}$; $\frac{2}{3} \times \frac{1}{5}$

అలాగే $\frac{3}{5} \times \frac{1}{7} = \frac{3 \times 1}{5 \times 7} = \frac{3}{35}$

$\frac{2}{3} \times \frac{7}{5}$ ని $\frac{2}{3} \times \frac{7}{5} = \frac{2 \times 7}{3 \times 5} = \frac{14}{15}$ అని రాయవచ్చు.

కాబట్టి, మనం రెండు భిన్నాలను $\frac{\text{లవాల లబ్ధం}}{\text{హారాల లబ్ధం}}$ గా గుణిస్తాం.
లబ్ధాల యొక్క విలువ

ప్రయత్నించండి.

కనుక్కోండి: $\frac{8}{3} \times \frac{4}{7}$; $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$.

ప్రతి రెండు పూర్ణాంకాల కంటే రెండు పూర్ణాంకాల లబ్ధం పెద్దదని మీరు చూశారు. ఉదాహరణకు, $3 \times 4 = 12$ మరియు $12 > 4$, $12 > 3$. మనం రెండు భిన్నాలను గుణించినప్పుడు వాటి లబ్ధానికి ఏమి జరుగుతుంది? ముందుగా రెండు క్రమ భిన్నాల లబ్ధాన్ని పరిశీలిద్దాం.

$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$	$\frac{8}{15} < \frac{2}{3}, \frac{8}{15} < \frac{4}{5}$	ప్రతి భిన్నం కంటే లబ్ధం తక్కువగా ఉంటుంది.
$\frac{1}{5} \times \frac{2}{7} = \dots\dots\dots$	$\dots\dots\dots, \dots\dots\dots$	$\dots\dots\dots$
$\frac{3}{5} \times \frac{\square}{8} = \frac{21}{40}$	$\dots\dots\dots, \dots\dots\dots$	$\dots\dots\dots$
$\frac{2}{\square} \times \frac{4}{9} = \frac{8}{45}$	$\dots\dots\dots, \dots\dots\dots$	$\dots\dots\dots$

You will find that *when two proper fractions are multiplied, the product is less than each of the fractions. Or, we say the value of the product of two proper fractions is smaller than each of the two fractions.*

Check this by constructing five more examples.

Let us now multiply two improper fractions.

$\frac{7}{3} \times \frac{5}{2} = \frac{35}{6}$	$\frac{35}{6} > \frac{7}{3}, \frac{35}{6} > \frac{5}{2}$	Product is greater than each of the fractions
$\frac{6}{5} \times \frac{\square}{3} = \frac{24}{15}$	-----,-----	-----
$\frac{9}{2} \times \frac{7}{\square} = \frac{63}{8}$	-----,-----	-----
$\frac{3}{\square} \times \frac{8}{7} = \frac{24}{14}$	-----,-----	-----

We find that *the product of two improper fractions is greater than each of the two fractions.*

Or, the value of the product of two improper fractions is more than each of the two fractions.

Construct five more examples for yourself and verify the above statement.

Let us now multiply a proper and an improper fraction, say $\frac{2}{3}$ and $\frac{7}{5}$.

We have $\frac{2}{3} \times \frac{7}{5} = \frac{14}{15}$. Here, $\frac{14}{15} < \frac{7}{5}$ and $\frac{14}{15} > \frac{2}{3}$

The product obtained is less than the improper fraction and greater than the proper fraction involved in the multiplication.

Check it for $\frac{6}{5} \times \frac{2}{8}, \frac{8}{3} \times \frac{4}{5}$.

EXERCISE 2.2

1. Find:

(i) $\frac{1}{4}$ of (a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{3}{5}$ (c) $\frac{4}{3}$

(ii) $\frac{1}{7}$ of (a) $\frac{2}{9}$ (b) $\frac{6}{5}$ (c) $\frac{3}{10}$



రెండు క్రమ భిన్నాలను గుణించినప్పుడు, ప్రతి భిన్నం కంటే లబ్ధం తక్కువగా ఉంటుందని మీరు కనుగొంటారు. లేదా, రెండు క్రమ భిన్నాల లబ్ధం యొక్క విలువ రెండు భిన్నాలలో ప్రతిదాని కంటే చిన్నదని మనం చెప్తాము. మరో ఐదు ఉదాహరణలను రూపొందించడం ద్వారా దీన్ని సరి చూడండి. ఇప్పుడు మనం రెండు అపక్రమ భిన్నాలను గుణిద్దాం.

$\frac{7}{3} \times \frac{5}{2} = \frac{35}{6}$	$\frac{35}{6} > \frac{7}{3}, \frac{35}{6} > \frac{5}{2}$	ప్రతిభిన్నం కంటే లబ్ధం ఎక్కువ
$\frac{6}{5} \times \frac{\square}{3} = \frac{24}{15}$	-----, -----	-----
$\frac{9}{2} \times \frac{7}{\square} = \frac{63}{8}$	-----, -----	-----
$\frac{3}{\square} \times \frac{8}{7} = \frac{24}{14}$	-----, -----	-----

రెండు భిన్నాలలో ప్రతి భిన్నం కంటే రెండు అపక్రమ భిన్నాల లబ్ధం ఎక్కువగా ఉందని మనం కనుగొన్నాము.

లేదా, రెండు అపక్రమ భిన్నాల లబ్ధం విలువ రెండు భిన్నాలలో ప్రతిదాని కంటే ఎక్కువగా ఉంటుంది.

మీ కోసం మరో ఐదు ఉదాహరణలను రూపొందించండి మరియు పై ప్రవచనాన్ని ధృవీకరించండి.

ఇప్పుడు మనం క్రమ మరియు అపక్రమ భిన్నాన్ని గుణిద్దాం

మనం $\frac{2}{3} \times \frac{7}{5} = \frac{14}{15}$ తీసుకుందాం. ఇక్కడ, $\frac{14}{15} < \frac{7}{5}$ మరియు $\frac{14}{15} > \frac{2}{3}$

పొందిన లబ్ధం గుణకారంలో ఉపయోగించిన అపక్రమ భిన్నం కంటే తక్కువగా ఉంటుంది మరియు క్రమభిన్నం కంటే ఎక్కువగా ఉంటుంది.

సరిచూడండి $\frac{6}{5} \times \frac{2}{8}, \frac{8}{3} \times \frac{4}{5}$.

అభ్యాసం 2.2

1. కనుక్కోండి :

(i) (a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{3}{5}$ (c) $\frac{4}{3}$ లో $\frac{1}{4}$

(ii) (a) $\frac{2}{9}$ (b) $\frac{6}{5}$ (c) $\frac{3}{10}$ లో $\frac{1}{7}$



2. Multiply and reduce to lowest form (if possible) :

(i) $\frac{2}{3} \times 2\frac{2}{3}$ (ii) $\frac{2}{7} \times \frac{7}{9}$ (iii) $\frac{3}{8} \times \frac{6}{4}$ (iv) $\frac{9}{5} \times \frac{3}{5}$

(v) $\frac{1}{3} \times \frac{15}{8}$ (vi) $\frac{11}{2} \times \frac{3}{10}$ (vii) $\frac{4}{5} \times \frac{12}{7}$

3. Multiply the following fractions:

(i) $\frac{2}{5} \times 5\frac{1}{4}$ (ii) $6\frac{2}{5} \times \frac{7}{9}$ (iii) $\frac{3}{2} \times 5\frac{1}{3}$ (iv) $\frac{5}{6} \times 2\frac{3}{7}$

(v) $3\frac{2}{5} \times \frac{4}{7}$ (vi) $2\frac{3}{5} \times 3$ (vii) $3\frac{4}{7} \times \frac{3}{5}$

4. Which is greater:

(i) $\frac{2}{7}$ of $\frac{3}{4}$ or $\frac{3}{5}$ of $\frac{5}{8}$ (ii) $\frac{1}{2}$ of $\frac{6}{7}$ or $\frac{2}{3}$ of $\frac{3}{7}$

5. Saili plants 4 saplings, in a row, in her garden. The distance between two adjacent saplings is $\frac{3}{4}$ m. Find the distance between the first and the last sapling.

6. Lipika reads a book for $1\frac{3}{4}$ hours everyday. She reads the entire book in 6 days. How many hours in all were required by her to read the book?

7. A car runs 16 km using 1 litre of petrol. How much distance will it cover using $2\frac{3}{4}$ litres of petrol.

8. (a) (i) Provide the number in the box \square , such that $\frac{2}{3} \times \square = \frac{10}{30}$.

(ii) The simplest form of the number obtained in \square is _____.

(b) (i) Provide the number in the box \square , such that $\frac{3}{5} \times \square = \frac{24}{75}$.

(ii) The simplest form of the number obtained in \square is _____.



2.2 DIVISION OF FRACTIONS

John has a paper strip of length 6 cm. He cuts this strip in smaller strips of length 2 cm each. You know that he would get $6 \div 2 = 3$ strips.

2. గుణించండి మరియు సూక్ష్మరూపంలో రాయండి. (వీలైతే)

(i) $\frac{2}{3} \times 2\frac{2}{3}$

(ii) $\frac{2}{7} \times \frac{7}{9}$

(iii) $\frac{3}{8} \times \frac{6}{4}$

(iv) $\frac{9}{5} \times \frac{3}{5}$

(v) $\frac{1}{3} \times \frac{15}{8}$

(vi) $\frac{11}{2} \times \frac{3}{10}$

(vii) $\frac{4}{5} \times \frac{12}{7}$

3. క్రింది భిన్నాలను గుణించండి.

(i) $\frac{2}{5} \times 5\frac{1}{4}$

(ii) $6\frac{2}{5} \times \frac{7}{9}$

(iii) $\frac{3}{2} \times 5\frac{1}{3}$

(iv) $\frac{5}{6} \times 2\frac{3}{7}$

(v) $3\frac{2}{5} \times \frac{4}{7}$

(vi) $2\frac{3}{5} \times 3$

(vii) $3\frac{4}{7} \times \frac{3}{5}$

4. ఏది పెద్దది :

(i) $\frac{3}{4}$ లో $\frac{2}{7}$ లేదా $\frac{5}{8}$ లో $\frac{3}{5}$

(ii) $\frac{6}{7}$ లో $\frac{1}{2}$ లేదా $\frac{3}{7}$ లో $\frac{2}{3}$

5. శైలి తన తోటలో ఒక వరుసలో 4 మొక్కలు నాటింది. ప్రక్కప్రక్కనే ఉన్న రెండు మొక్కల మధ్యదూరం $\frac{3}{4}$ మీ. అయితే మొదటి మరియు చివరి మొక్కల మధ్య దూరాన్ని కనుగొనండి.

6. లిపికా ఒక పుస్తకాన్ని ప్రతిరోజూ $1\frac{3}{4}$ గంటలు చదువుతుంది. ఆమె 6 రోజుల్లో మొత్తం పుస్తకాన్ని చదివింది. ఆమె పుస్తకం మొత్తం చదవడానికి ఎన్ని గంటలు అవసరం?

7. ఒక కారు 1 లీటర్ పెట్రోల్ తో 16 కి.మీ నడుస్తుంది. $2\frac{3}{4}$ లీటర్ పెట్రోలు ఉపయోగించి అది ఎంత దూరం ప్రయాణం చేస్తుంది.

8. (a) (i) $\frac{2}{3} \times \square = \frac{10}{30}$. అయ్యేవిధంగా పెట్టెలో సంఖ్యలు రాయండి.

(ii) \square లో ఉన్న భిన్నానికి సూక్ష్మరూపం _____.

(b) (i) $\frac{3}{5} \times \square = \frac{24}{75}$ అయ్యేవిధంగా పెట్టెలో సంఖ్యను రాయండి.

(ii) \square లో ఉన్న సంఖ్య యొక్క సూక్ష్మరూపం _____.



2.2 భిన్నాల భాగాహారం

జాన్ 6 సెంటీమీటర్ల పొడవుగల కాగితపు పట్టీని కలిగి ఉన్నాడు. అతను ఈ పట్టీని ఒక్కొక్కటి 2 సెంటీమీటర్ల పొడవు గల చిన్న పట్టీలుగా కత్తిరించాడు అతనికి $6 \div 2 = 3$ (ప్రిప్స్) లభిస్తాయని మీకు తెలుసు.

John cuts another strip of length 6 cm into smaller strips of length $\frac{3}{2}$ cm each. How many strips will he get now? He will get $6 \div \frac{3}{2}$ strips.

A paper strip of length $\frac{15}{2}$ cm can be cut into smaller strips of length $\frac{3}{2}$ cm each to give $\frac{15}{2} \div \frac{3}{2}$ pieces.

So, we are required to divide a whole number by a fraction or a fraction by another fraction. Let us see how to do that.

2.2.1 Division of Whole Number by a Fraction

Let us find $1 \div \frac{1}{2}$.

We divide a whole into a number of equal parts such that each part is half of the whole.

The number of such half ($\frac{1}{2}$) parts would be $1 \div \frac{1}{2}$. Observe the figure (Fig 2.11). How many half parts do you see?

There are two half parts.

So, $1 \div \frac{1}{2} = 2$. Also, $1 \times \frac{2}{1} = 1 \times 2 = 2$.

Thus, $1 \div \frac{1}{2} = 1 \times \frac{2}{1}$

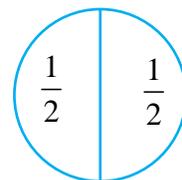


Fig 2.11

Similarly, $3 \div \frac{1}{4} =$ number of $\frac{1}{4}$ parts obtained when each of the 3 whole, are divided

into $\frac{1}{4}$ equal parts = 12 (From Fig 2.12)

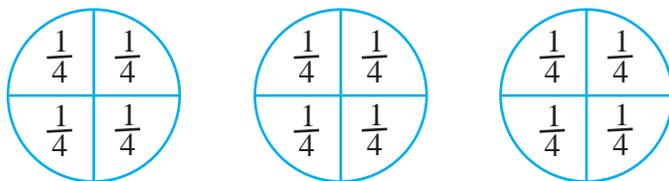


Fig 2.12

Observe also that, $3 \times \frac{4}{1} = 3 \times 4 = 12$. Thus, $3 \div \frac{1}{4} = 3 \times \frac{4}{1} = 12$.

Find in a similar way, $3 \div \frac{1}{2}$ and $3 \times \frac{2}{1}$.



జాన్ 6 సెం.మీ పొడవు గల మరొక స్ప్రింగ్ను $\frac{3}{2}$ సెం.మీ పొడవు గల చిన్న చిన్న స్ప్రింగులుగా కత్తిరించాడు. ఇప్పుడ అతను ఎన్ని స్ప్రింగులు పొందుతాడు? అతను $6 \div \frac{3}{2}$ స్ప్రింగులు పొందుతాడు.

$\frac{15}{2}$ సెం.మీ పొడవుగల కాగితపు స్ప్రింగును $\frac{3}{2}$ ముక్కలుగా చేయడానికి ఒక్కొక్కటి $\frac{15}{2} \div \frac{3}{2}$ సెం.మీ పొడవుగల చిన్న చిన్న స్ప్రింగులుగా కత్తిరించవచ్చు.

కాబట్టి, మనం ఒక పూర్ణాంకమును భిన్నంతో లేదా భిన్నంను మరొక భిన్నంతో భాగించాలి. దీన్ని ఎలా చేయాలో చూద్దాం

2.2.1 పూర్ణాంకాన్ని భిన్నంతో భాగించడం

మనం $1 \div \frac{1}{2}$ కనుక్కుందాం.

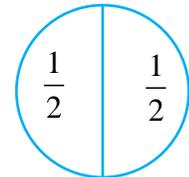
మనం మొత్తాన్ని అనేక సమాన భాగాలుగా విభజిస్తాము, ప్రతి భాగం మొత్తంలో సగం ఉంటుంది.

అటువంటి సగం ($\frac{1}{2}$) భాగాల సంఖ్య $1 \div \frac{1}{2}$ అవుతుంది. పటం 2.11) గమనించండి.

మీరు ఎన్ని సగ భాగాలు చూస్తున్నారు?

ఇక్కడ రెండు సగం భాగాలు ఉన్నాయి.

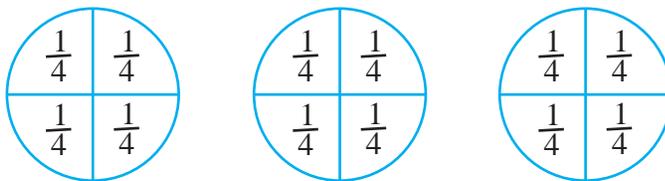
కాబట్టి, $1 \div \frac{1}{2} = 2$. $1 \times \frac{2}{1} = 1 \times 2 = 2$ కూడా, అందువల్ల $1 \div \frac{1}{2} = 1 \times \frac{2}{1}$



పటం 2.11

అలాగే, $3 \div \frac{1}{4} =$ ప్రతి 3 మొత్తాలలో ఒక్కొక్కటి $\frac{1}{4}$ సమ భాగాలుగా విభజించినపుడు పొందిన $\frac{1}{4}$

భాగాల సంఖ్య = 12 (పటం 2.12 నుండి)



పటం 2.12

$3 \times \frac{4}{1} = 3 \times 4 = 12$ అని కూడా గమనించండి. అందువల్ల, $3 \div \frac{1}{4} = 3 \times \frac{4}{1} = 12$.

$63 \div \frac{1}{2}$ మరియు $3 \times \frac{2}{1}$ లను ఇదేవిధంగా కనుక్కోండి.



Reciprocal of a fraction

The number $\frac{2}{1}$ can be obtained by interchanging the numerator and denominator of $\frac{1}{2}$ or by inverting $\frac{1}{2}$. Similarly, $\frac{3}{1}$ is obtained by inverting $\frac{1}{3}$.

Let us first see about the inverting of such numbers.

Observe these products and fill in the blanks :

$7 \times \frac{1}{7} = 1$	$\frac{5}{4} \times \frac{4}{5} = \text{-----}$
$\frac{1}{9} \times 9 = \text{-----}$	$\frac{2}{7} \times \text{-----} = 1$
$\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{2 \times 3}{3 \times 2} = \frac{6}{6} = 1$	$\text{-----} \times \frac{5}{9} = 1$

Multiply five more such pairs.

The non-zero numbers whose product with each other is 1, are called the reciprocals of each other. So reciprocal of $\frac{5}{9}$ is $\frac{9}{5}$ and the reciprocal of $\frac{9}{5}$ is $\frac{5}{9}$. What is the reciprocal of $\frac{1}{9}$? $\frac{2}{7}$?

You will see that the reciprocal of $\frac{2}{3}$ is obtained by inverting it. You get $\frac{3}{2}$.

THINK, DISCUSS AND WRITE

- Will the reciprocal of a proper fraction be again a proper fraction?
- Will the reciprocal of an improper fraction be again an improper fraction?

Therefore, we can say that

$$1 \div \frac{1}{2} = 1 \times \frac{2}{1} = 1 \times \text{reciprocal of } \frac{1}{2}.$$

$$3 \div \frac{1}{4} = 3 \times \frac{4}{1} = 3 \times \text{reciprocal of } \frac{1}{4}.$$

$$3 \div \frac{1}{2} = \text{-----} = \text{-----}.$$

$$\text{So, } 2 \div \frac{3}{4} = 2 \times \text{reciprocal of } \frac{3}{4} = 2 \times \frac{4}{3}.$$

$$5 \div \frac{2}{9} = 5 \times \text{-----} = 5 \times \text{-----}$$



భిన్నం యొక్క వ్యుత్క్రమం

$\frac{1}{2}$ యొక్క లవం మరియు హారం పరస్పరం మార్చుకోవడం ద్వారా లేదా $\frac{1}{2}$ ని విలోమం చేయడం ద్వారా $\frac{2}{1}$ సంఖ్యను పొందవచ్చు. అదే విధంగా, $\frac{1}{3}$ ని విలోమం చేయడం ద్వారా $\frac{3}{1}$ పొందవచ్చు. అటువంటి సంఖ్యల విలోమం గురించి ముందుగా చూద్దాం. ఈ లబ్ధాలను గమనించి, ఖాళీలను పూరించండి:

$7 \times \frac{1}{7} = 1$	$\frac{5}{4} \times \frac{4}{5} = \text{-----}$
$\frac{1}{9} \times 9 = \text{-----}$	$\frac{2}{7} \times \text{-----} = 1$
$\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{2 \times 3}{3 \times 2} = \frac{6}{6} = 1$	$\text{-----} \times \frac{5}{9} = 1$

అలాంటి మరో ఐదు జతలను గుణించండి.

సున్నాకాని సంఖ్యల యొక్క లబ్ధం 1 అయితే ఆ సంఖ్యలు పరస్పరం వ్యుత్క్రమాలు. కాబట్టి $\frac{5}{9}$ యొక్క వ్యుత్క్రమం $\frac{9}{5}$ మరియు $\frac{9}{5}$ యొక్క వ్యుత్క్రమం $\frac{5}{9}$ అవుతుంది. $\frac{1}{9}$ యొక్క వ్యుత్క్రమం, $\frac{2}{7}$ యొక్క వ్యుత్క్రమం ఏమిటి?

$\frac{2}{3}$ యొక్క వ్యుత్క్రమం దానిని విలోమం చేయడం ద్వారా పొందడం మీరు చూస్తారు. మీరు $\frac{3}{2}$ పొందుతారు.



ఆలోచించి, చర్చించి రాయండి

- క్రమభిన్నం యొక్క వ్యుత్క్రమం మళ్ళీ క్రమభిన్నం అవుతుందా?
- అపక్రమ భిన్నం యొక్క వ్యుత్క్రమం మళ్ళీ అపక్రమ భిన్నం అవుతుందా?

కాబట్టి, మనం ఇలా చెప్పవచ్చు

$$1 \div \frac{1}{2} = 1 \times \frac{2}{1} = 1 \times \frac{2}{1} \text{ వ్యుత్క్రమం}$$

$$3 \div \frac{1}{4} = 3 \times \frac{4}{1} = 3 \times \frac{4}{1} \text{ వ్యుత్క్రమం}$$

$$3 \div \frac{1}{2} = \text{-----} = \text{-----}$$

$$\text{కాబట్టి, } 2 \div \frac{3}{4} = 2 \times \frac{4}{3} \text{ వ్యుత్క్రమం} = 2 \times \frac{4}{3}$$

$$5 \div \frac{2}{9} = 5 \times \text{-----} = 5 \times \text{-----}$$



Thus, to divide a whole number by any fraction, multiply that whole number by the reciprocal of that fraction.

TRY THESE

Find: (i) $7 \div \frac{2}{5}$ (ii) $6 \div \frac{4}{7}$ (iii) $2 \div \frac{8}{9}$



- While dividing a whole number by a mixed fraction, first convert the mixed fraction into improper fraction and then solve it.

Thus, $4 \div 2\frac{2}{5} = 4 \div \frac{12}{5} = ?$ Also, $5 \div 3\frac{1}{3} = 3 \div \frac{10}{3} = ?$

TRY THESE

Find: (i) $6 \div 5\frac{1}{3}$
(ii) $7 \div 2\frac{4}{7}$

2.2.2 Division of a Fraction by a Whole Number

- What will be $\frac{3}{4} \div 3$?

Based on our earlier observations we have: $\frac{3}{4} \div 3 = \frac{3}{4} \div \frac{3}{1} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

So, $\frac{2}{3} \div 7 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{7} = ?$ What is $\frac{5}{7} \div 6$, $\frac{2}{7} \div 8$?

- While dividing mixed fractions by whole numbers, convert the mixed fractions into improper fractions. That is,

$2\frac{2}{3} \div 5 = \frac{8}{3} \div 5 = \text{-----}$; $4\frac{2}{5} \div 3 = \text{-----} = \text{-----}$; $2\frac{3}{5} \div 2 = \text{-----} = \text{-----}$

2.2.3 Division of a Fraction by Another Fraction

We can now find $\frac{1}{3} \div \frac{6}{5}$.

$\frac{1}{3} \div \frac{6}{5} = \frac{1}{3} \times \text{reciprocal of } \frac{6}{5} = \frac{1}{3} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{18}$.

Similarly, $\frac{8}{5} \div \frac{2}{3} = \frac{8}{5} \times \text{reciprocal of } \frac{2}{3} = ?$ and, $\frac{1}{2} \div \frac{3}{4} = ?$

TRY THESE

Find: (i) $\frac{3}{5} \div \frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{2} \div \frac{3}{5}$ (iii) $2\frac{1}{2} \div \frac{3}{5}$ (iv) $5\frac{1}{6} \div \frac{9}{2}$



ఈవిధంగా, పూర్ణాంకంను ఏదైనా భిన్నంతో భాగించాలంటే, ఆ భిన్నం యొక్క వ్యూత్కమం ద్వారా ఆ పూర్ణాంకంను గుణించాలి.

ప్రయత్నించండి.

కనుక్కోండి : (i) $7 \div \frac{2}{5}$ (ii) $6 \div \frac{4}{7}$ (iii) $2 \div \frac{8}{9}$



- పూర్ణాంకంను మిశ్రమ భిన్నంతో భాగిస్తున్నప్పుడు, ముందుగా మిశ్రమ భిన్నాన్ని అపక్రమ భిన్నంగా మార్చండి తరువాత దానిని పరిష్కరించండి.

కావున, $4 \div 2\frac{2}{5} = 4 \div \frac{12}{5} = ?$ అదేవిధంగా, $5 \div 3\frac{1}{3} = 3 \div \frac{10}{3} = ?$

ప్రయత్నించండి.

కనుక్కోండి: (i) $6 \div 5\frac{1}{3}$

(ii) $7 \div 2\frac{4}{7}$

2.4.2 భిన్నాన్ని పూర్ణాంకంతో భాగించడం

- $\frac{3}{4} \div 3$ ఎంతవుతుంది?

ముందు పరిశీలించిన సమస్యలను బట్టి మనకు $\frac{3}{4} \div 3 = \frac{3}{4} \div \frac{3}{1} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

కావున, $\frac{2}{3} \div 7 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{7} = ?$ అలాగే, $\frac{5}{7} \div 6$, $\frac{2}{7} \div 8$ ఎంత?

- మిశ్రమ భిన్నాలను పూర్ణాంకాలతో భాగిస్తున్నప్పుడు, మిశ్రమ భిన్నాలను అపక్రమ భిన్నాలుగా మార్చండి. అంటే,

$2\frac{2}{3} \div 5 = \frac{8}{3} \div 5 = \dots\dots$; $4\frac{2}{5} \div 3 = \dots\dots = \dots\dots$; $2\frac{3}{5} \div 2 = \dots\dots = \dots\dots$

2.2.3 ఒక భిన్నాన్ని మరొకభిన్నంతో భాగించడం

మనం $\frac{1}{3} \div \frac{6}{5}$ కనుక్కుదాం

$\frac{1}{3} \div \frac{6}{5} = \frac{1}{3} \times$ యొక్క వ్యూత్కమం $\frac{6}{5} = \frac{1}{3} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{18}$.

ఇదేవిధంగా, $\frac{8}{5} \div \frac{2}{3} = \frac{8}{5} \times \frac{2}{3}$ యొక్క వ్యూత్కమం = ? మరియు, $\frac{1}{2} \div \frac{3}{4} = ?$

ప్రయత్నించండి.

కనుక్కోండి : (i) $\frac{3}{5} \div \frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{2} \div \frac{3}{5}$ (iii) $2\frac{1}{2} \div \frac{3}{5}$ (iv) $5\frac{1}{6} \div \frac{9}{2}$



EXERCISE 2.3

1. Find:

(i) $12 \div \frac{3}{4}$ (ii) $14 \div \frac{5}{6}$ (iii) $8 \div \frac{7}{3}$ (iv) $4 \div \frac{8}{3}$

(v) $3 \div 2\frac{1}{3}$ (vi) $5 \div 3\frac{4}{7}$

2. Find the reciprocal of each of the following fractions. Classify the reciprocals as proper fractions, improper fractions and whole numbers.

(i) $\frac{3}{7}$ (ii) $\frac{5}{8}$ (iii) $\frac{9}{7}$ (iv) $\frac{6}{5}$

(v) $\frac{12}{7}$ (vi) $\frac{1}{8}$ (vii) $\frac{1}{11}$

3. Find:

(i) $\frac{7}{3} \div 2$ (ii) $\frac{4}{9} \div 5$ (iii) $\frac{6}{13} \div 7$ (iv) $4\frac{1}{3} \div 3$

(v) $3\frac{1}{2} \div 4$ (vi) $4\frac{3}{7} \div 7$

4. Find:

(i) $\frac{2}{5} \div \frac{1}{2}$ (ii) $\frac{4}{9} \div \frac{2}{3}$ (iii) $\frac{3}{7} \div \frac{8}{7}$ (iv) $2\frac{1}{3} \div \frac{3}{5}$ (v) $3\frac{1}{2} \div \frac{8}{3}$

(vi) $\frac{2}{5} \div 1\frac{1}{2}$ (vii) $3\frac{1}{5} \div 1\frac{2}{3}$ (viii) $2\frac{1}{5} \div 1\frac{1}{5}$



2.3 MULTIPLICATION OF DECIMAL NUMBERS

Reshma purchased 1.5kg vegetable at the rate of ₹ 8.50 per kg. How much money should she pay? Certainly it would be ₹ (8.50×1.50) . Both 8.5 and 1.5 are decimal numbers. So, we have come across a situation where we need to know how to multiply two decimals. Let us now learn the multiplication of two decimal numbers.

First we find 0.1×0.1 .

Now, $0.1 = \frac{1}{10}$. So, $0.1 \times 0.1 = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} =$

$$\frac{1 \times 1}{10 \times 10} = \frac{1}{100} = 0.01.$$

Let us see its pictorial representation (Fig 2.13)

The fraction $\frac{1}{10}$ represents 1 part out of 10 equal parts.

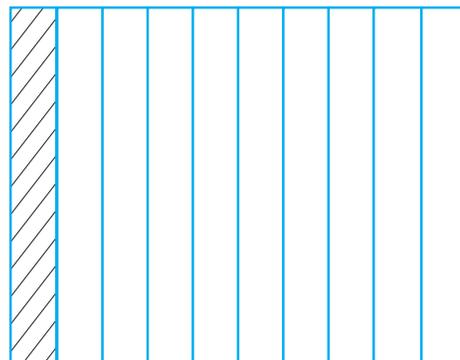


Fig 2.13

అభ్యాసం 2.3

1. కనుక్కోండి:

(i) $12 \div \frac{3}{4}$

(ii) $14 \div \frac{5}{6}$

(iii) $8 \div \frac{7}{3}$

(iv) $4 \div \frac{8}{3}$

(v) $3 \div 2\frac{1}{3}$

(vi) $5 \div 3\frac{4}{7}$

2. క్రింది ప్రతి భిన్నం యొక్క వ్యుత్క్రమం కనుక్కోండి. వ్యుత్క్రమాలను క్రమభిన్నాలు, అపక్రమ భిన్నాలు మరియు పూర్ణాంకాలుగా వర్గీకరించండి.

(i) $\frac{3}{7}$

(ii) $\frac{5}{8}$

(iii) $\frac{9}{7}$

(iv) $\frac{6}{5}$

(v) $\frac{12}{7}$

(vi) $\frac{1}{8}$

(vii) $\frac{1}{11}$

3. కనుక్కోండి:

(i) $\frac{7}{3} \div 2$

(ii) $\frac{4}{9} \div 5$

(iii) $\frac{6}{13} \div 7$

(iv) $4\frac{1}{3} \div 3$

(v) $3\frac{1}{2} \div 4$

(vi) $4\frac{3}{7} \div 7$

4. కనుక్కోండి:

(i) $\frac{2}{5} \div \frac{1}{2}$

(ii) $\frac{4}{9} \div \frac{2}{3}$

(iii) $\frac{3}{7} \div \frac{8}{7}$

(iv) $2\frac{1}{3} \div \frac{3}{5}$

(v) $3\frac{1}{2} \div \frac{8}{3}$

(vi) $\frac{2}{5} \div 1\frac{1}{2}$ (vii) $3\frac{1}{5} \div 1\frac{2}{3}$ (viii) $2\frac{1}{5} \div 1\frac{1}{5}$



2.3 దశాంశ సంఖ్యల యొక్క గుణకారం

రేషా 1.5 కి.గ్రా కూరగాయలను కిలోకు ₹ 8.50 చొప్పున కొనుగోలు చేసింది. ఆమె ఎంత డబ్బు చెల్లించాలి? భిన్నంగా అది ₹ (8.50 × 1.50). 8.5 మరియు 1.5 రెండూ దశాంశ సంఖ్యలు. కాబట్టి మనం రెండు దశాంశాలను ఎలా గుణించాలో తెలుసుకోవలసిన పరిస్థితి వచ్చింది. ఇప్పుడు మనం రెండు దశాంశ సంఖ్యల గుణకారాన్ని నేర్చుకుందాం.

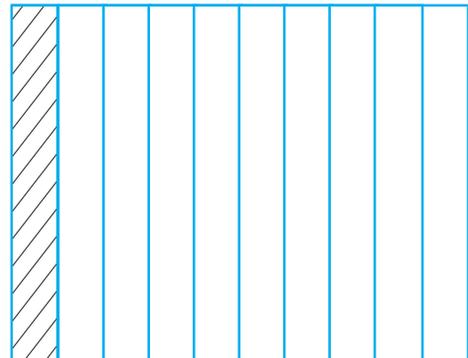
ముందుగా మనం 0.1×0.1 కనుక్కోవాలి.

$$\text{ఇప్పుడు, } 0.1 = \frac{1}{10} \text{ కాబట్టి, } 0.1 \times 0.1 = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} =$$

$$\frac{1 \times 1}{10 \times 10} = \frac{1}{100} = 0.01.$$

మనం దీని యొక్క పటరూపాన్ని చూద్దాం (పటం 2.13).

భిన్నం $\frac{1}{10}$ అనేది 10 సమాన భాగాలలో 1 భాగాన్ని సూచిస్తుంది.



పటం 2.13

The shaded part in the picture represents $\frac{1}{10}$.

We know that,

$\frac{1}{10} \times \frac{1}{10}$ means $\frac{1}{10}$ of $\frac{1}{10}$. So, divide this $\frac{1}{10}$ th part into 10 equal parts and take one part out of it.

Thus, we have, (Fig 2.14).

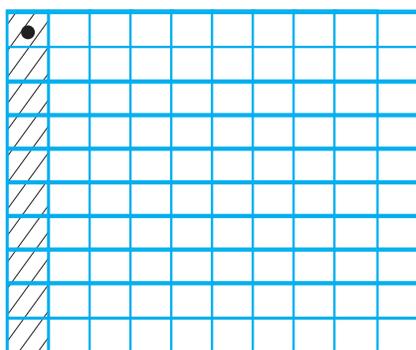


Fig 2.14



The dotted square is one part out of 10 of the $\frac{1}{10}$ th part. That is, it represents

$$\frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \text{ or } 0.1 \times 0.1.$$

Can the dotted square be represented in some other way?

How many small squares do you find in Fig 2.14?

There are 100 small squares. So the dotted square represents one out of 100 or 0.01.

Hence, $0.1 \times 0.1 = 0.01$.

Note that 0.1 occurs two times in the product. In 0.1 there is one digit to the right of the decimal point. In 0.01 there are two digits (i.e., 1 + 1) to the right of the decimal point.

Let us now find 0.2×0.3 .

$$\text{We have, } 0.2 \times 0.3 = \frac{2}{10} \times \frac{3}{10}$$

As we did for $\frac{1}{10} \times \frac{1}{10}$, let us divide the square into 10 equal

parts and take three parts out of it, to get $\frac{3}{10}$. Again divide each

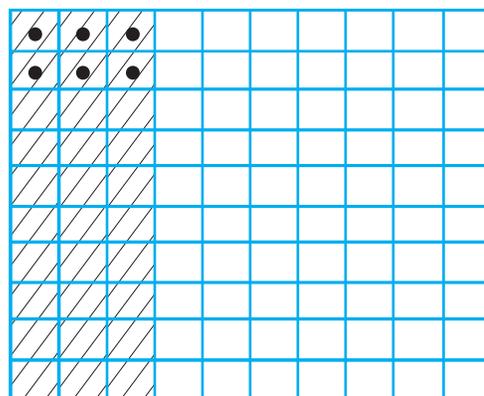
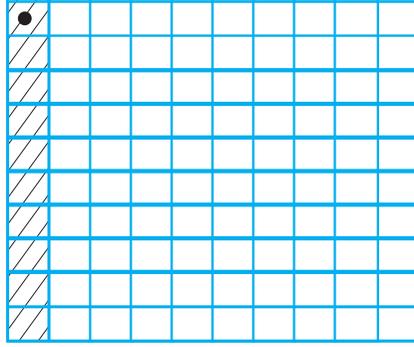


Fig 2.15

చిత్రంలో షేడ్ చేసిన భాగం $\frac{1}{10}$ ని సూచిస్తుంది.

మనకు తెలుసు,

$\frac{1}{10} \times \frac{1}{10}$ అంటే $\frac{1}{10}$ లో $\frac{1}{10}$. కాబట్టి ఈ $\frac{1}{10}$ వ భాగాన్ని 10 సమాన భాగాలుగా విభజించి ఒక భాగాన్ని తీసుకోండి. అందువలన, మనం (పటం 2.14) నుండి



పటం 2.14



చుక్కల చతురస్రం $\frac{1}{10}$ వ భాగంలోని 10 భాగాలలో ఒక భాగం అవుతుంది.

అంటే, అది $\frac{1}{10} \times \frac{1}{10}$ లేదా 0.1×0.1 ని సూచిస్తుంది.

చుక్కల చతురస్రాన్ని మరో విధంగా సూచించవచ్చా?

పటం 2.14 లో మీరు ఎన్ని చిన్న చతురస్రాలను కనుగొన్నారు?

100 చిన్న చతురస్రాలు ఉన్నాయి. కాబట్టి చుక్కల చతురస్రం 100 లో ఒకదాన్ని లేదా 0.01 ని సూచిస్తుంది. అందువల్ల, $0.1 \times 0.1 = 0.01$.

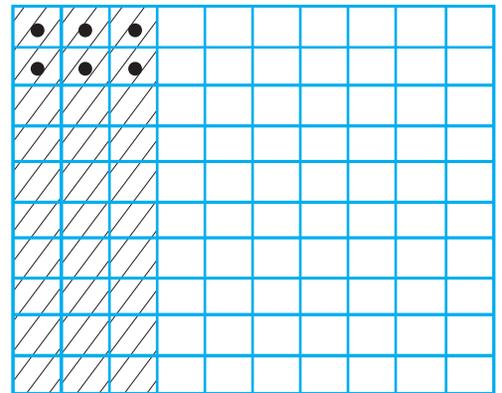
లబ్ధంలో 0.1 రెండు సార్లు వస్తుందని గమనించండి. 0.1లో దశాంశ బిందువుకు కుడివైపున ఒక అంకె ఉంటుంది. 0.01లో దశాంశ బిందువుకు కుడివైపున రెండు అంకెలు (అనగా, 1+1) ఉన్నాయి.

ఇప్పుడు మనం 0.2×0.3 కనుక్కుదాం.

$$\text{మనకు } 0.2 \times 0.3 = \frac{2}{10} \times \frac{3}{10}$$

మనం $\frac{1}{10} \times \frac{1}{10}$, కోసం చేసినట్లు, మనం చతురస్రాన్ని 10 సమాన

భాగాలుగా విభజించి $\frac{3}{10}$ పొందేలా దానినుండి మూడు భాగాలను తీసుకుందాం.



పటం 2.15

of these three equal parts into 10 equal parts and take two from each. We get $\frac{2}{10} \times \frac{3}{10}$.

The dotted squares represent $\frac{2}{10} \times \frac{3}{10}$ or 0.2×0.3 . (Fig 2.15)

Since there are 6 dotted squares out of 100, so they also represent 0.06.

Thus, $0.2 \times 0.3 = 0.06$.

Observe that $2 \times 3 = 6$ and the number of digits to the right of the decimal point in 0.06 is 2 ($= 1 + 1$).

Check whether this applies to 0.1×0.1 also.

Find 0.2×0.4 by applying these observations.

While finding 0.1×0.1 and 0.2×0.3 , you might have noticed that first we multiplied them as whole numbers ignoring the decimal point. In 0.1×0.1 , we found 01×01 or 1×1 . Similarly in 0.2×0.3 we found 02×03 or 2×3 .

Then, we counted the number of digits starting from the rightmost digit and moved towards left. We then put the decimal point there. The number of digits to be counted is obtained by adding the number of digits to the right of the decimal point in the decimal numbers that are being multiplied.

Let us now find 1.2×2.5 .

Multiply 12 and 25. We get 300. Both, in 1.2 and 2.5, there is 1 digit to the right of the decimal point. So, count $1 + 1 = 2$ digits from the rightmost digit (i.e., 0) in 300 and move towards left. We get 3.00 or 3.

Find in a similar way 1.5×1.6 , 2.4×4.2 .

While multiplying 2.5 and 1.25, you will first multiply 25 and 125. For placing the decimal in the product obtained, you will count $1 + 2 = 3$ (Why?) digits starting from the rightmost digit. Thus, $2.5 \times 1.25 = 3.225$

Find 2.7×1.35 .

TRY THESE



- Find: (i) 2.7×4 (ii) 1.8×1.2 (iii) 2.3×4.35
- Arrange the products obtained in (1) in descending order.

EXAMPLE 3

The side of an equilateral triangle is 3.5 cm. Find its perimeter.

SOLUTION

All the sides of an equilateral triangle are equal.

మళ్ళీ ఈ మూడు సమాన భాగాలలో ప్రతిదానిని 10 సమాన భాగాలుగా విభజించి, ఒక్కొక్కటి నుండి రెండింటిని తీసుకోండి. $\frac{2}{10} \times \frac{3}{10}$ పొందుతాము.

చుక్కలు గల చతురస్రాలు $\frac{2}{10} \times \frac{3}{10}$ లేదా 0.2×0.3 ని సూచిస్తాయి. (పటం 2.15)

100లో 6 చుక్కలు గల చతురస్రాలు ఉన్నందున, అవి కూడా 0.06ని సూచిస్తాయి.

అందువల్ల $0.2 \times 0.3 = 0.06$ అవుతుంది.

$2 \times 3 = 6$ మరియు 0.06 లో దశాంశ బిందువు యొక్క కుడివైపున ఉన్న అంకెల సంఖ్య 2 (= 1 + 1) గమనించండి.

ఇది 0.1×0.1 కి కూడా వర్తిస్తుందో లేదో పరీక్షించండి.

ఈ పరిశీలనలను వర్తింపజేసి 0.2×0.4 ని కనుక్కోండి.

0.1×0.1 మరియు 0.2×0.3 లను కనుగొన్నప్పుడు, మొదట మనం దశాంశ బిందువును విస్మరించి

పూర్ణాంకాలను గుణించడాన్ని మీరు గమనించి ఉండవచ్చు. 0.1×0.1 లో మనం 01×01 లేదా 1×1 అదేవిధంగా 0.2×0.3 లో 02×03 లేదా 2×3 అని కనుక్కున్నాము.

అప్పుడు, మనం కుడివైపున ప్రారంభమయ్యే అంకె నుండి అంకెల సంఖ్యను లెక్కించాము మరియు ఎడమ వైపుకు తరలించి అక్కడ దశాంశ బిందువును ఉంచాము. గుణించబడే దశాంశ సంఖ్యలలో దశాంశ బిందువు యొక్క కుడి వైపున ఉన్న అంకెల సంఖ్యను కలపడం ద్వారా లెక్కించవలసిన అంకెల సంఖ్యను పొందతాము.

ఇప్పుడు మనం 1.2×2.5 ను కనుక్కుదాం.

12 మరియు 25 ని గుణించండి. మనకు 300 వస్తుంది. 1.2 మరియు 2.5 రెండింటిలో, దశాంశ బిందువుకు కుడివైపున 1 అంకె ఉంది. కాబట్టి, 300లో కుడివైపు ఉన్న అంకె (అనగా, 0) నుండి

$1 + 1 = 2$ అంకెలను లెక్కించండి మరియు ఎడమ వైపుకు వెళ్లండి. మనకు 3.00 లేదా 3 వస్తుంది.

ఇదేవిధంగా 1.5×1.6 మరియు 2.4×4.2 లను కనుక్కోండి.

2.5 మరియు 1.25ని గుణించేటప్పుడు, మీరు మొదట 25 మరియు 125ని గుణిస్తారు. పొందిన లబ్ధంలో దశాంశాన్ని ఉంచడం కోసం, మీరు కుడివైపు అంకె నుండి ప్రారంభమయ్యే $1 + 2 = 3$ అంకెలను లెక్కించాలి (ఎందుకు?). అందువలన, $2.5 \times 1.25 = 3.225$

2.7×1.35 ను కనుక్కోండి.

ప్రయత్నించండి.



1. కనుక్కోండి: (i) 2.7×4 (ii) 1.8×1.2 (iii) 2.3×4.35
2. (1) లో పొందిన లబ్ధాలను అవరోహణ క్రమంలో అమర్చండి.

ఉదాహరణ 3 సమబాహు త్రిభుజం భుజం 3.5 సెం.మీ. అయితే దాని చుట్టుకొలతను కనుక్కోండి.

సాధన

సమబాహు త్రిభుజం యొక్క అన్ని భుజాలు సమానంగా ఉంటాయి.

So, length of each side = 3.5 cm

Thus, perimeter = $3 \times 3.5 \text{ cm} = 10.5 \text{ cm}$

EXAMPLE 4 The length of a rectangle is 7.1 cm and its breadth is 2.5 cm.
What is the area of the rectangle?

SOLUTION Length of the rectangle = 7.1 cm

Breadth of the rectangle = 2.5 cm

Therefore, area of the rectangle = $7.1 \times 2.5 \text{ cm}^2 = 17.75 \text{ cm}^2$

2.3.1 Multiplication of Decimal Numbers by 10, 100 and 1000

Reshma observed that $2.3 = \frac{23}{10}$ whereas $2.35 = \frac{235}{100}$. Thus, she found that depending on the position of the decimal point the decimal number can be converted to a fraction with denominator 10 or 100. She wondered what would happen if a decimal number is multiplied by 10 or 100 or 1000.

Let us see if we can find a pattern of multiplying numbers by 10 or 100 or 1000.

Have a look at the table given below and fill in the blanks:

$1.76 \times 10 = \frac{176}{100} \times 10 = 17.6$	$2.35 \times 10 = \underline{\quad}$	$12.356 \times 10 = \underline{\quad}$
$1.76 \times 100 = \frac{176}{100} \times 100 = 176 \text{ or } 176.0$	$2.35 \times 100 = \underline{\quad}$	$12.356 \times 100 = \underline{\quad}$
$1.76 \times 1000 = \frac{176}{100} \times 1000 = 1760 \text{ or } 1760.0$	$2.35 \times 1000 = \underline{\quad}$	$12.356 \times 1000 = \underline{\quad}$
$0.5 \times 10 = \frac{5}{10} \times 10 = 5$; $0.5 \times 100 = \underline{\quad}$; $0.5 \times 1000 = \underline{\quad}$		

Observe the shift of the decimal point of the products in the table. Here the numbers are multiplied by 10, 100 and 1000. In $1.76 \times 10 = 17.6$, the digits are same i.e., 1, 7 and 6. Do you observe this in other products also? Observe 1.76 and 17.6. To which side has the decimal point shifted, right or left? The decimal point has shifted to the right by one place. Note that 10 has one zero over 1.

In $1.76 \times 100 = 176.0$, observe 1.76 and 176.0. To which side and by how many digits has the decimal point shifted? The decimal point has shifted to the right by two places.

Note that 100 has two zeros over one.

Do you observe similar shifting of decimal point in other products also?

కాబట్టి భుజం యొక్క ప్రతి పొడవు = 3.5 సెం.మీ
కావున , చుట్టుకొలత = 3×3.5 సెం.మీ = 10.5 సెం.మీ

ఉదాహరణ 4 దీర్ఘచతురస్రం యొక్క పొడవు 7.1 సెం.మీ , వెడల్పు 2.5 సెం.మీ. అయితే దీర్ఘచతురస్రం యొక్క వైశాల్యం ఎంత?

సాధన దీర్ఘచతురస్రం యొక్క పొడవు = 7.1 సెం.మీ
దీర్ఘచతురస్రం యొక్క వెడల్పు = 2.5 సెం.మీ

కాబట్టి, దీర్ఘచతురస్రం యొక్క వైశాల్యం = 7.1×2.5 సెం.మీ² = 17.75 సెం.మీ²

2.3.1 10,100 మరియు 1000లతో దశాంశ సంఖ్యల గుణకారం

$2.3 = \frac{23}{10}$ అయితే $2.35 = \frac{235}{100}$ అని రేషు గమనించండి. అందువల్ల, దశాంశ బిందువు యొక్క స్థానం ఆధారంగా దశాంశ సంఖ్యను హారంలో 10 లేదా 100తో భిన్నంగా మార్చవచ్చని ఆమె కనుగొంది. ఒక దశాంశ సంఖ్యను 10 లేదా 100 లేదా 1000తో గుణిస్తే ఏమి జరుగుతుందోనని ఆమె ఆశ్చర్యపోయింది. సంఖ్యలను 10 లేదా 100 లేదా 1000తో గుణించే క్రమపద్ధతి మనం కనుక్కోగలమా చూద్దాం. క్రింద ఇవ్వబడిన పట్టికను పరిశీలించి, ఖాళీలను పూరించండి:

$1.76 \times 10 = \frac{176}{100} \times 10 = 17.6$	$2.35 \times 10 = \underline{\hspace{2cm}}$	$12.356 \times 10 = \underline{\hspace{2cm}}$
$1.76 \times 100 = \frac{176}{100} \times 100 = 176$ లేదా 176.0	$2.35 \times 100 = \underline{\hspace{2cm}}$	$12.356 \times 100 = \underline{\hspace{2cm}}$
$1.76 \times 1000 = \frac{176}{100} \times 1000 = 1760$ లేదా 1760.0	$2.35 \times 1000 = \underline{\hspace{2cm}}$	$12.356 \times 1000 = \underline{\hspace{2cm}}$
$0.5 \times 10 = \frac{5}{10} \times 10 = 5$; $0.5 \times 100 = \underline{\hspace{2cm}}$; $0.5 \times 1000 = \underline{\hspace{2cm}}$		

పట్టికలోని లబ్ధాల దశాంశ బిందువు యొక్క మార్పును గమనించండి. ఇక్కడ సంఖ్యలు 10,100 మరియు 1000తో గుణించబడతాయి. $1.76 \times 10 = 17.6$ లో, అంకెలు ఒకే విధంగా ఉంటాయి అంటే, 1, 7 మరియు 6. మీరు ఇతర లబ్ధాలలో కూడా దీనిని గమనిస్తున్నారా? 1.76 మరియు 17.6 గమనించండి. దశాంశ బిందువు ఏ వైపుకు మార్చబడింది, కుడి లేదా ఎడమ? దశాంశ బిందువు ఒక స్థానం కుడివైపుకి మార్చబడింది. 10లో 1 తరువాత ఒక సున్నా ఉందని గమనించండి.

$1.76 \times 100 = 176.0$ లో 1.76 మరియు 176.0 ని గమనించండి. దశాంశ బిందువు ఏవైపుకు మరియు ఎన్ని అంకెల తరువాత మార్చబడింది? దశాంశ బిందువు రెండు స్థానాలు కుడివైపుకి మార్చబడింది. 100కి ఒకటి తరువాత రెండు సున్నాలు ఉన్నాయని గమనించండి.

ఇతర లబ్ధాలలో కూడా ఇదే విధంగా దశాంశ బిందువు మారడాన్ని మీరు గమనించారా?

So we say, *when a decimal number is multiplied by 10, 100 or 1000, the digits in the product are same as in the decimal number but the decimal point in the product is shifted to the right by as many of places as there are zeros over one.*

TRY THESE

- Find: (i) 0.3×10
 (ii) 1.2×100
 (iii) 56.3×1000

Based on these observations we can now say

$$0.07 \times 10 = 0.7, 0.07 \times 100 = 7 \text{ and } 0.07 \times 1000 = 70.$$

Can you now tell $2.97 \times 10 = ?$ $2.97 \times 100 = ?$ $2.97 \times 1000 = ?$

Can you now help Reshma to find the total amount i.e., ₹ 8.50×150 , that she has to pay?

EXERCISE 2.4



- Find:

(i) 0.2×6	(ii) 8×4.6	(iii) 2.71×5	(iv) 20.1×4
(v) 0.05×7	(vi) 211.02×4	(vii) 2×0.86	
- Find the area of rectangle whose length is 5.7cm and breadth is 3 cm.
- Find:

(i) 1.3×10	(ii) 36.8×10	(iii) 153.7×10	(iv) 168.07×10
(v) 31.1×100	(vi) 156.1×100	(vii) 3.62×100	(viii) 43.07×100
(ix) 0.5×10	(x) 0.08×10	(xi) 0.9×100	(xii) 0.03×1000
- A two-wheeler covers a distance of 55.3 km in one litre of petrol. How much distance will it cover in 10 litres of petrol?
- Find:

(i) 2.5×0.3	(ii) 0.1×51.7	(iii) 0.2×316.8	(iv) 1.3×3.1
(v) 0.5×0.05	(vi) 11.2×0.15	(vii) 1.07×0.02	
(viii) 10.05×1.05	(ix) 101.01×0.01	(x) 100.01×1.1	



2.4 DIVISION OF DECIMAL NUMBERS

Savita was preparing a design to decorate her classroom. She needed a few coloured strips of paper of length 1.9 cm each. She had a strip of coloured paper of length 9.5 cm. How many pieces of the required length will she get out of this strip? She thought it would

be $\frac{9.5}{1.9}$ cm. Is she correct?

Both 9.5 and 1.9 are decimal numbers. So we need to know the division of decimal numbers too!

2.4.1 Division by 10, 100 and 1000

Let us find the division of a decimal number by 10, 100 and 1000. Consider $31.5 \div 10$.

కాబట్టి మనం, ఒక దశాంశ సంఖ్యను 10, 100 లేదా 1000తో గుణించినప్పుడు, లబ్ధంలోని అంకాలు దశాంశ సంఖ్యలో ఉన్నట్లే ఉంటాయి, అయితే లబ్ధంలోని దశాంశ బిందువు 1 తరువాత ఎన్ని సున్నాలు ఉంటే అన్ని స్థానాలకు కుడివైపుకి మార్చబడుతుంది.

ఈ పరిశీలనల ఆధారంగా

$0.07 \times 10 = 0.7$, $0.07 \times 100 = 7$ మరియు $0.07 \times 1000 = 70$ అని మనం చెప్పగలం.

ఇప్పుడు మీరు $2.97 \times 10 = ?$ $2.97 \times 100 = ?$ $2.97 \times 1000 = ?$ అను చెప్పగలరా?

మీరు ఇప్పుడు రెప్పా చెల్లించాల్సిన మొత్తాన్ని అంటే $\text{₹}8.50 \times 150$ ని కనుక్కోవడంలో ఆమెకు సహాయం చేయగలరా?

ప్రయత్నించండి.

- కనుక్కోండి: (i) 0.3×10
(ii) 1.2×100
(iii) 56.3×1000

అభ్యాసం 2.4

1. కనుక్కోండి.

- (i) 0.2×6 (ii) 8×4.6 (iii) 2.71×5 (iv) 20.1×4
(v) 0.05×7 (vi) 211.02×4 (vii) 2×0.86

2. పొడవు 5.7 సెం.మీ మరియు వెడల్పు 3 సెం.మీ. గల దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యాన్ని కనుక్కోండి.

3. కనుక్కోండి:

- (i) 1.3×10 (ii) 36.8×10 (iii) 153.7×10 (iv) 168.07×10
(v) 31.1×100 (vi) 156.1×100 (vii) 3.62×100 (viii) 43.07×100
(ix) 0.5×10 (x) 0.08×10 (xi) 0.9×100 (xii) 0.03×1000

4. ద్విచక్ర వాహనం ఒక లీటర్ పెట్రోల్ తో 55.3 కి.మీ దూరం వెళ్ళితే 10 లీటర్ల పెట్రోల్ తో ఎంత దూరం వెళ్తుంది?

5. కనుక్కోండి.:

- (i) 2.5×0.3 (ii) 0.1×51.7 (iii) 0.2×316.8 (iv) 1.3×3.1
(v) 0.5×0.05 (vi) 11.2×0.15 (vii) 1.07×0.02
(viii) 10.05×1.05 (ix) 101.01×0.01 (x) 100.01×1.1

2.4 దశాంశ సంఖ్యల భాగాహారం

సవిత తన తరగతి గదిని అలంకరించేందుకు డిజైన్ ను సిద్ధం చేస్తోంది. ఆమెకు 1.9 సెంటీమీటర్ల పొడవు గల కొన్ని రంగుల కాగితాలు అవసరం. ఆమె 9.5 సెంటీమీటర్ల పొడవుగల రంగు కాగితాన్ని కలిగి ఉంది. ఆమె

ఈ రంగు కాగితం నుండి ఎన్ని అవసరమైన కాగితం ముక్కలు తీయగలదు? ఆమె అది $\frac{9.5}{1.9}$ సెం.మీ అని

అనుకుంటోంది. ఆమె సరిగ్గానే ఆలోచించిందా? 9.5 మరియు 1.9 రెండూ దశాంశ సంఖ్యలు. కాబట్టి దశాంశ సంఖ్యల విభజన కూడా తెలుసుకోవాలి!

2.4.1 10, 100 మరియు 1000 లతో భాగించడం

దశాంశ సంఖ్యను 10, 100 మరియు 1000తో భాగించడాన్ని కనుగొందాం.

$31.5 \div 10$ తీసుకుందాం.



$$31.5 \div 10 = \frac{315}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{315}{100} = 3.15$$

$$\text{Similarly, } 31.5 \div 100 = \frac{315}{10} \times \frac{1}{100} = \frac{315}{1000} = 0.315$$

Let us see if we can find a pattern for dividing numbers by 10, 100 or 1000. This may help us in dividing numbers by 10, 100 or 1000 in a shorter way.

$31.5 \div 10 = 3.15$	$231.5 \div 10 = \underline{\quad}$	$1.5 \div 10 = \underline{\quad}$	$29.36 \div 10 = \underline{\quad}$
$31.5 \div 100 = 0.315$	$231.5 \div 10 = \underline{\quad}$	$1.5 \div 100 = \underline{\quad}$	$29.36 \div 100 = \underline{\quad}$
$31.5 \div 1000 = 0.0315$	$231.5 \div 1000 = \underline{\quad}$	$1.5 \div 1000 = \underline{\quad}$	$29.36 \div 1000 = \underline{\quad}$

Take $31.5 \div 10 = 3.15$. In 31.5 and 3.15, the digits are same i.e., 3, 1, and 5 but the decimal point has shifted in the quotient. To which side and by how many digits? The decimal point has shifted to the left by one place. Note that 10 has one zero over 1.

Consider now $31.5 \div 100 = 0.315$. In 31.5 and 0.315 the digits are same, but what about the decimal point in the quotient? It has shifted to the left by two places. Note that 100 has two zeros over 1.

So we can say that, *while dividing a number by 10, 100 or 1000, the digits of the number and the quotient are same but the decimal point in the quotient shifts to the left by as many places as there are zeros over 1.* Using this observation let us now quickly find: $2.38 \div 10 = 0.238$, $2.38 \div 100 = 0.0238$, $2.38 \div 1000 = 0.00238$

TRY THESE



- Find: (i) $235.4 \div 10$
 (ii) $235.4 \div 100$
 (iii) $235.4 \div 1000$

2.4.2 Division of a Decimal Number by a Whole Number

Let us find $\frac{6.4}{2}$. Remember we also write it as $6.4 \div 2$.

So, $6.4 \div 2 = \frac{64}{10} \div 2 = \frac{64}{10} \times \frac{1}{2}$ as learnt in fractions.

$$= \frac{64 \times 1}{10 \times 2} = \frac{1 \times 64}{10 \times 2} = \frac{1}{10} \times \frac{64}{2} = \frac{1}{10} \times 32 = \frac{32}{10} = 3.2$$

Or, let us first divide 64 by 2. We get 32. There is one digit to the right of the decimal point in 6.4. Place the decimal in 32 such that there would be one digit to its right. We get 3.2 again.

To find $19.5 \div 5$, first find $195 \div 5$. We get 39. There is one digit to the right of the decimal point in 19.5. Place the decimal point in 39 such that there would be one digit to its right. You will get 3.9.

TRY THESE

- (i) $35.7 \div 3 = ?$;
 (ii) $25.5 \div 3 = ?$



TRY THESE

- (i) $43.15 \div 5 = ?$;
 (ii) $82.44 \div 6 = ?$

$$31.5 \div 10 = \frac{315}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{315}{100} = 3.15$$

$$\text{అదేవిధంగా, } 31.5 \div 100 = \frac{315}{10} \times \frac{1}{100} = \frac{315}{1000} = 0.315$$

సంఖ్యలను 10, 100 లేదా 1000తో భాగించే ఒక అమరికను మనం కనుక్కోగలమా అని చూద్దాం. ఇది సంఖ్యలను 10, 100 లేదా 1000తో భాగించడానికి సూక్ష్మ పద్ధతిగా మనకు సహాయపడవచ్చు.

$31.5 \div 10 = 3.15$	$231.5 \div 10 = \underline{\quad}$	$1.5 \div 10 = \underline{\quad}$	$29.36 \div 10 = \underline{\quad}$
$31.5 \div 100 = 0.315$	$231.5 \div 10 = \underline{\quad}$	$1.5 \div 100 = \underline{\quad}$	$29.36 \div 100 = \underline{\quad}$
$31.5 \div 1000 = 0.0315$	$231.5 \div 1000 = \underline{\quad}$	$1.5 \div 1000 = \underline{\quad}$	$29.36 \div 1000 = \underline{\quad}$

$31.5 \div 10 = 3.15$ ని తీసుకోండి. 31.5 మరియు 3.15లో, అంకెలు ఒకేలా ఉన్నాయి అంటే, 3, 1 మరియు 5 అయితే దశాంశ బిందువు భాగఫలంలో మారింది. ఏ వైపు మరియు ఎన్ని అంకెలకు మారింది? దశాంశ బిందువు ఒక స్థానం ఎడమవైపుకి మార్చబడింది. 10 లో 1 తరువాత ఒక సున్నా ఉందని గమనించండి.

ఇప్పుడు $31.5 \div 100 = 0.315$ గా పరిగణించండి. 31.5 మరియు 0.315లో అంకెలు ఒకేలా ఉన్నాయి, అయితే గుణకంలోని దశాంశ బిందువు సంగతి ఏమిటి? ఇది రెండు స్థానాలు ఎడమవైపుకు మారింది. 100లో 1 తరువాత రెండు సున్నాలు ఉన్నాయని గమనించండి.

కాబట్టి మనం, ఒక సంఖ్యను 10, 100 లేదా 1000తో భాగించినప్పుడు, సంఖ్యలో మరియు భాగఫలంలో అంకెలు ఒకేలా ఉంటాయని చెప్పగలం, అయితే 1 తరువాత ఎన్ని ఎక్కువ సున్నాలు ఉంటే అన్నీ స్థానాలకు భాగఫలంలోని దశాంశ బిందువు ఎడమవైపుకు మార్చబడుతుంది. ఈ పరిశీలనను ఉపయోగించి, $2.38 \div 10 = 0.238$, $2.38 \div 100 = 0.0238$, $2.38 \div 1000 = 0.00238$ లను త్వరగా కనుక్కోండి.

2.4.2 దశాంశ సంఖ్యని పూర్ణాంకంతో భాగించడం

$\frac{6.4}{2}$ ను కనుగొందాం. మనం దానిని $6.4 \div 2$ అని కూడా రాస్తామని గుర్తుంచుకోండి.

కావున, $6.4 \div 2 = \frac{64}{10} \div 2 = \frac{64}{10} \times \frac{1}{2}$ భిన్నాలలో నేర్చుకున్నవిధంగా

$$= \frac{64 \times 1}{10 \times 2} = \frac{1 \times 64}{10 \times 2} = \frac{1}{10} \times \frac{64}{2} = \frac{1}{10} \times 32 = \frac{32}{10} = 3.2$$

లేదా, ముందు 64ని 2తో భాగిద్దాం. మనకు 32 వస్తుంది. 6.4లో దశాంశ బిందువుకు కుడివైపున ఒక అంకె ఉంది. దశాంశ బిందువును మనం మళ్ళీ 32లో ఉంచండి అంటే దాని కుడివైపున ఒక అంకె ఉంటుంది. మీరు మళ్ళీ 3.2 పొందుతారు.

$19.5 \div 5$ ని కనుక్కోవడానికి, ముందుగా $195 \div 5$ ని కనుక్కోండి. మనకు 39 వస్తుంది. 19.5 లో దశాంశ బిందువుకు కుడివైపున ఒక అంకె ఉంది. దశాంశ బిందువును 39లో ఉంచండి అంటే దాని కుడివైపున ఒక అంకె ఉంటుంది. మీరు 3.9 పొందుతారు.

ప్రయత్నించండి.



- కనుక్కోండి: (i) $235.4 \div 10$
(ii) $235.4 \div 100$
(iii) $235.4 \div 1000$

ప్రయత్నించండి.

- (i) $35.7 \div 3 = ?$;
(ii) $25.5 \div 3 = ?$



ప్రయత్నించండి.

- (i) $43.15 \div 5 = ?$;
(ii) $82.44 \div 6 = ?$

TRY THESEFind: (i) $15.5 \div 5$ (ii) $126.35 \div 7$

$$\text{Now, } 12.96 \div 4 = \frac{1296}{100} \div 4 = \frac{1296}{100} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{100} \times \frac{1296}{4} = \frac{1}{100} \times 324 = 3.24$$

Or, divide 1296 by 4. You get 324. There are two digits to the right of the decimal in 12.96. Making similar placement of the decimal in 324, you will get 3.24.

Note that here and in the next section, we have considered only those divisions in which, ignoring the decimal, the number would be completely divisible by another number to give remainder zero. Like, in $19.5 \div 5$, the number 195 when divided by 5, leaves remainder zero.

However, there are situations in which the number may not be completely divisible by another number, i.e., we may not get remainder zero. For example, $195 \div 7$. We deal with such situations in later classes.

EXAMPLE 5 Find the average of 4.2, 3.8 and 7.6.

SOLUTION The average of 4.2, 3.8 and 7.6 is $\frac{4.2 + 3.8 + 7.6}{3} = \frac{15.6}{3} = 5.2$.

2.4.3 Division of a Decimal Number by another Decimal Number

Let us find $\frac{25.5}{0.5}$ i.e., $25.5 \div 0.5$.

$$\text{We have } 25.5 \div 0.5 = \frac{255}{10} \div \frac{5}{10} = \frac{255}{10} \times \frac{10}{5} = 51. \quad \text{Thus, } 25.5 \div 0.5 = 51$$

What do you observe? For $\frac{25.5}{0.5}$, we find that there is one digit to the right of the decimal in 0.5. This could be converted to whole number by dividing by 10. Accordingly 25.5 was also converted to a fraction by dividing by 10.

Or, we say the decimal point was shifted by one place to the right in 0.5 to make it 5. So, there was a shift of one decimal point to the right in 25.5 also to make it 255.

$$\text{Thus, } 22.5 \div 1.5 = \frac{225}{15} = \frac{225}{15} = 15$$

Find $\frac{20.3}{0.7}$ and $\frac{15.2}{0.8}$ in a similar way.

Let us now find $20.55 \div 1.5$.

We can write it as $205.5 \div 15$, as discussed above. We get 13.7. Find $\frac{3.96}{0.4}$, $\frac{2.31}{0.3}$.

TRY THESEFind: (i) $\frac{7.75}{0.25}$ (ii) $\frac{42.8}{0.02}$ (iii) $\frac{5.6}{1.4}$

ప్రయత్నించండి

కనుక్కోండి : (i) $15.5 \div 5$

(ii) $126.35 \div 7$

$$\text{ఇప్పుడు, } 12.96 \div 4 = \frac{1296}{100} \div 4 = \frac{1296}{100} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{100} \times \frac{1296}{4} = \frac{1}{100} \times 324 = 3.24$$

లేదా 1296 ని 4తో భాగించండి. మీకు 324 వస్తుంది. 12.96 లో దశాంశ బిందువుకు కుడివైపున రెండు అంకెలు ఉన్నాయి. 324లో ఇదేవిధమైన దశాంశ బిందువు స్థానం స్థిరీకరిస్తే మీరు 3.24 పొందుతారు.

ఇక్కడ మరియు తదుపరి విభాగంలో, మనం దశాంశాన్ని విస్తరించి, ఒక సంఖ్య మరొక సంఖ్యతో పూర్తిగా భాగించగల అంటే శేషం సున్న వచ్చే భాగాహారాలను మాత్రమే పరిగణిస్తామని గమనించండి. $19.5 \div 5$, 195 సంఖ్యను 5తో భాగిస్తే, శేషం సున్నా అవుతుంది.

అయినప్పటికీ, సంఖ్యను మరొక సంఖ్యతో నిశ్శేషంగా భాగించలేని సందర్భాలు ఉన్నాయి, అనగా, మనం శేషం సున్నాని పొందలేము. ఉదాహరణకు, $195 \div 7$. మనం తరువాత తరగతులలో అటువంటి పరిస్థితులతో వ్యవహరిస్తాము.

ఉదాహరణ 5 4.2, 3.8 మరియు 7.6 యొక్క సగటును కనుక్కోండి.

సాధన $4.2, 3.8$ మరియు 7.6 యొక్క సగటు $\frac{4.2 + 3.8 + 7.6}{3} = \frac{15.6}{3} = 5.2$.

2.4.3 ఒక దశాంశ సంఖ్యను మరొక దశాంశ సంఖ్యతో భాగించడం

$\frac{25.5}{0.5}$ అనగా, $25.5 \div 0.5$ ను కనుక్కుదాం.

మనకు $25.5 \div 0.5 = \frac{255}{10} \div \frac{5}{10} = \frac{255}{10} \times \frac{10}{5} = 51$. కావున, $25.5 \div 0.5 = 51$

$\frac{25.5}{0.5}$, కోసం, మీరు ఏమి గమనించారు? 0.5 లో దశాంశ బిందువుకి కుడివైపున ఒక అంకె ఉందని

మనం కనుగొన్నాము. దీన్ని 10తో భాగించడం ద్వారా పూర్ణాంకంగా మార్చవచ్చు. దీని ప్రకారం 25.5 కూడా 10తో భాగించడం ద్వారా భిన్నంగా మార్చబడింది.

లేదా, 5 గా మార్చడానికి దశాంశ బిందువును 0.5లో కుడివైపుకి ఒక స్థానానికి మార్చినట్లు చెప్తాము. కాబట్టి, 25.5లో కూడా ఒక దశాంశ బిందువును కుడివైపుకి మార్చడం ద్వారా దానిని 255గా మార్చారు.

అందువలన, $22.5 \div 1.5 = \frac{22.5}{1.5} = \frac{225}{15} = 15$ అవుతుంది.

అదేవిధంగా $\frac{20.3}{0.7}$ మరియు $\frac{15.2}{0.8}$ కనుగొందాం.

ఇప్పుడు మనం $20.55 \div 1.5$ కనుగొందాం.

ప్రయత్నించండి

కనుక్కోండి: (i) $\frac{7.75}{0.25}$ (ii) $\frac{42.8}{0.02}$ (iii) $\frac{5.6}{1.4}$

$205.5 \div 15$ దీన్ని మనం పైన చర్చించిన విధంగా రాసిన మనకు 13.7 వస్తుంది. $\frac{3.96}{0.4}, \frac{2.31}{0.3}$

కనుగొనండి.

Consider now, $\frac{33.725}{0.25}$. We can write it as $\frac{3372.5}{25}$ (How?) and we get the quotient as 134.9. How will you find $\frac{27}{0.03}$? We know that 27 can be written as 27.00.

So,
$$\frac{27}{0.03} = \frac{27.00}{0.03} = \frac{2700}{3} = 900$$

EXAMPLE 6 Each side of a regular polygon is 2.5 cm in length. The perimeter of the polygon is 12.5 cm. How many sides does the polygon have?

SOLUTION The perimeter of a regular polygon is the sum of the lengths of all its equal sides = 12.5 cm.

Length of each side = 2.5 cm. Thus, the number of sides = $\frac{12.5}{2.5} = \frac{125}{25} = 5$

The polygon has 5 sides.

EXAMPLE 7 A car covers a distance of 89.1 km in 2.2 hours. What is the average distance covered by it in 1 hour?

SOLUTION Distance covered by the car = 89.1 km.

Time required to cover this distance = 2.2 hours.

So distance covered by it in 1 hour = $\frac{89.1}{2.2} = \frac{891}{22} = 40.5$ km.

EXERCISE 2.5

1. Find:

(i) $0.4 \div 2$

(ii) $0.35 \div 5$

(iii) $2.48 \div 4$

(iv) $65.4 \div 6$

(v) $651.2 \div 4$

(vi) $14.49 \div 7$

(vii) $3.96 \div 4$

(viii) $0.80 \div 5$

2. Find:

(i) $4.8 \div 10$

(ii) $52.5 \div 10$

(iii) $0.7 \div 10$

(iv) $33.1 \div 10$

(v) $272.23 \div 10$

(vi) $0.56 \div 10$

(vii) $3.97 \div 10$

3. Find:

(i) $2.7 \div 100$

(ii) $0.3 \div 100$

(iii) $0.78 \div 100$

(iv) $432.6 \div 100$

(v) $23.6 \div 100$

(vi) $98.53 \div 100$

4. Find:

(i) $7.9 \div 1000$

(ii) $26.3 \div 1000$

(iii) $38.53 \div 1000$

(iv) $128.9 \div 1000$

(v) $0.5 \div 1000$



ఇప్పుడు $\frac{33.725}{0.25}$ ని పరిగణించండి. దీన్ని $\frac{3372.5}{25}$ గా రాయవచ్చు. (ఎలా?) మరియు

134.9 భాగఫలంగా పొందుతాము. $\frac{27}{0.03}$ ఎలా కనుక్కుంటావు? 27ని 27.00గా రాయవచ్చని మనకు తెలుసు.

$$\text{కాబట్టి, } \frac{27}{0.03} = \frac{27.00}{0.03} = \frac{2700}{3} = 900$$

ఉదాహరణ 6 క్రమ బహుభుజి యొక్క ప్రతి భుజం పొడవు 2.5 సెం.మీ. బహుభుజి చుట్టుకొలత 12.5 సెం.మీ. బహుభుజికి ఎన్ని భుజాలు ఉన్నాయి?

సాధన క్రమబహుభుజి యొక్క చుట్టుకొలత దాని అన్ని సమాన భుజాల పొడవుల మొత్తం = 12.5 సెం.మీ.కి సమానం.

$$\begin{aligned} \text{ప్రతి భుజం పొడవు} &= 2.5 \text{ సెం.మీ. అందువలన, భుజాల సంఖ్య} &= \frac{12.5}{2.5} \\ &= \frac{125}{25} = 5 \text{ బహుభుజి 5 భుజాలను కలిగివుంది.} \end{aligned}$$

ఉదాహరణ 7 ఒక కారు 2.2 గంటలలో 89.1 కి.మీ. దూరం ప్రయాణిస్తుంది. ఇది 1గం||లో ప్రయాణించగల సగటు దూరం ఎంత?

సాధన కారు ప్రయాణించిన దూరం = 89.1 కి.మీ.

ఈ దూరం ప్రయాణించడానికి పట్టే కాలం = 2.2 గం||లు.

$$\text{కావున, 1 గం||లో ప్రయాణించగల సగటు దూరం} = \frac{89.1}{2.2} = \frac{891}{22} = 40.5 \text{ కి.మీ.}$$

అభ్యాసం 2.5

1. కనుక్కోండి :

- | | | | |
|--------------------|---------------------|---------------------|----------------------|
| (i) $0.4 \div 2$ | (ii) $0.35 \div 5$ | (iii) $2.48 \div 4$ | (iv) $65.4 \div 6$ |
| (v) $651.2 \div 4$ | (vi) $14.49 \div 7$ | (vii) $3.96 \div 4$ | (viii) $0.80 \div 5$ |

2. కనుక్కోండి :

- | | | | |
|----------------------|---------------------|----------------------|---------------------|
| (i) $4.8 \div 10$ | (ii) $52.5 \div 10$ | (iii) $0.7 \div 10$ | (iv) $33.1 \div 10$ |
| (v) $272.23 \div 10$ | (vi) $0.56 \div 10$ | (vii) $3.97 \div 10$ | |

3. కనుక్కోండి :

- | | | |
|-----------------------|---------------------|-----------------------|
| (i) $2.7 \div 100$ | (ii) $0.3 \div 100$ | (iii) $0.78 \div 100$ |
| (iv) $432.6 \div 100$ | (v) $23.6 \div 100$ | (vi) $98.53 \div 100$ |

4. కనుక్కోండి :

- | | | |
|------------------------|-----------------------|-------------------------|
| (i) $7.9 \div 1000$ | (ii) $26.3 \div 1000$ | (iii) $38.53 \div 1000$ |
| (iv) $128.9 \div 1000$ | (v) $0.5 \div 1000$ | |



5. Find:
- (i) $7 \div 3.5$ (ii) $36 \div 0.2$ (iii) $3.25 \div 0.5$ (iv) $30.94 \div 0.7$
 (v) $0.5 \div 0.25$ (vi) $7.75 \div 0.25$ (vii) $76.5 \div 0.15$ (viii) $37.8 \div 1.4$
 (ix) $2.73 \div 1.3$
6. A vehicle covers a distance of 43.2 km in 2.4 litres of petrol. How much distance will it cover in one litre of petrol?

WHAT HAVE WE DISCUSSED?

- We have learnt how to multiply fractions. Two fractions are multiplied by multiplying their numerators and denominators separately and writing the product as $\frac{\text{product of numerators}}{\text{product of denominators}}$. For example, $\frac{2}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{2 \times 5}{3 \times 7} = \frac{10}{21}$.
- A fraction acts as an operator 'of'. For example, $\frac{1}{2}$ of 2 is $\frac{1}{2} \times 2 = 1$.
- The product of two proper fractions is less than each of the fractions that are multiplied.
 - The product of a proper and an improper fraction is less than the improper fraction and greater than the proper fraction.
 - The product of two improper fractions is greater than the two fractions.
- A reciprocal of a fraction is obtained by inverting it upside down.
- We have seen how to divide two fractions.
 - While dividing a whole number by a fraction, we multiply the whole number with the reciprocal of that fraction.
 For example, $2 \div \frac{3}{5} = 2 \times \frac{5}{3} = \frac{10}{3}$
 - While dividing a fraction by a whole number we multiply the fraction by the reciprocal of the whole number.
 For example, $\frac{2}{3} \div 7 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{7} = \frac{2}{21}$
 - While dividing one fraction by another fraction, we multiply the first fraction by the reciprocal of the other. So, $\frac{2}{3} \div \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \times \frac{7}{5} = \frac{14}{15}$.
- We also learnt how to multiply two decimal numbers. While multiplying two decimal numbers, first multiply them as whole numbers. Count the number of digits to the right of the decimal point in both the decimal numbers. Add the number of digits counted. Put the decimal point in the product by counting the digits from its rightmost place. The count should be the sum obtained earlier.
 For example, $0.5 \times 0.7 = 0.35$

5. కనుక్కోండి :

- (i) $7 \div 3.5$ (ii) $36 \div 0.2$ (iii) $3.25 \div 0.5$ (iv) $30.94 \div 0.7$
 (v) $0.5 \div 0.25$ (vi) $7.75 \div 0.25$ (vii) $76.5 \div 0.15$ (viii) $37.8 \div 1.4$
 (ix) $2.73 \div 1.3$

6. ఒక వాహనం 2.4 లీటర్ల పెట్రోల్‌తో 43.2 కి.మీ. దూరం ప్రయాణిస్తుంది. అయితే ఒక లీటర్ పెట్రోల్‌తో అది ఎంత దూరం ప్రయాణం చేస్తుంది?

మనం ఏం చర్చివాం?

1. భిన్నాలను ఎలా గుణించాలో నేర్చుకున్నాము. రెండు భిన్నాల గుణకారం వాటి లవాలను

మరియు హారాలను విడిగా గుణించడం ద్వారా వస్తుంది మరియు లబ్ధాన్ని $\frac{\text{లవాల లబ్ధం}}{\text{హారాల లబ్ధం}}$

$$\text{ఉదాహరణకు, } \frac{2}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{2 \times 5}{3 \times 7} = \frac{10}{21}$$

2. ఒక భిన్నం 'లో' పరిక్రియగా పనిచేస్తుంది. ఉదాహరణకు 2 లో $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 2 = 1$.

3. (a) రెండు క్రమ భిన్నాల లబ్ధం వాటిలోని ప్రతి ఒక్క భిన్నం కంటే తక్కువగా ఉంటుంది.

(b) ఒక క్రమభిన్నం మరియు అపక్రమభిన్నం యొక్క లబ్ధం అపక్రమ భిన్నం కంటే తక్కువ మరియు క్రమభిన్నం కంటే ఎక్కువ.

(c) రెండు అపక్రమ భిన్నాల లబ్ధం రెండు భిన్నాల కంటే ఎక్కువగా ఉంటుంది.

4. భిన్నం యొక్క వ్యుత్క్రమం దానిని తలక్రిందులుగా మార్చడం ద్వారా పొందబడుతుంది.

5. రెండు భిన్నాలను ఎలా భాగించాలో మనం చూశాము.

(a) పూర్ణాంకమును భిన్నంతో భాగిస్తున్నప్పుడు, మనం ఆ భిన్నం యొక్క వ్యుత్క్రమంను పూర్ణాంకముతో గుణిస్తాము.

$$\text{ఉదాహరణకు, } 2 \div \frac{3}{5} = 2 \times \frac{5}{3} = \frac{10}{3}$$

(b) ఒక భిన్నాన్ని మరొక భిన్నంతో భాగించే సమయంలో, మనం మొదటి భిన్నాన్ని మరొకదాని వ్యుత్క్రమంతో గుణిస్తాము.

$$\text{ఉదాహరణకు } \frac{2}{3} \div 7 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{7} = \frac{2}{21}$$

(c) ఒక భిన్నాన్ని మరొక భిన్నంతో భాగించే సమయంలో, మనం మొదటి భిన్నాన్ని మరొకదాని వ్యుత్క్రమంతో గుణిస్తాము.

$$\text{కాబట్టి, } \frac{2}{3} \div \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \times \frac{7}{5} = \frac{14}{15}$$

6. మనం రెండు దశాంశ సంఖ్యలను ఎలా గుణించాలో కూడా నేర్చుకున్నాము. రెండు దశాంశ సంఖ్యలను గుణించేటప్పుడు, ముందుగా వాటిని పూర్ణాంకాలుగా గుణించండి. రెండు దశాంశ సంఖ్యలలో దశాంశ బిందువు యొక్క కుడి వైపున ఉన్న అంకెల సంఖ్యను లెక్కించండి. లెక్కించిన అంకెల సంఖ్యను కలపండి. లబ్ధంలో కుడివైపున ఉన్న స్థానం నుండి అంకెలను లెక్కించడం ద్వారా దశాంశ బిందువును ఉంచండి. అంకెల గణన ముందుగా పొందిన మొత్తం అయివుండాలి.

$$\text{ఉదాహరణకు, } 0.5 \times 0.7 = 0.35$$

7. To multiply a decimal number by 10, 100 or 1000, we move the decimal point in the number to the right by as many places as there are zeros over 1.

$$\text{Thus } 0.53 \times 10 = 5.3, \quad 0.53 \times 100 = 53, \quad 0.53 \times 1000 = 530$$

8. We have seen how to divide decimal numbers.

- (a) To divide a decimal number by a whole number, we first divide them as whole numbers. Then place the decimal point in the quotient as in the decimal number.

For example, $8.4 \div 4 = 2.1$

Note that here we consider only those divisions in which the remainder is zero.

- (b) To divide a decimal number by 10, 100 or 1000, shift the digits in the decimal number to the left by as many places as there are zeros over 1, to get the quotient.

$$\text{So, } 23.9 \div 10 = 2.39, 23.9 \div 100 = 0.239, 23.9 \div 1000 = 0.0239$$

- (c) While dividing two decimal numbers, first shift the decimal point to the right by equal number of places in both, to convert the divisor to a whole number. Then divide. Thus, $2.4 \div 0.2 = 24 \div 2 = 12$.



7. ఒక దశాంశ సంఖ్యను 10, 100, 1000 వంటి సంఖ్యలచే గుణించునపుడు, ఈ సంఖ్యలలో సున్నాల సంఖ్యను లెక్కించి లబ్ధంలో అన్ని స్థానాలు కుడివైపుకు దశాంశ సంఖ్యలో గల దశాంశ బిందువును జరుపుతాం..

అందువల్ల, $0.53 \times 10 = 5.3$, $0.53 \times 100 = 53$, $0.53 \times 1000 = 530$

8. దశాంశ సంఖ్యలను ఎలా భాగించాలో మనం చూశాము.

- (a) దశాంశ సంఖ్యను పూర్ణాంకంతో భాగించడానికి, మనం మొదట వాటిని పూర్ణాంకాలుగా భాగిస్తాము. అప్పుడు దశాంశ సంఖ్యలో వలె భాగఫలంలో దశాంశ బిందువును ఉంచండి.

ఉదాహరణకు, $8.4 \div 4 = 2.1$

ఇక్కడ మనం శేషం సున్నా ఇచ్చే భాగాహారాలను మాత్రమే తీసుకుంటాము అని గమనించండి.

- (b) ఒక దశాంశ సంఖ్యను 10, 100, 1000 వంటి సంఖ్యలచే భాగించునపుడు, ఈ సంఖ్యలలో సున్నాల సంఖ్యను లెక్కించి భాగఫలంలో అన్ని స్థానాలు ఎడమవైపుకు దశాంశ బిందువును జరుపుతాం.

కాబట్టి, $23.9 \div 10 = 2.39$, $23.9 \div 100 = 0.239$, $23.9 \div 1000 = 0.0239$

- (c) రెండు దశాంశ సంఖ్యలను భాగించునపుడు, విభజకంను పూర్ణాంకం చేయుటకు లవ, హారాలను సమాన స్థానాలు జరిపి భాగించాలి.

ఈ విధంగా, $2.4 \div 0.2 = 24 \div 2 = 12$.



Data Handling



3.1 REPRESENTATIVE VALUES

You might be aware of the term *average* and would have come across statements involving the term ‘average’ in your day-to-day life:

- Isha spends on an average of about 5 hours daily for her studies.
- The average temperature at this time of the year is about 40 degree celsius.
- The average age of pupils in my class is 12 years.
- The average attendance of students in a school during its final examination was 98 per cent.

Many more of such statements could be there. Think about the statements given above.

Do you think that the child in the first statement studies exactly for 5 hours daily?

Or, is the temperature of the given place during that particular time always 40 degrees?

Or, is the age of each pupil in that class 12 years? Obviously not.

Then what do these statements tell you?

By average we understand that Isha, usually, studies for 5 hours. On some days, she may study for less number of hours and on the other days she may study longer.

Similarly, the average temperature of 40 degree celsius, means that, very often, the temperature at this time of the year is around 40 degree celsius. Sometimes, it may be less than 40 degree celsius and at other times, it may be more than 40°C.

Thus, we realise that average is a number that represents or shows the central tendency of a group of observations or data. Since average lies between the highest and the lowest value of the given data so, we say average is a measure of the central tendency of the group of data. Different forms of data need different forms of representative or central value to describe it. One of these representative values is the “**Arithmetic mean**”. You will learn about the other representative values in the later part of the chapter.

దత్తాంశ నిర్వహణ



అధ్యాయము - 3



3.1 ప్రాతినిధ్య విలువలు

మీకు సరాసరి అనే పదం గురించి తెలిసి ఉండవచ్చు మరియు మీ రోజువారీ జీవితంలో 'సరాసరి' అనే పదానికి సంబంధించిన సందర్భాలను చూడవచ్చు:

- ఇషా తన చదువుల కోసం ప్రతిరోజూ సరాసరి 5 గంటలు వెచ్చిస్తుంది.
- ఏడాదిలో ఈ సమయంలో సరాసరి ఉష్ణోగ్రత సుమారు 40 డిగ్రీల సెల్సియస్ ఉంటుంది.
- నా తరగతిలో విద్యార్థుల సరాసరి వయస్సు 12 సంవత్సరాలు.
- ఒక పాఠశాలలో అంత్య పరీక్ష సమయంలో విద్యార్థుల సరాసరి హాజరు 98 శాతం.

ఇలాంటి సందర్భాలు ఇంకా చాలా ఉండవచ్చు. పైన ఇచ్చిన సందర్భాల గురించి ఆలోచించండి. మొదటి సందర్భంలోని

పిల్లవాడు రోజూ సరిగ్గా 5 గంటలు చదువుతాడని మీరు అనుకుంటున్నారా?

లేదా, ఆ నిర్దిష్ట సమయంలో ఇచ్చిన ప్రదేశం యొక్క ఉష్ణోగ్రత ఎల్లప్పుడూ 40 డిగ్రీలుగా ఉందా?

లేదా, ఆ తరగతిలోని ప్రతి విద్యార్థి వయస్సు 12 సంవత్సరాలా? ఖచ్చితంగా కాదు.

అప్పుడు ఈ ప్రకటనలు మీకు ఏమి తెలుపుతున్నాయి?

సాధారణంగా ఇషా సరాసరి 5 గంటలు చదువుతుందని మనం అర్థం చేసుకుంటాము. కొన్ని రోజులలో, ఆమె తక్కువ గంటలు చదువుకోవచ్చు మరియు ఇతర రోజులలో ఆమె ఎక్కువసేపు చదువుకోవచ్చు.

అదేవిధంగా, సగటు ఉష్ణోగ్రత 40 డిగ్రీల సెల్సియస్, అంటే చాలా తరచుగా, సంవత్సరంలో ఈ సమయంలో ఉష్ణోగ్రత సుమారు 40 డిగ్రీల సెల్సియస్ ఉంటుంది. కొన్నిసార్లు, ఇది 40 డిగ్రీల సెల్సియస్ కంటే తక్కువగా ఉండవచ్చు మరియు ఇతర సమయాల్లో, ఇది 40°C కంటే ఎక్కువగా ఉండవచ్చు.

అందువల్ల, సగటు అనేది పరిశీలనలు లేదా దత్తాంశ సమూహం యొక్క కేంద్రీయ ప్రవృత్తికి ప్రాతినిధ్యం వహించే లేదా చూపించే సంఖ్య అని మనము గ్రహిస్తాము. ఇచ్చిన దత్తాంశం యొక్క అత్యధిక మరియు అత్యల్ప విలువ మధ్య సగటు ఉంటుంది కాబట్టి, మనము సగటు అనేది దత్తాంశ సమూహం యొక్క కేంద్రీయ ప్రవృత్తికి కొలమానం అని అంటాము. దత్తాంశం యొక్క విభిన్న రూపాలకు దానిని వివరించడానికి వివిధ రకాల ప్రాతినిధ్య లేదా కేంద్రీయ విలువలు అవసరం. ఈ ప్రాతినిధ్య విలువల్లో ఒకటి "అంకగణిత సగటు".

మీరు అధ్యాయం యొక్క తరువాతి భాగంలో ఇతర ప్రాతినిధ్య విలువల గురించి నేర్చుకుంటారు.

3.2 ARITHMETIC MEAN

The most common representative value of a group of data is the **arithmetic mean** or the **mean**. To understand this in a better way, let us look at the following example:

Two vessels contain 20 litres and 60 litres of milk respectively. What is the amount that each vessel would have, if both share the milk equally? When we ask this question we are seeking the arithmetic mean.

In the above case, the average or the arithmetic mean would be

$$\frac{\text{Total quantity of milk}}{\text{Number of vessels}} = \frac{20 + 60}{2} \text{ litres} = 40 \text{ litres.}$$

Thus, each vessels would have 40 litres of milk.

The average or Arithmetic Mean (A.M.) or simply mean is defined as follows:

$$\text{mean} = \frac{\text{Sum of all observations}}{\text{number of observations}}$$

Consider these examples.

EXAMPLE 1 Ashish studies for 4 hours, 5 hours and 3 hours respectively on three consecutive days. How many hours does he study daily on an average?

SOLUTION The average study time of Ashish would be

$$\frac{\text{Total number of study hours}}{\text{Number of days for which he studied}} = \frac{4 + 5 + 3}{3} \text{ hours} = 4 \text{ hours per day}$$

Thus, we can say that Ashish studies for 4 hours daily on an average.

EXAMPLE 2 A batsman scored the following number of runs in six innings:

36, 35, 50, 46, 60, 55

Calculate the mean runs scored by him in an inning.

SOLUTION Total runs = $36 + 35 + 50 + 46 + 60 + 55 = 282$.

To find the mean, we find the sum of all the observations and divide it by the number of observations.

Therefore, in this case, $\text{mean} = \frac{282}{6} = 47$. Thus, the mean runs scored in an inning are 47.

Where does the arithmetic mean lie



TRY THESE

How would you find the average of your study hours for the whole week?

3.2 అంకగణిత సగటు

దత్తాంశ సమూహం యొక్క అత్యంత సాధారణ ప్రాతినిధ్య విలువ అంకగణిత సగటు లేదా సగటు అవుతుంది. దీన్ని మరింత మెరుగ్గా అర్థం చేసుకోవడానికి, ఈ క్రింది ఉదాహరణను చూద్దాం:

రెండు పాత్రలలో వరుసగా 20 లీటర్లు మరియు 60 లీటర్ల పాలు ఉన్నాయి. పాలను రెండింటికీ సమానంగా పంచితే, ఒక్కొక్క పాత్ర ఎంత మొత్తం పాలను కలిగి ఉంటుంది? మనము ఈ ప్రశ్నను అడిగినప్పుడు మనము అంకగణిత సగటును రాబడుతున్నాము.

పై సందర్భంలో, సగటు లేదా అంకగణిత సగటు ఇలా ఉంటుంది

$$\frac{\text{మొత్తం పాల పరిమాణం}}{\text{పాత్రల సంఖ్య}} = \frac{20 + 60}{2} \text{ లీటర్లు} = 40 \text{ లీటర్లు.}$$

ఈ విధంగా, ఒక్కో పాత్రలో 40 లీటర్ల పాలు ఉంటాయి.

సగటు లేదా అంకగణిత సగటు (A.M.) లేదా సాధారణ సగటు క్రింది విధంగా నిర్వచించబడింది:

$$\text{సగటు} = \frac{\text{అన్ని పరిశీలనాంశాల మొత్తం}}{\text{పరిశీలనాంశాల సంఖ్య}}$$

ఈ ఉదాహరణలను పరిగణించండి.

ఉదాహరణ 1 ఆశిష్ మూడు వరుస రోజులలో వరుసగా 4 గంటలు, 5 గంటలు మరియు 3 గంటల పాటు చదువుతాడు. అతను రోజుకు సగటున ఎన్ని గంటలు చదువుతాడు?

సాధన

ఆశిష్ చదివే సమయం యొక్క సగటు

$$\frac{\text{మొత్తం చదివిన గంటల సంఖ్య}}{\text{అతను చదివిన రోజుల సంఖ్య}} = \frac{4 + 5 + 3}{3} \text{ గంటలు} = 4 \text{ గంటలు}$$

ఈవిధంగా, ఆశిష్ రోజుకు సగటున 4 గంటలు చదువుతాడని చెప్పవచ్చు.

ఉదాహరణ 2 ఒక బ్యాట్స్‌మన్ ఆరు ఇన్నింగ్స్ లలో చేసిన పరుగుల సంఖ్య కింద ఇవ్వబడినవి.
36, 35, 50, 46, 60, 55

ఒక ఇన్నింగ్స్ లో అతను చేసిన సగటు పరుగులను లెక్కించండి.

సాధన

$$\text{మొత్తం పరుగులు} = 36 + 35 + 50 + 46 + 60 + 55 = 282.$$

సగటును కనుగొనడానికి, మనము అన్ని పరిశీలనల మొత్తాన్ని కనుగొంటాము మరియు దానిని పరిశీలనల సంఖ్యతో భాగిస్తాము

$$\text{అందువలన, ఈ సందర్భంలో సగటు} = \frac{282}{6} = 47. \text{ అవిధంగా ఒక ఇన్నింగ్స్ లో చేసిన సగటు పరుగులు}$$

అంకగణిత సగటు ఎక్కడ ఉంటుంది



ప్రయత్నించండి.

వారం మొత్తంలో మీరు చదివే సగటు గంటల సమయాన్ని మీరు ఎలా కనుగొంటారు?

THINK, DISCUSS AND WRITE

Consider the data in the above examples and think on the following:

- Is the mean bigger than each of the observations?
- Is it smaller than each observation?

Discuss with your friends. Frame one more example of this type and answer the same questions.

You will find that the mean lies inbetween the greatest and the smallest observations.



In particular, the mean of two numbers will always lie between the two numbers. For example the mean of 5 and 11 is $\frac{5+11}{2} = 8$, which lies between 5 and 11.

Can you use this idea to show that between any two fractional numbers, you can find as many fractional numbers as you like. For example between $\frac{1}{2}$ and $\frac{1}{4}$ you have their average $\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}}{2} = \frac{3}{8}$ and then between $\frac{1}{2}$ and $\frac{3}{8}$, you have their average $\frac{7}{16}$ and so on.



TRY THESE

1. Find the mean of your sleeping hours during one week.
2. Find at least 5 numbers between $\frac{1}{2}$ and $\frac{1}{3}$.

3.2.1 Range

The difference between the highest and the lowest observation gives us an idea of the spread of the observations. This can be found by subtracting the lowest observation from the highest observation. We call the result the **range** of the observation. Look at the following example:

EXAMPLE 3 The ages in years of 10 teachers of a school are:

32, 41, 28, 54, 35, 26, 23, 33, 38, 40

- (i) What is the age of the oldest teacher and that of the youngest teacher?
- (ii) What is the range of the ages of the teachers?
- (iii) What is the mean age of these teachers?

SOLUTION

- (i) Arranging the ages in ascending order, we get:

23, 26, 28, 32, 33, 35, 38, 40, 41, 54

We find that the age of the oldest teacher is 54 years and the age of the youngest teacher is 23 years.

ఆలోచించి, చర్చించి రాయండి

పై ఉదాహరణలలోని దత్తాంశంను తీసుకొని కింది వాటిని గురించి ఆలోచించండి:

- ప్రతి పరిశీలన కంటే సగటు పెద్దదా?
- ప్రతి పరిశీలన కంటే సగటు చిన్నదా?

మీ స్నేహితులతో చర్చించండి. ఈ విధమైన మరొక ఉదాహరణను తయారుచేసి పై ప్రశ్నలకు సమాధానం ఇవ్వండి.

అతి పెద్ద మరియు అతిచిన్న పరిశీలనల మధ్య సగటు ఉందని మీరు కనుగొంటారు. ప్రత్యేకించి, రెండు సంఖ్యల సగటు ఎల్లప్పుడూ ఆ రెండు సంఖ్యల మధ్యే ఉంటుంది.

ఉదాహరణకు 5 మరియు 11 యొక్క సగటు $\frac{5+11}{2} = 8$, ఇది 5 మరియు 11 మధ్య ఉంటుంది

ఉదాహరణకు $\frac{1}{2}$ మరియు $\frac{1}{4}$ మధ్య వాటి సగటు $\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}}{2} = \frac{3}{8}$ తరువాత $\frac{1}{2}$ మరియు $\frac{3}{8}$, మధ్య

వీటి సగటు $\frac{7}{16}$ మొదలైనవి ఉండును.



ప్రయత్నించండి

1. ఒక వారంలో మీరు నిద్రపోయిన గంటల సగటును కనుగొనండి.
2. $\frac{1}{2}$ మరియు $\frac{1}{3}$ మధ్య కనీసం 5 సంఖ్యలను కనుగొనండి.

3.2.1 వ్యాప్తి

అత్యధిక మరియు అత్యల్ప పరిశీలన మధ్య భేదం మనకు పరిశీలనల వ్యాప్తి గురించి ఒక ఆలోచనను ఇస్తుంది. అత్యధిక పరిశీలనాంశం నుండి అత్యల్ప పరిశీలనాంశంను తీసివేయడం ద్వారా దీనిని కనుగొనవచ్చు. మనము ఫలితాన్ని పరిశీలనాంశం వ్యాప్తి అని పిలుస్తాము. కింది ఉదాహరణని చూడండి:

ఉదాహరణ 3 పాఠశాలలోని 10 మంది ఉపాధ్యాయుల వయస్సు సంవత్సరాలలో

32, 41, 28, 54, 35, 26, 23, 33, 38, 40

- (i) ఉపాధ్యాయులలో అతి ఎక్కువ వయస్సు ఎంత? అతి తక్కువ వయస్సు ఎంత?
- (ii) ఉపాధ్యాయుల వయస్సుల వ్యాప్తి ఎంత?
- (iii) ఈ ఉపాధ్యాయుల సగటు వయస్సు ఎంత?

సాధన

- (i) వయస్సులను ఆరోహణ క్రమంలో అమర్చిన :

23, 26, 28, 32, 33, 35, 38, 40, 41, 54

మనము ఉపాధ్యాయుల అతి ఎక్కువ వయస్సు 54 సంవత్సరాలు మరియు అతి తక్కువ వయస్సు 23 సంవత్సరాలు అని కనుగొంటాము

(ii) Range of the ages of the teachers = $(54 - 23)$ years = 31 years

(iii) Mean age of the teachers

$$= \frac{23 + 26 + 28 + 32 + 33 + 35 + 38 + 40 + 41 + 54}{10} \text{ years}$$

$$= \frac{350}{10} \text{ years} = 35 \text{ years}$$

EXERCISE 3.1

- Find the range of heights of any ten students of your class.
- Organise the following marks in a class assessment, in a tabular form.

4, 6, 7, 5, 3, 5, 4, 5, 2, 6, 2, 5, 1, 9, 6, 5, 8, 4, 6, 7

- Which number is the highest?
 - Which number is the lowest?
 - What is the range of the data?
 - Find the arithmetic mean.
- Find the mean of the first five whole numbers.
 - A cricketer scores the following runs in eight innings:

58, 76, 40, 35, 46, 45, 0, 100.

Find the mean score.

- Following table shows the points of each player scored in four games:

Player	Game 1	Game 2	Game 3	Game 4
A	14	16	10	10
B	0	8	6	4
C	8	11	Did not Play	13

Now answer the following questions:

- Find the mean to determine A's average number of points scored per game.
 - To find the mean number of points per game for C, would you divide the total points by 3 or by 4? Why?
 - B played in all the four games. How would you find the mean?
 - Who is the best performer?
- The marks (out of 100) obtained by a group of students in a science test are 85, 76, 90, 85, 39, 48, 56, 95, 81 and 75. Find the:
 - Highest and the lowest marks obtained by the students.



- (ii) ఉపాధ్యాయ వయస్సుల వ్యాప్తి = $(54-23)$ సంవత్సరాలు = 31 సంవత్సరాలు.
- (iii) ఉపాధ్యాయుల సగటు వయస్సు

$$= \frac{23+26+28+32+33+35+38+40+41+54}{10}$$
 సంవత్సరాలు

$$= \frac{350}{10}$$
 సంవత్సరాలు = 35 సంవత్సరాలు

అభ్యాసం 3.1

- మీ తరగతిలోని ఏదైనా పది మంది విద్యార్థుల ఎత్తుల వ్యాప్తిని కనుగొనండి.
- కింది తరగతి మూల్యాంకన మార్కులను పట్టిక రూపంలో నిర్వహించండి.
 4, 6, 7, 5, 3, 5, 4, 5, 2, 6, 2, 5, 1, 9, 6, 5, 8, 4, 6, 7
 (i) అతి పెద్ద సంఖ్య ఏది? (ii) అతి చిన్న సంఖ్య ఏది?
 (iii) దత్తాంశం యొక్క వ్యాప్తి ఎంత? (iv) అంకగణిత సగటు కనుక్కోండి.
- మొదటి ఐదు పూర్ణాంకాల సగటును కనుగొనండి.
- ఒక క్రికెట్ ఆటగాడు ఎనిమిది ఇన్నింగ్స్‌లో ఈ క్రింది పరుగులు చేశాడు:
 58, 76, 40, 35, 46, 45, 0, 100.
 సగటు పరుగులను కనుగొనండి.
- కింది పట్టిక ప్రతి క్రీడాకారుడు నాలుగు ఆటలలో సాధించిన పాయింట్లను చూపుతుంది:

క్రీడాకారుడు	ఆట 1	ఆట 2	ఆట 3	ఆట 4
A	14	16	10	10
B	0	8	6	4
C	8	11	అడలేదు	13

- ఇప్పుడు ఈ క్రింది ప్రశ్నలకు సమాధానమివ్వండి:
- ప్రతీ ఆటలో A సాధించిన సరాసరి పాయింట్ లను నిర్ణయించడానికి సగటును కనుగొనండి.
 - ప్రతీ ఆటలో C యొక్క సగటు పాయింట్ల సంఖ్యను కనుగొనడానికి, మీరు మొత్తం పాయింట్లను 3తో భాగిస్తారా లేదా 4తో భాగిస్తారా? ఎందుకు?
 - B మొత్తం నాలుగు ఆటలు ఆడినాడు. మీరు సగటును ఎలా కనుగొంటారు?
 - అత్యుత్తమ ప్రదర్శన చేసిన వారు ఎవరు?
- విద్యార్థుల బృందం సైన్స్ పరీక్షలో సాధించిన మార్కులు (100కి) 85, 76, 90, 85, 39, 48, 56, 95, 81 మరియు 75.
 (i) విద్యార్థులు పొందిన అత్యధిక మరియు అత్యల్ప మార్కులు.



- (ii) Range of the marks obtained.
- (iii) Mean marks obtained by the group.
7. The enrolment in a school during six consecutive years was as follows:
1555, 1670, 1750, 2013, 2540, 2820
Find the mean enrolment of the school for this period.
8. The rainfall (in mm) in a city on 7 days of a certain week was recorded as follows:

Day	Mon	Tue	Wed	Thurs	Fri	Sat	Sun
Rainfall (in mm)	0.0	12.2	2.1	0.0	20.5	5.5	1.0

- (i) Find the range of the rainfall in the above data.
- (ii) Find the mean rainfall for the week.
- (iii) On how many days was the rainfall less than the mean rainfall.
9. The heights of 10 girls were measured in cm and the results are as follows:
135, 150, 139, 128, 151, 132, 146, 149, 143, 141.
- (i) What is the height of the tallest girl? (ii) What is the height of the shortest girl?
- (iii) What is the range of the data? (iv) What is the mean height of the girls?
- (v) How many girls have heights more than the mean height.

3.3 MODE

As we have said Mean is not the only measure of central tendency or the only form of representative value. For different requirements from a data, other measures of central tendencies are used.

Look at the following example

To find out the weekly demand for different sizes of shirt, a shopkeeper kept records of sales of sizes 90 cm, 95 cm, 100 cm, 105 cm, 110 cm. Following is the record for a week:

Size (in cm)	90 cm	95 cm	100 cm	105 cm	110 cm	Total
Number of Shirts Sold	8	22	32	37	6	105

If he found the mean number of shirts sold, do you think that he would be able to decide which shirt sizes to keep in stock?

$$\text{Mean of total shirts sold} = \frac{\text{Total number of shirts sold}}{\text{Number of different sizes of shirts}} = \frac{105}{5} = 21$$

Should he obtain 21 shirts of each size? If he does so, will he be able to cater to the needs of the customers?

- (ii) పొందిన మార్కుల వ్యాప్తి
 - (iii) బృందం పొందిన సగటు మార్కులను కనుగొనండి:
7. పాఠశాలలో వరుసగా ఆరు సంవత్సరాలలో నమోదు ఈ విధంగా ఉంది:
1555, 1670, 1750, 2013, 2540, 2820
ఈ కాలానికి పాఠశాల యొక్క సగటు విద్యార్థుల నమోదును కనుగొనండి.
8. ఒక నిర్దిష్ట వారంలోని 7 రోజులలో ఒక నగరంలో వర్షపాతం (మి.మీ.లో) క్రింది విధంగా నమోదు చేయబడింది

రోజు	సోమ	మంగళ	బుధ	గురు	శుక్ర	శని	ఆది
వర్షపాతం (మి.మీ)	0.0	12.2	2.1	0.0	20.5	5.5	1.0

- (i) పై దత్తాంశంలో వర్షపాతం వ్యాప్తిని కనుగొనండి.
 - (ii) వారంలో సగటు వర్షపాతాన్ని కనుగొనండి.
 - (iii) ఎన్ని రోజులలో సగటు వర్షపాతం కంటే తక్కువ వర్షపాతం నమోదైంది.
9. 10 మంది బాలికల ఎత్తులను సెం.మీలో కొలిచారు మరియు ఫలితాలు ఈ క్రింది విధంగా ఉన్నాయి:
135, 150, 139, 128, 151, 132, 146, 149, 143, 141.
- (i) అత్యంత ఎత్తైన అమ్మాయి ఎత్తు ఎంత? (ii) అతి తక్కువ ఎత్తు ఉన్న అమ్మాయి ఎత్తు ఎంత?
 - (iii) దత్తాంశం యొక్క వ్యాప్తి ఎంత? (iv) ఎంత మంది అమ్మాయిలు సగటు ఎత్తు కంటే ఎక్కువ ఎత్తు కలిగి ఉన్నారు.
 - (v) ఎంత మంది అమ్మాయిలు సగటు ఎత్తు కంటే ఎక్కువ ఎత్తు కలిగి ఉన్నారు.

3.3 బాహుళకము

మనము చెప్పినట్లుగా సగటు మాత్రమే కేవలం కేంద్రీయ స్థాన విలువ లేదా ప్రాతినిధ్య విలువ రూపం కాదు. దత్తాంశం నుండి విభిన్న అవసరాల కోసం, ఇతర కేంద్రీయ స్థాన విలువలు ఉపయోగించబడతాయి.

కింది ఉదాహరణ చూడండి

దుకాణదారుడు వారంలో వివిధ సైజు కొలతలు గల చొక్కాల డిమాండ్‌ను కనుగొనడానికి, ఒక దుకాణదారుడు 90సెం.మీ., 95 సెం.మీ., 100 సెం.మీ., 105 సెం.మీ., 110 సెం.మీ.. కొలతలు గల విక్రయాల రికార్డులను ఉంచాడు.

సైజు (సెం.మీ.లలో)	90 సెం.మీ	95 సెం.మీ	100 సెం.మీ	105 సెం.మీ	110 సెం.మీ	మొత్తం
అమ్మిన చొక్కాల సంఖ్య	8	22	32	37	6	105

అతను అమ్మిన చొక్కాల సగటు సంఖ్యను కనుగొంటే, అతను స్టాక్‌లో ఏ చొక్కా సైజులను ఉంచాలో నిర్ణయించగలడని మీరు అనుకుంటున్నారా?

$$\text{అమ్మిన మొత్తం చొక్కాల సంఖ్య} = \frac{\text{అమ్మిన మొత్తం చొక్కాల సంఖ్య}}{\text{వివిధ కొలతల చొక్కాల సంఖ్య}} = \frac{105}{5} = 21$$

అతను ప్రతి సైజు గల 21 చొక్కాలను పొందాడా? అలా చేస్తే కొనుగోలుదారుల అవసరాలు తీర్చగలడా?

The shopkeeper, on looking at the record, decides to procure shirts of sizes 95 cm, 100 cm, 105 cm. He decided to postpone the procurement of the shirts of other sizes because of their small number of buyers.

Look at another example

The owner of a readymade dress shop says, “The most popular size of dress I sell is the size 90 cm.

Observe that here also, the owner is concerned about the number of shirts of different sizes sold. She is however looking at the shirt size that is sold the most. This is another representative value for the data. The highest occurring event is the sale of size 90 cm. This representative value is called the **mode** of the data.



The mode of a set of observations is the observation that occurs most often.

EXAMPLE 4 Find the mode of the given set of numbers: 1, 1, 2, 4, 3, 2, 1, 2, 2, 4

SOLUTION Arranging the numbers with same values together, we get

$$1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 4, 4$$

Mode of this data is 2 because it occurs more frequently than other observations.

3.3.1 Mode of Large Data

Putting the same observations together and counting them is not easy if the number of observations is large. In such cases we tabulate the data. Tabulation can begin by putting tally marks and finding the frequency, as you did in your previous class.

Look at the following example:

EXAMPLE 5 Following are the margins of victory in the football matches of a league.

1, 3, 2, 5, 1, 4, 6, 2, 5, 2, 2, 2, 4, 1, 2, 3, 1, 1, 2, 3, 2,
6, 4, 3, 2, 1, 1, 4, 2, 1, 5, 3, 3, 2, 3, 2, 4, 2, 1, 2

Find the mode of this data.

SOLUTION Let us put the data in a tabular form:

Margins of Victory	Tally Bars	Number of Matches
1		9
2		14
3		7
4		5
5		3
6		2
	Total	40

TRY THESE

Find the mode of

(i) 2, 6, 5, 3, 0, 3, 4, 3, 2, 4, 5, 2, 4

(ii) 2, 14, 16, 12, 14, 14, 16, 14, 10, 14, 18, 14

దుకాణదారుడు, రికార్డును పరిశీలించి, 95 సెం.మీ, 100 సెం.మీ. 105 సెం.మీ. సైజుల చొక్కాలను సేకరించాలని నిర్ణయించుకున్నాడు. అతను తక్కువ సంఖ్యలో కొనుగోలుదారులు ఉన్నందున ఇతర సైజుల చొక్కాల సేకరణను వాయిదా వేయాలని నిర్ణయించుకున్నాడు.

మరొక ఉదాహరణ చూడండి

ఓ రెడిమేడ్ డ్రెస్ షాప్ యజమాని ఇలా అంటున్నాడు. “నేను విక్రయించే అత్యంత ప్రజాదరణ పొందిన దుస్తుల సైజు 90సెం.మీ.

ఇక్కడ కూడా, యజమాని విక్రయించబడిన వివిధ సైజుల చొక్కాల సంఖ్యను గురించి పరిశీలిస్తున్నాడని గమనించండి. అయితే ఆమె ఎక్కువగా అమ్ముడవుతున్న చొక్కా కొలతను చూస్తోంది. ఇది దత్తాంశంకు మరొక ప్రాతినిధ్య విలువ. అత్యధికంగా సంభవించే సంఘటన 90 సెం.మీ. కొలత. ఈ ప్రాతినిధ్య విలువను దత్తాంశ బాహుళకము అంటారు.



పరిశీలనాంశాల బాహుళకము ఆ పరిశీలనాంశాలలో తరచుగా వచ్చు పరిశీలనాంశం.

ఉదాహరణ 4 ఇవ్వబడిన సంఖ్యల బాహుళకము కనుగొనండి: 1, 1, 2, 4, 3, 2, 1, 2, 2, 4

సాధన ఒకే విలువల కలిగిన సంఖ్యలను వరుసగా రాసిన,
1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 4, 4

ఈ దత్తాంశం యొక్క బాహుళకము 2, ఎందుకంటే ఇది ఇతర పరిశీలనల కంటే చాలా ఎక్కువసార్లు వచ్చింది

3.3.1 పెద్ద దత్తాంశం యొక్క బాహుళకము

పరిశీలనల సంఖ్య ఎక్కువగా ఉంటే ఆ పరిశీలనలను ఒకే చోట చేర్చడం మరియు వాటిని లెక్కించడం సులభం కాదు. అటువంటి సందర్భాలలో మనము దత్తాంశంను పట్టికగా తయారు చేస్తాము. మీరు మీ మునుపటి తరగతిలో చేసినట్లుగా, గణన చిహ్నాలను పెట్టడం మరియు పౌనఃపున్యం కనుగొనడం ద్వారా పట్టిక ప్రారంభమవుతుంది

క్రింది ఉదాహరణ చూడండి.

ఉదాహరణ 5 ఫుట్ బాల్ లీగ్ మ్యాచ్ లలో కింద ఇచ్చిన గోల్ల తేడాతో జట్లు గెలిచాయి.
1, 3, 2, 5, 1, 4, 6, 2, 5, 2, 2, 2, 4, 1, 2, 3, 1, 1, 2, 3, 2,
6, 4, 3, 2, 1, 1, 4, 2, 1, 5, 3, 3, 2, 3, 2, 4, 2, 1, 2

ఈ దత్తాంశానికి బాహుళకము కనుక్కోండి.

సాధన దత్తాంశమును పట్టిక రూపంలో ఉంచుదాం.

గోల్ల తేడా	గణన చిహ్నాలు	మ్యాచ్ ల సంఖ్య
1		4
2		5
3		4
4		4
5		3
6		2
	మొత్తం	40

ప్రయత్నించండి.
బాహుళకము కనుగొనండి.
(i) 2, 6, 5, 3, 0, 3, 4, 3, 2, 4, 5, 2, 4
(ii) 2, 14, 16, 12, 14, 14, 16, 14, 10, 14, 18, 14

Looking at the table, we can quickly say that 2 is the 'mode' since 2 has occurred the highest number of times. Thus, most of the matches have been won with a victory margin of 2 goals.



THINK, DISCUSS AND WRITE

Can a set of numbers have more than one mode?

EXAMPLE 6 Find the mode of the numbers: 2, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 8

SOLUTION Here, 2 and 5 both occur three times. Therefore, they both are modes of the data.

Do This

1. Record the age in years of all your classmates. Tabulate the data and find the mode.
2. Record the heights in centimetres of your classmates and find the mode.



TRY THESE

1. Find the mode of the following data:
12, 14, 12, 16, 15, 13, 14, 18, 19, 12, 14, 15, 16, 15, 16, 16, 15,
17, 13, 16, 16, 15, 15, 13, 15, 17, 15, 14, 15, 13, 15, 14
2. Heights (in cm) of 25 children are given below:
168, 165, 163, 160, 163, 161, 162, 164, 163, 162, 164, 163, 160, 163, 160,
165, 163, 162, 163, 164, 163, 160, 165, 163, 162
What is the mode of their heights? What do we understand by mode here?

Whereas mean gives us the average of all observations of the data, the mode gives that observation which occurs most frequently in the data.

Let us consider the following examples:

- (a) You have to decide upon the number of chapattis needed for 25 people called for a feast.
- (b) A shopkeeper selling shirts has decided to replenish her stock.
- (c) We need to find the height of the door needed in our house.
- (d) When going on a picnic, if only one fruit can be bought for everyone, which is the fruit that we would get.

In which of these situations can we use the mode as a good estimate?

Consider the first statement. Suppose the number of chapattis needed by each person is 2, 3, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 2, 2, 4, 2, 2, 3, 2, 4, 4, 2, 3, 2, 4, 2, 4, 3, 5

పట్టికని చూడగానే, 2 అనేది ' బాహుళకము' అని మనం త్వరగా చెప్పగలం, ఎందుకంటే 2 అత్యధిక సార్లు వచ్చింది.

తద్వారా చాలా మ్యాచ్లు 2 గోల్ల తేడాతోనే గెలుపొందాయి



ఆలోచించి, చర్చించి రాయండి

ఒక సంఖ్యా సమూహం ఒకటి కంటే ఎక్కువ బాహుళకాలను కలిగి ఉండవచ్చా?

ఉదాహరణ 6 ఈ సంఖ్యల బాహుళకం కనుగొనండి. 2, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 8

సాధన ఇక్కడ 2 మరియు 5 రెండు విలువలు మూడుసార్లు వచ్చాయి. కనుక ఇవి రెండూ బాహుళకం అవుతాయి.

ప్రయత్నించండి

1. మీ తరగతిలోని విద్యార్థుల వయస్సులను సేకరించి బాహుళకం కనుగొనండి.
2. మీ తరగతిలోని విద్యార్థుల ఎత్తులను సెం.మీ.లో కొలిచి వాటి బాహుళకం కనుక్కోండి.



ప్రయత్నించండి

1. క్రింది దత్తాంశం యొక్క బాహుళకమును కనుగొనండి.
12, 14, 12, 16, 15, 13, 14, 18, 19, 12, 14, 15, 16, 15, 16, 16, 15,
17, 13, 16, 16, 15, 15, 13, 15, 17, 15, 14, 15, 13, 15, 14
2. 25 మంది పిల్లల ఎత్తులు (సెం.మీ.లో) క్రింది ఇవ్వబడ్డాయి.
168, 165, 163, 160, 163, 161, 162, 164, 163, 162, 164, 163, 160, 163, 160,
165, 163, 162, 163, 164, 163, 160, 165, 163, 162

పిల్లల ఎత్తుల బాహుళకం ఎంత? బాహుళకం వల్ల మీకు ఏమి అవగాహన అయ్యింది.

దత్తాంశం యొక్క అన్ని పరిశీలనల సరాసరిని సగటు ఇస్తుంది, దత్తాంశం లో చాలా తరచుగా వచ్చే పరిశీలనను బాహుళకము ఇస్తుంది.

క్రింది ఉదాహరణలను పరిశీలిద్దాం:

- (a) విందు కోసం పిలిచిన 25 మందికి అవసరం అయ్యే చపాతీల సంఖ్యను మీరు నిర్ణయించాలి.
- (b) చౌక్యాలు అమ్మే దుకాణదారుడు తన స్టాక్ను తిరిగి నింపాలని నిర్ణయించుకున్నాడు.
- (c) మన ఇంటికి అవసరమైన తలుపు ఎత్తును కనుగొనాలి.
- (d) విహారయాత్రకు వెళ్లినప్పుడు, మనకు దొరికే పండ్లలో ఒక్కరికి ఒక పండు మాత్రమే ఇవ్వగలము.

వీటిలో ఏ పరిస్థితుల్లో మనం బాహుళకమును మంచి అంచనాగా ఉపయోగించవచ్చు?

మొదటి సందర్భంలో గమనించండి. ఒక్కో వ్యక్తికి అవసరమైన చపాతీలు అనుకుందాం
2, 3, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 2, 2, 4, 2, 2, 3, 2, 4, 4, 2, 3, 2, 4, 2, 4, 3, 5

The mode of the data is 2 chapattis. If we use mode as the representative value for this data, then we need 50 chapattis only, 2 for each of the 25 persons. However the total number would clearly be inadequate. Would **mean** be an appropriate representative value?

For the third statement the height of the door is related to the height of the persons using that door. Suppose there are 5 children and 4 adults using the door and the height of each of 5 children is around 135 cm. The mode for the heights is 135 cm. Should we get a door that is 144 cm high? Would all the adults be able to go through that door? It is clear that mode is not the appropriate representative value for this data. Would **mean** be an appropriate representative value here?

Why not? Which representative value of height should be used to decide the doorheight?

Similarly analyse the rest of the statements and find the representative value useful for that issue.



TRY THESE

Discuss with your friends and give

- Two situations where mean would be an appropriate representative value to use, and
- Two situations where mode would be an appropriate representative value to use.



3.4 MEDIAN

We have seen that in some situations, arithmetic mean is an appropriate measure of central tendency whereas in some other situations, mode is the appropriate measure of central tendency.

Let us now look at another example. Consider a group of 17 students with the following heights (in cm): 106, 110, 123, 125, 117, 120, 112, 115, 110, 120, 115, 102, 115, 115, 109, 115, 101.

The games teacher wants to divide the class into two groups so that each group has equal number of students, one group has students with height lesser than a particular height and the other group has students with heights greater than the particular height. How would she do that?

Let us see the various options she has:

- She can find the mean. The mean is

$$\frac{106 + 110 + 123 + 125 + 117 + 120 + 112 + 115 + 110 + 120 + 115 + 102 + 115 + 115 + 109 + 115 + 101}{17} = \frac{1930}{17} = 113.5$$



దత్తాంశం యొక్క బాహుళకము 2 చపాతీలు. మనము బాహుళకమును దీనికి ప్రాతినిధ్య విలువగా ఉపయోగిస్తే, అప్పుడు మనకు ఒక్కొక్కరికి 2 చొప్పున 25 మందికి 50 చపాతీలు మాత్రమే కావాలి. అయితే మొత్తం సంఖ్య స్పష్టంగా సరిపోదు. సగటు తగిన ప్రాతినిధ్య విలువ అవుతుందా?

మూడవ ప్రకటన సందర్భం కోసం తలుపు యొక్క ఎత్తు ఆ తలుపును ఉపయోగించే వ్యక్తుల ఎత్తుకు సంబంధించినది. 5 గురు పిల్లలు మరియు 4 గురు పెద్దలు తలుపును ఉపయోగిస్తున్నారని అనుకుండాం మరియు 5 మందిలో ప్రతి పిల్లవాని ఎత్తు సుమారు 135 సెం.మీ. ఎత్తుల బాహుళకము 135 సెం.మీ. మనం 144 సెం.మీ ఎత్తులో ఉన్న తలుపును పొందగలమా? పెద్దలందరూ ఆ తలుపు గుండా వెళ్ళగలరా? ఈ దత్తాంశమునకు బాహుళకము సరైన ప్రాతినిధ్య విలువ కాదని స్పష్టంగా ఉంది. ఇక్కడ సగటు తగిన ప్రాతినిధ్య విలువ అవుతుందా?



ఎందుకు కాదు? తలుపు ఎత్తుని నిర్ణయించడానికి ఎత్తుల యొక్క ఏ ప్రాతినిధ్య విలువను ఉపయోగించాలి?
అదేవిధంగా మిగిలిన సందర్భాలను విశ్లేషించి, ఆ సమస్యకు ఉపయోగపడే ప్రాతినిధ్య విలువ కనుగొనండి.

ప్రయత్నించండి.

- మీ స్నేహితులతో చర్చించండి మరియు తెలపండి
- (a) సగటుని సరియైన ప్రాతినిధ్య విలువగా ఉపయోగించే రెండు సందర్భాలను మరియు
- (b) బాహుళకమును సరియైన ప్రాతినిధ్య విలువగా ఉపయోగించే రెండు సందర్భాలను ఇవ్వండి.



3.4 మధ్యగతము

కొన్ని సందర్భాల్లో, అంకగణిత సగటు తగిన కేంద్రీయ స్థానపు కొలత అయితే కొన్ని ఇతర సందర్భాలలో, బాహుళకము అనేది కేంద్రీయ స్థానవిలువల కొలతలకి తగిన కొలత అని మనము చూశాము.

ఇప్పుడు మనం మరొక ఉదాహరణను చూద్దాం, కింద ఇవ్వబడిన 17 మంది విద్యార్థుల సమూహం యొక్క ఎత్తులను (సెం.మీ. లలో) పరిగణించండి: 106, 110, 123, 125, 117, 120, 112, 115, 110, 120, 115, 102, 115, 115, 109, 115, 101.



వ్యాయామ ఉపాధ్యాయురాలు తరగతిని సమాన సంఖ్యలో విద్యార్థులు ఉండే రెండు సమూహాలుగా విభజించాలనుకుంటున్నారు, మరియు ఒక సమూహంలో నిర్దిష్ట ఎత్తు కంటే తక్కువ ఎత్తు ఉన్న విద్యార్థులు మరొక సమూహంలో నిర్దిష్ట ఎత్తు కంటే ఎక్కువ ఎత్తు ఉన్న విద్యార్థులు ఉండేలా విభజించాలి. ఆమె దీనిని ఎలా చేయగలదు?

ఆమెకు ఉన్న వివిధ ఎంపికలను చూద్దాం:

(i) ఆమె సగటును కనుక్కోగలదు. సగటు =

$$\frac{106+110+123+125+117+120+112+115+110+120+115+102+115+115+109+115+101}{17}$$

$$= \frac{1930}{17} = 113.5$$

So, if the teacher divides the students into two groups on the basis of this mean height, such that one group has students of height less than the mean height and the other group has students with height more than the mean height, then the groups would be of unequal size. They would have 7 and 10 members respectively.

- (ii) The second option for her is to find mode. The observation with highest frequency is 115 cm, which would be taken as mode.

There are 7 children below the mode and 10 children at the mode and above the mode. Therefore, we cannot divide the group into equal parts.

Let us therefore think of an alternative representative value or measure of central tendency. For doing this we again look at the given heights (in cm) of students and arrange them in ascending order. We have the following observations:

101, 102, 106, 109, 110, 110, 112, 115, 115, 115, 115, 115, 117, 120, 120, 123, 125

The middle value in this data is 115 because this value divides the students into two equal groups of 8 students each. This value is called as **Median**. Median refers to the value which lies in the middle of the data (when arranged in an increasing or decreasing order) with half of the observations above it and the other half below it. The games teacher decides to keep the middle student as a referee in the game.

Here, we consider only those cases where number of observations is odd.

Thus, in a given data, arranged in ascending or descending order, the **median** gives us the middle observation.

Note that in general, we may not get the same value for median and mode.

Thus we realise that mean, mode and median are the numbers that are the representative values of a group of observations or data. They lie between the minimum and maximum values of the data. They are also called the measures of the central tendency.

EXAMPLE 7 Find the median of the data: 24, 36, 46, 17, 18, 25, 35

SOLUTION We arrange the data in ascending order, we get 17, 18, 24, 25, 35, 36, 46
Median is the middle observation. Therefore 25 is the median.



EXERCISE 3.2

- The scores in mathematics test (out of 25) of 15 students is as follows:
19, 25, 23, 20, 9, 20, 15, 10, 5, 16, 25, 20, 24, 12, 20
Find the mode and median of this data. Are they same?
- The runs scored in a cricket match by 11 players is as follows:
6, 15, 120, 50, 100, 80, 10, 15, 8, 10, 15
Find the mean, mode and median of this data. Are the three same?

కాబట్టి, ఉపాధ్యాయురాలు ఈ సగటు ఎత్తు ఆధారంగా విద్యార్థులను రెండు సమూహాలుగా విభజిస్తే, ఒక సమూహంలో సగటు ఎత్తు కంటే తక్కువ ఎత్తు ఉన్న విద్యార్థులు మరియు మరొక సమూహంలో సగటు ఎత్తు కంటే ఎక్కువ ఎత్తు ఉన్న విద్యార్థులు ఉంటారు, అప్పుడు సమూహాలు అసమాన పరిమాణంలో ఉంటాయి. అవి వరుసగా 7 మంది మరియు 10 మంది సభ్యులను కలిగి ఉంటారు.

(ii) బాహుళకమును కనుగొనడం ఆమెకు రెండవ ఎంపిక. అత్యధిక పౌనఃపున్యం కలిగిన పరిశీలనాంశం 115 సెం. మీ. ఇది బాహుళకముగా తీసుకోబడుతుంది.

బాహుళకపు విలువ క్రింద 7 మంది పిల్లలు మరియు బాహుళకము వద్ద మరియు బాహుళకము పైన 10 మంది పిల్లలు ఉన్నారు. కాబట్టి, మనము సమూహాన్ని సమాన భాగాలుగా విభజించలేము. అందువల్ల ప్రత్యామ్నాయ ప్రాతినిధ్య విలువ లేదా కేంద్రీయ స్థాన విలువల యొక్క కొలత గురించి ఆలోచిద్దాం. దీన్ని చేయడం కోసం మనము మళ్ళీ విద్యార్థుల యొక్క ఇచ్చిన ఎత్తులను (సెం. మీ. లలో) పరిశీలిస్తాము మరియు వాటిని ఆరోహణ క్రమంలో ఏర్పాటు చేస్తాము. మనకు ఈ క్రింది పరిశీలనలు ఉన్నాయి: 101, 102, 106, 109, 110, 110, 112, 115, 115, 115, 115, 115, 117, 120, 120, 123, 125

ప్రయత్నించండి.

మీ స్నేహితుడు ఇచ్చిన దత్తాంశం యొక్క మధ్యగతము మరియు బాహుళకమును కనుగొన్నాడు, మీ స్నేహితుడు చేసిన తప్పు ఏదైనా ఉంటే వివరించండి మరియు సరిదిద్దండి:
 35, 32, 35, 42, 38, 32, 34
 మధ్యగతము = 42, బాహుళకము = 32

ఈ దత్తాంశంలోని మధ్య విలువ 115 ఎందుకంటే ఈ విలువ విద్యార్థులను 8 మంది విద్యార్థులతో కూడిన రెండు సమాన సమూహాలుగా విభజిస్తుంది. ఈ విలువను **మధ్యగతం** అంటారు. మధ్యగతం అనేది దత్తాంశం మధ్యలో ఉండే విలువను సూచిస్తూ (ఆరోహణ మరియు అవరోహణ క్రమంలో అమర్చినప్పుడు) ఉన్న పరిశీలనలలో సగం దాని పైన మరియు మిగిలిన సగం దాని క్రింద ఉంటాయి. వ్యాయామ ఉపాధ్యాయురాలు మధ్య విద్యార్థిని ఆటలో రెఫరీగా ఉంచాలని నిర్ణయించుకుంటారు.

ఇక్కడ, మనము పరిశీలనల సంఖ్య బేసిగా ఉన్న సందర్భాలను మాత్రమే పరిశీలిస్తాము. ఈ విధంగా ఇచ్చిన దత్తాంశంను, ఆరోహణ లేదా అవరోహణ

క్రమంలో అమర్చబడి, మధ్యగతము మనకు మధ్య పరిశీలనాంశంను ఇస్తుంది.

సాధారణంగా, మనము మధ్యగతము మరియు బాహుళకమునకు ఒకే విలువను పొందలేమని గమనించండి

అందువల్ల, సగటు, బాహుళకము మరియు మధ్యగతములు అనేవి పరిశీలనాంశములు లేదా దత్తాంశ సమూహం యొక్క ప్రాతినిధ్య విలువలు గా ఉండే సంఖ్యలు అని మనము గ్రహించాము. అవి దత్తాంశం యొక్క గరిష్ట మరియు కనిష్ట విలువల మధ్య ఉంటాయి. వీటిని కేంద్రీయ స్థానవిలువల కొలతలు అని కూడా మనము పిలుస్తాము.

ఉదాహరణ 7 దత్తాంశం యొక్క మధ్యగతం కనుక్కోండి: 24, 36, 46, 17, 18, 25, 35

సాధన మేము దత్తాంశంను ఆరోహణ క్రమంలో అమరిస్తే, 17, 18, 24, 25, 35, 36, 46 మధ్యగతం అనేది మధ్య పరిశీలనాంశం. కాబట్టి మధ్యగతం 25.

అభ్యాసం 3.2



- 15 మంది విద్యార్థుల గణిత పరీక్షలో వచ్చిన మార్కులు (25 మార్కులకు) క్రింది విధంగా ఉన్నాయి: 19, 25, 23, 20, 9, 20, 15, 10, 5, 16, 25, 20, 24, 12, 20
 ఈ దత్తాంశం యొక్క బాహుళకము మరియు మధ్యగతాన్ని కనుగొనండి. అవి ఒకేలా ఉన్నాయా?
- క్రికెట్ మ్యాచ్ లో 11 మంది ఆటగాళ్లు చేసిన పరుగులు క్రింది విధంగా ఉన్నాయి:
 6, 15, 120, 50, 100, 80, 10, 15, 8, 10, 15
 ఈ దత్తాంశం యొక్క సగటు, బాహుళకము మరియు మధ్యగతాన్ని కనుగొనండి. అవి మూడు ఒకేలా ఉన్నాయా?

3. The weights (in kg.) of 15 students of a class are:
38, 42, 35, 37, 45, 50, 32, 43, 43, 40, 36, 38, 43, 38, 47
 - (i) Find the mode and median of this data.
 - (ii) Is there more than one mode?
4. Find the mode and median of the data: 13, 16, 12, 14, 19, 12, 14, 13, 14
5. Tell whether the statement is true or false:
 - (i) The mode is always one of the numbers in a data.
 - (ii) The mean is one of the numbers in a data.
 - (iii) The median is always one of the numbers in a data.
 - (iv) The data 6, 4, 3, 8, 9, 12, 13, 9 has mean 9.



3.5 USE OF BAR GRAPHS WITH A DIFFERENT PURPOSE

We have seen last year how information collected could be first arranged in a frequency distribution table and then this information could be put as a visual representation in the form of pictographs or bar graphs. You can look at the bar graphs and make deductions about the data. You can also get information based on these bar graphs. For example, you can say that the mode is the longest bar if the bar represents the frequency.

3.5.1 Choosing a Scale

We know that a bar graph is a representation of numbers using bars of uniform width and the lengths of the bars depend upon the frequency and the scale you have chosen. For example, in a bar graph where numbers in units are to be shown, the graph represents one unit length for one observation and if it has to show numbers in tens or hundreds, one unit length can represent 10 or 100 observations. Consider the following examples:

EXAMPLE 8 Two hundred students of 6th and 7th classes were asked to name their favourite colour so as to decide upon what should be the colour of their school building. The results are shown in the following table. Represent the given data on a bar graph.

Favourite Colour	Red	Green	Blue	Yellow	Orange
Number of Students	43	19	55	49	34

Answer the following questions with the help of the bar graph:

- (i) Which is the most preferred colour and which is the least preferred?
- (ii) How many colours are there in all? What are they?

SOLUTION Choose a suitable scale as follows:

Start the scale at 0. The greatest value in the data is 55, so end the scale at a value greater than 55, such as 60. Use equal divisions along the axes, such as increments of 10. You

3. ఒక తరగతిలోని 15 మంది విద్యార్థుల బరువులు(కి. గ్రా. లలో):
38, 42, 35, 37, 45, 50, 32, 43, 43, 40, 36, 38, 43, 38, 47
(i) ఈ దత్తాంశం యొక్క బాహుళకము మరియు మధ్యగతాన్ని కనుగొనండి.
(ii) ఒకటి కంటే ఎక్కువ బాహుళకములు ఉన్నాయా?
4. దత్తాంశం యొక్క బాహుళకము మరియు మధ్యగతాన్ని కనుగొనండి:
13, 16, 12, 14, 19, 12, 14, 13, 14
5. వాక్యాలు సత్యమో అసత్యమో చెప్పండి:
(i) బాహుళకము ఎల్లప్పుడూ దత్తాంశం లోని సంఖ్యలలో ఒకటి.
(ii) సగటు అనేది దత్తాంశం లోని సంఖ్యలలో ఒకటి.
(iii) మధ్యగతం ఎల్లప్పుడూ దత్తాంశం లోని సంఖ్యలలో ఒకటి.
(iv) 6,4,3,8,9,12,13,9 దత్తాంశం యొక్క సగటు 9.



3.5 విభిన్న ప్రయోజనంతో కమ్మీ రేఖాచిత్రాల ఉపయోగం

సేకరించిన సమాచారాన్ని ముందుగా పౌనఃపున్య విభజన పట్టికలో ఎలా అమర్చవచ్చు మరియు ఈ సమాచారాన్ని పట చిత్రాలు లేదా కమ్మీ రేఖాచిత్రాల రూపంలో దృశ్యరూపంలో ఎలా చూపవచ్చో మనము గత సంవత్సరం చూశాము. మీరు కమ్మీ రేఖాచిత్రాలను చూడవచ్చు మరియు దత్తాంశం గురించి ముగింపులను చేయవచ్చు. మీరు ఈ బార్ గ్రాఫ్ ఆధారంగా కూడా సమాచారాన్ని పొందవచ్చు. ఉదాహరణకు, కమ్మీ పౌనఃపున్యముని సూచిస్తే బాహుళకము పొడవైన కమ్మీ అని మీరు చెప్పవచ్చు.

3.5.1 స్కేలును ఎంచుకోవటం

కమ్మీ రేఖాచిత్రం అనేది ఏకరీతి వెడల్పు గల కమ్మీ లను ఉపయోగించి సంఖ్యలను ప్రాతినిధ్యం చేసేదని మనకు తెలుసు మరియు కమ్మీల పొడవులు పౌనఃపున్యము మరియు మీరు ఎంచుకున్న స్కేలుపై ఆధారపడి ఉంటాయి. ఉదాహరణకు, కమ్మీ రేఖాచిత్రంలోని సంఖ్యలను యూనిట్లలో సూచించడానికి గ్రాఫ్ లో ఒక పరిశీలనాంశాన్ని ఒక యూనిట్ పొడవుగా సూచించవచ్చు మరియు అది పదుల లేదా వందలలో సంఖ్యలను చూపవలసి వస్తే, ఒక యూనిట్ పొడవు 10 లేదా 100 పరిశీలనాంశాలుగా సూచించవచ్చు. కింది ఉదాహరణలను పరిశీలించండి:

ఉదాహరణ 8 తమ పాఠశాల భవనం రంగును నిర్ణయించడానికి 6 మరియు 7 తరగతులకు చెందిన రెండు వందల మంది విద్యార్థులను వారికి ఇష్టమైన రంగు పేరు చెప్పమని అడిగారు. ఫలితాలు క్రింది పట్టికలో చూపబడ్డాయి. ఇచ్చిన దత్తాంశాన్ని కమ్మీ రేఖాచిత్రంలో ప్రాతినిధ్యపరచండి.

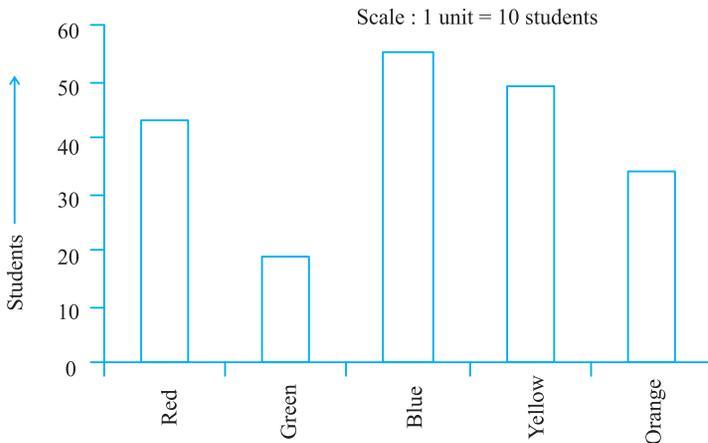
ఇష్టమైన రంగు	ఎరుపు	ఆకుపచ్చ	నీలం	పసుపు	ఆరంజ్
విద్యార్థుల సంఖ్య	43	19	55	49	34

కమ్మీ రేఖాచిత్రం సహాయంతో క్రింది ప్రశ్నలకు సమాధానం ఇవ్వండి:

- (i) ఎక్కువ మంది ఎంచుకున్న రంగు ఏది? తక్కువ మంది ఎంచుకున్న రంగు ఏది?
- (ii) మొత్తం ఎన్ని రంగులు ఉన్నాయి? అవి ఏవి?

సాధన : క్రిందివిధంగా తగిన స్కేల్ని ఎంచుకోండి.

స్కేల్ను 0 వద్ద ప్రారంభించండి. దత్తాంశంలో అత్యధిక విలువ 55. కాబట్టి స్కేల్ను 55 కంటే ఎక్కువ విలువ 60 వంటి వాటితో ముగించండి. 10 వంటి పెంపుదలతో అక్షాల వెంబడి సమాన విభజనలను చేయండి.



know that all the bars would lie between 0 and 60. We choose the scale such that the length between 0 and 60 is neither too long nor too small. Here we take 1 unit for 10 students.

We then draw and label the graph as shown.

From the bar graph we conclude that

- (i) Blue is the most preferred colour (Because the bar representing Blue is the tallest).
- (ii) Green is the least preferred colour. (Because the bar representing Green is the shortest).
- (iii) There are five colours. They are Red, Green, Blue, Yellow and Orange. (These are observed on the horizontal line)

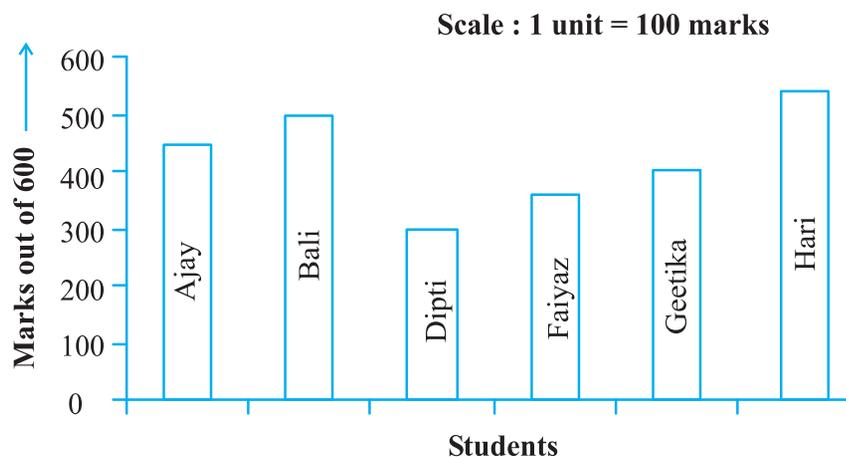
EXAMPLE 9 Following data gives total marks (out of 600) obtained by six children of a particular class. Represent the data on a bar graph.

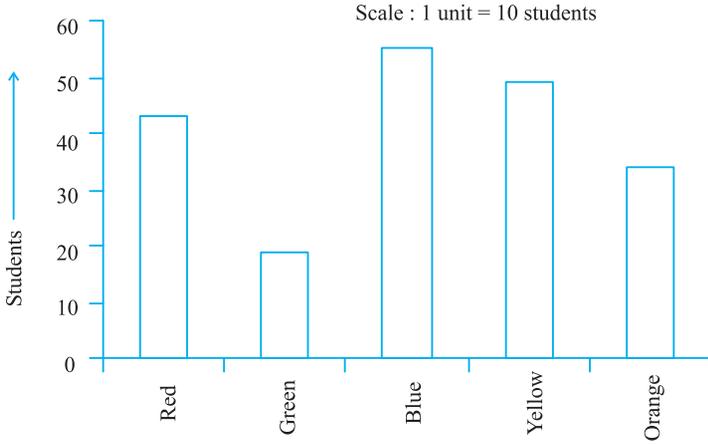
Students	Ajay	Bali	Dipti	Faiyaz	Geetika	Hari
Marks Obtained	450	500	300	360	400	540



SOLUTION

- (i) To choose an appropriate scale we make equal divisions taking increments of 100. Thus 1 unit will represent 100 marks. (What would be the difficulty if we choose one unit to represent 10 marks?)
- (ii) Now represent the data on the bar graph.





అన్ని కమ్మీలు 0 మరియు 60 మధ్య ఉంటాయని మీకు తెలుసు. మనము స్కేల్‌ని 0 మరియు 60 మధ్య పొడవు చాలా పొడవుగా లేదా చాలా చిన్నగా ఉండకుండా ఎంచుకుంటాము. ఇక్కడ మనము 1 యూనిట్‌ని 10 మంది విద్యార్థులుగా తీసుకుంటాము. తరువాత మనము చూపిన విధంగా గ్రాఫ్‌ను గీసి లేబుల్ చేస్తాము.

కమ్మీ రేఖాచిత్రం నుండి మనము కింది వాటిని నిర్ణయించవచ్చు.

- (i) నీలం రంగు ఎక్కువ మంది ఎంచుకున్న రంగు (ఎందుకంటే నీలం రంగును సూచించే కమ్మీ ఎత్తైనది).
- (ii) ఆకుపచ్చ రంగు తక్కువ మంది ఎంచుకున్న రంగు. (ఎందుకంటే ఆకుపచ్చని సూచించే కమ్మీ చిన్నది).
- (iii) అక్కడ ఐదు రంగులు ఉన్నాయి. అవి ఎరుపు, ఆకుపచ్చ, నీలం, పసుపు మరియు నారింజ. (ఇవి క్షితిజ సమాంతర రేఖపై గమనించవచ్చు)

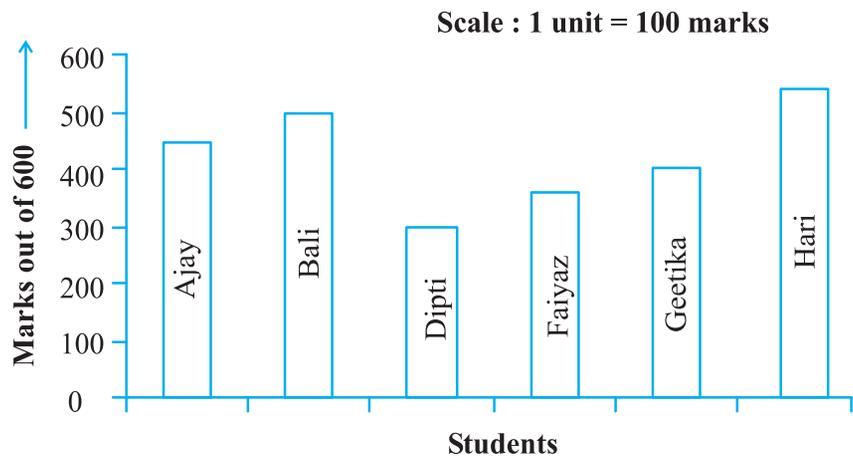
ఉదాహరణ 9 ఒక నిర్దిష్ట తరగతిలో ఆరుగురు పిల్లలు పొందిన మొత్తం మార్కులను (600కు) క్రింది దత్తాంశం సూచించును.

విద్యార్థులు	అజయ్	బాలి	దీప్తి	ఫయజ్	గీతిక	హరి
పొందిన మార్కులు	450	500	300	360	400	540



సాధన

- (i) తగిన స్కేల్‌ని ఎంచుకోవడానికి మనము 100ను ఒక యూనిట్ కు తీసుకొని సమాన విభజనలను చేస్తాము. ఆ విధంగా 1 యూనిట్ 100 మార్కులను సూచిస్తుంది. (మనం ఒక యూనిట్‌ను 10 మార్కులుగా ఎంచుకుంటే ఇబ్బంది ఏమిటి?)
- (ii) ఇప్పుడు దత్తాంశాన్ని కమ్మీ రేఖాచిత్రంలో ప్రాతినిధ్యం చేయండి.



Drawing double bar graph

Consider the following two collections of data giving the average daily hours of sunshine in two cities Aberdeen and Margate for all the twelve months of the year. These cities are near the south pole and hence have only a few hours of sunshine each day.

In Margate												
	Jan.	Feb.	Mar.	April	May	June	July	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.
Average hours of Sunshine	2	$3\frac{1}{4}$	4	4	$7\frac{3}{4}$	8	$7\frac{1}{2}$	7	$6\frac{1}{4}$	6	4	2
In Aberdeen												
Average hours of Sunshine	$1\frac{1}{2}$	3	$3\frac{1}{2}$	6	$5\frac{1}{2}$	$6\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{2}$	5	$4\frac{1}{2}$	4	3	$1\frac{3}{4}$

By drawing individual bar graphs you could answer questions like

- In which month does each city has maximum sunlight? or
- In which months does each city has minimum sunlight?

However, to answer questions like “In a particular month, which city has more sunshine hours”, we need to compare the average hours of sunshine of both the cities. To do this we will learn to draw what is called a double bar graph giving the information of both cities side-by-side.



This bar graph (Fig 3.1) shows the average sunshine of both the cities.

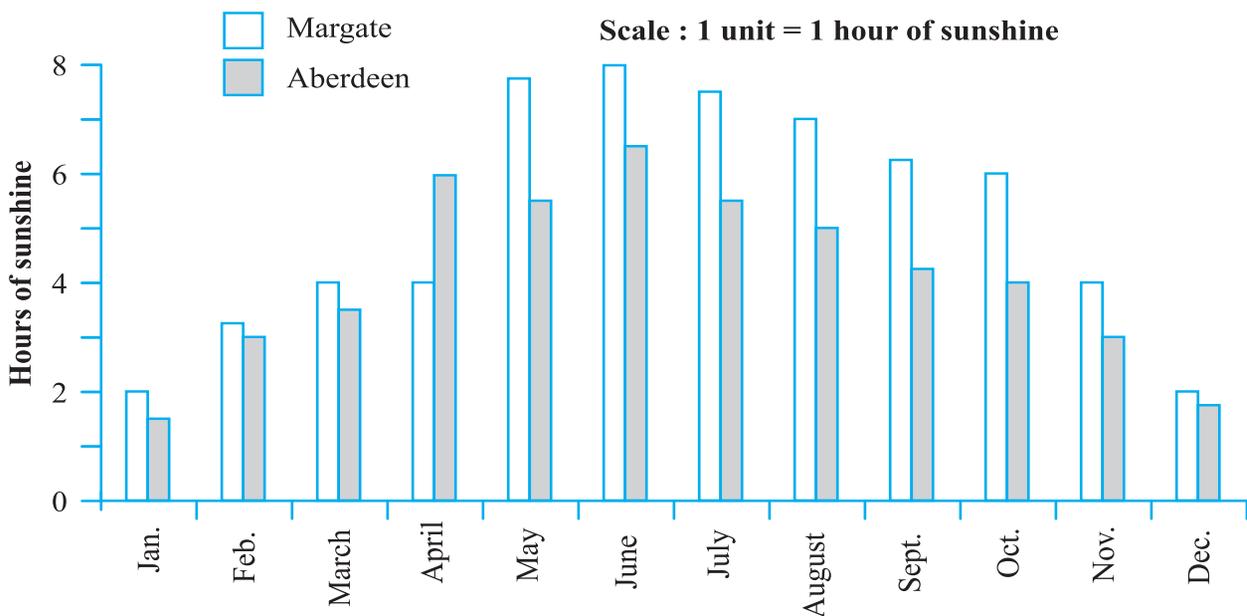


Fig 3.1

రెండు వరుసల కమ్మీ రేఖా చిత్రాలు గీయడం

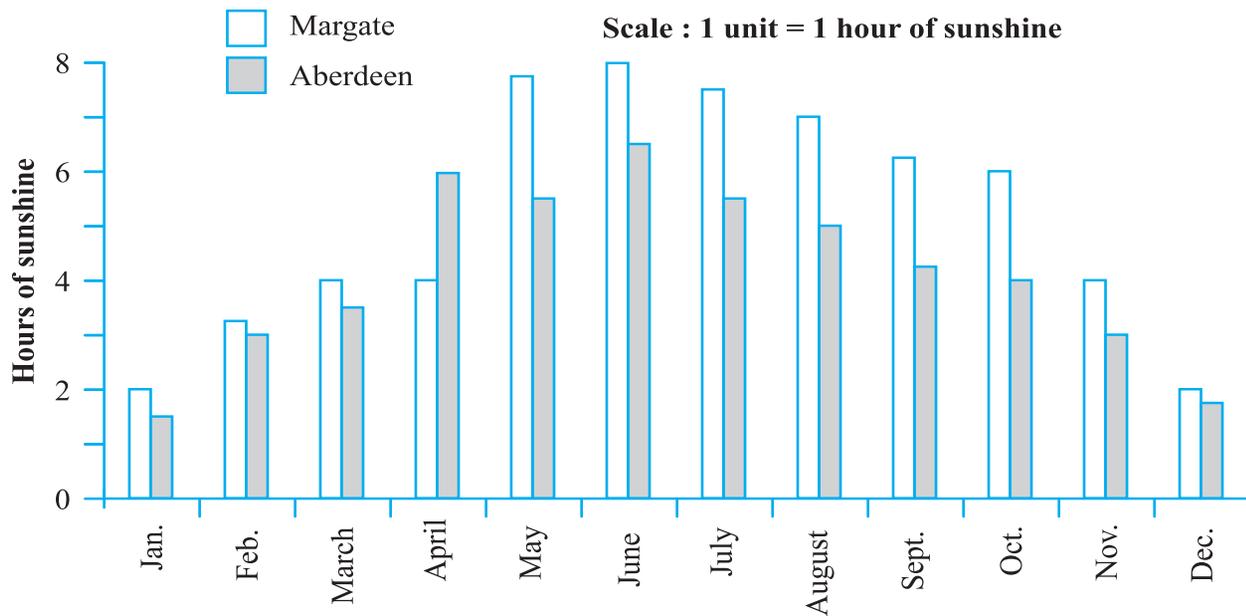
సంవత్సరంలో మొత్తం పన్నెండు నెలల పాటు అబెర్డిన్ మరియు మార్గేట్ అనే రెండు నగరాలలో సూర్యకాంతి పడే సగటు రోజువారీ గంటలను సూచించే క్రింది రెండు దత్తాంశ సేకరణలను పరిగణించండి. ఈ రెండు నగరాలు దక్షిణ ధ్రువానికి సమీపంలో ఉన్నందువలన ప్రతిరోజూ కొన్ని గంటలు మాత్రమే సూర్యకాంతి పడును.

మార్గేట్లో												
	జనవరి	ఫిబ్రవరి	మార్చి	ఏప్రిల్	మే	జూన్	జూలై	ఆగస్టు	సెప్టెం	అక్టోబర్	నవంబ	డిసెంబ
సూర్యకాంతి పడే సగటు గం		$3 \frac{1}{4}$			$7 \frac{3}{4}$		$7 \frac{1}{2}$		$6 \frac{1}{4}$			
అబెర్డిన్లో												
సూర్యకాంతి పడే సగటు గం	$1 \frac{1}{2}$		$3 \frac{1}{2}$		$5 \frac{1}{2}$	$6 \frac{1}{2}$	$5 \frac{1}{2}$		$4 \frac{1}{2}$			$1 \frac{3}{4}$

వేరువేరు బార్ గ్రాఫ్లను గీయడం ద్వారా మీరు ఈ ప్రశ్నలకు సమాధానం చెప్పగలరు

- (i) ఏ నెలలో ప్రతి నగరంలో గరిష్ట సూర్యకాంతి ఉంటుంది? లేదా
- (ii) ఏ నెలలో ప్రతి నగరంలో కనిష్ట సూర్యకాంతి ఉంటుంది?

ఏ నెలలో ప్రతి నగరంలో కనిష్ట సూర్యకాంతి ఉంటుంది? అయితే, “ఒక నిర్దిష్ట నెలలో, ఏ నగరంలో ఎక్కువ సూర్యకాంతి పడే సమయం ఉంటుంది “ వంటి ప్రశ్నలకు సమాధానం ఇవ్వడానికి మనము రెండు నగరాల సగటు సూర్యకాంతి పడే గంటలను సరిపోల్చాలి. దీన్ని చేయడానికి మనము రెండు నగరాల సమాచారాన్ని పక్కపక్కన ఇచ్చే రెండు వరుసల కమ్మీ రేఖా చిత్రం అని పిలవబడే దానిని గీయడం నేర్చుకుంటారు ఈ కమ్మీ రేఖా చిత్రాన్ని (పటం 3.1) రెండు నగరాల సగటు సూర్యకాంతి పడే సమయాన్ని చూపుతుంది.

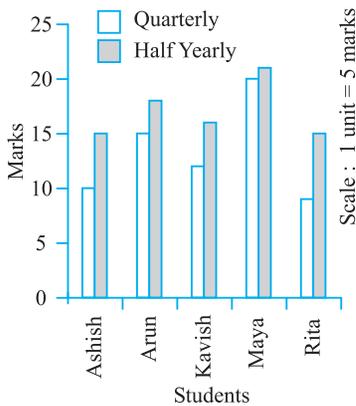


పటం 3.1

For each month we have two bars, the heights of which give the average hours of sunshine in each city. From this we can infer that except for the month of April, there is always more sunshine in Margate than in Aberdeen. You could put together a similar bar graph for your area or for your city.

Let us look at another example more related to us.

EXAMPLE 10 A mathematics teacher wants to see, whether the new technique of teaching she applied after quarterly test was effective or not. She takes the scores of the 5 weakest children in the quarterly test (out of 25) and in the half yearly test (out of 25):



Students	Ashish	Arun	Kavish	Maya	Rita
Quarterly	10	15	12	20	9
Half yearly	15	18	16	21	15

SOLUTION She draws the adjoining double bar graph and finds a marked improvement in most of the students, the teacher decides that she should continue to use the new technique of teaching.

Can you think of a few more situations where you could use double bar graphs?

TRY THESE

- The bar graph (Fig 3.2) shows the result of a survey to test water resistant watches made by different companies.

Each of these companies claimed that their watches were water resistant. After a test the above results were revealed.

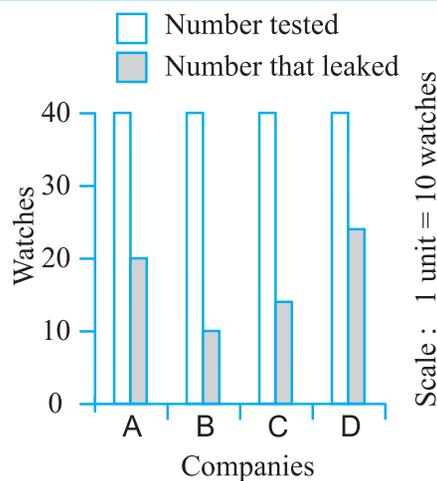


Fig 3.2

- Can you work out a fraction of the number of watches that leaked to the number tested for each company?
 - Could you tell on this basis which company has better watches?
- Sale of English and Hindi books in the years 1995, 1996, 1997 and 1998 are given below:

Years	1995	1996	1997	1998
English	350	400	450	620
Hindi	500	525	600	650

Draw a double bar graph and answer the following questions:

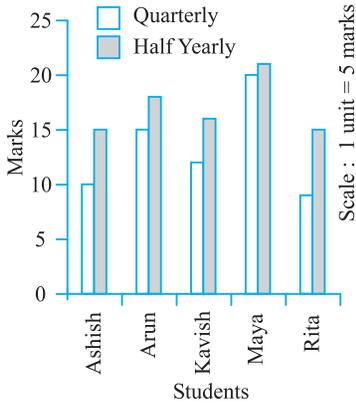
- In which year was the difference in the sale of the two language books least?
- Can you say that the demand for English books rose faster? Justify.

ప్రతి నెలలో మనకు రెండు కమ్మీలు ఉన్నాయి, వాటి ఎత్తులు ప్రతి నగరంలో సూర్యకాంతి పడే గంటల ని ఇస్తాయి. దీన్ని బట్టి మనం ఏప్రిల్ నెలలో తప్ప అబెర్డిన్ కంటే మార్గెట్లో ఎల్లప్పుడూ ఎక్కువ సూర్యకాంతి పడే గంటలు ఉంటాయని నిర్ణయించవచ్చు. మీ ప్రాంతం లేదా మీ నగరం కోసం ఇలాంటి ఒక రెండు వరుసల కమ్మీ రేఖాచిత్రాన్ని తయారు చేయవచ్చు.

మనకు సంబంధించిన మరొక ఉదాహరణను చూద్దాం.

ఉదాహరణ 10

ఒక గణిత ఉపాధ్యాయురాలు త్రైమాసిక పరీక్ష తర్వాత ఆమె ఉపయోగించిన నూతన బోధన యొక్క కొత్త సాంకేతికత ప్రభావవంతంగా ఉందో లేదో అని తెలుసుకోవాలనుకుంది. ఆమె త్రైమాసిక పరీక్షలో (25 మార్కులకు) మరియు అర్థ వార్షిక పరీక్షలో (25 మార్కులకు) బోధనలో వెనుకబడ్డ 5 మంది పిల్లల మార్కులు ఆమె తీసుకుంది.



విద్యార్థులు	ఆసిష్	అరుణ్	కవిష్	మాయ	రీటా
త్రైమాసిక	10	15	12	20	9
అర్థ వార్షిక	15	18	16	21	15

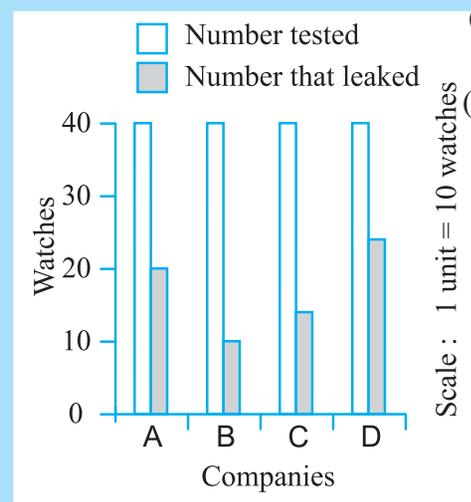
సాధన

ఆమె ప్రక్కనే ఉన్న రెండు వరుసల కమ్మీ రేఖా చిత్రాన్ని గీచి చాలా మంది విద్యార్థులలో గణనీయమైన మెరుగుదలని కనుగొంటుంది. ఉపాధ్యాయురాలు తన కొత్త బోధనా సాంకేతికతను ఉపయోగించడం కొనసాగించాలని నిర్ణయించుకున్నారు. మీరు రెండు వరుసల కమ్మీ రేఖా చిత్రాన్ని ఉపయోగించగల మరొకరిని సందర్శించి మీరు ఆలోచించగలరా?

ప్రయత్నించండి.

వివిధ కంపెనీలచే తయారు చేయబడిన నీటి నిరోధక వాచీలను పరీక్షించిన ఒక సర్వే ఫలితాన్ని కమ్మీ రేఖా చిత్రం (పటం 3.2) చూపుతుంది.

ఈ కంపెనీలలో ప్రతి ఒక్కటి తమ వాచీలు నీటి నిరోధకతను కలిగి ఉన్నాయని పేర్కొన్నాయి. పరీక్షించిన తర్వాత పై ఫలితాలు వెల్లడయ్యాయి.



పటం 3.2

- (a) కంపెనీ యొక్క లీక్ అయిన వాచీల సంఖ్య పరీక్షించిన వాచీల సంఖ్యలో ఎంత భాగమో కనుగొనగలరా?
 - (b) మీరు దీని ఆధారంగా ఏ కంపెనీ గడియారాలు మెరుగైనవో చెప్పగలరా?
2. 1995, 1996, 1997 మరియు 1998 సంవత్సరాలలో ఇంగ్లీష్ మరియు హిందీ పుస్తకాల విక్రయం క్రింద ఇవ్వబడింది :

సం॥	1995	1996	1997	1998
ఇంగ్లీష్	350	400	450	620
హిందీ	500	525	600	650

రెండు వరుసల కమ్మీ రేఖా చిత్రాన్ని గీయండి మరియు ఈ క్రింది ప్రశ్నలకు సమాధానం ఇవ్వండి:

- (a) రెండు భాషల పుస్తకాల విక్రయంలో ఏ సంవత్సరంలో తక్కువ వ్యత్యాసం ఉంది?
- (b) ఇంగ్లీషు పుస్తకాలకు డిమాండ్ వేగంగా పెరిగిందని చెప్పగలరా?

EXERCISE 3.3

1. Use the bar graph (Fig 3.3) to answer the following questions.
 (a) Which is the most popular pet? (b) How many students have dog as a pet?

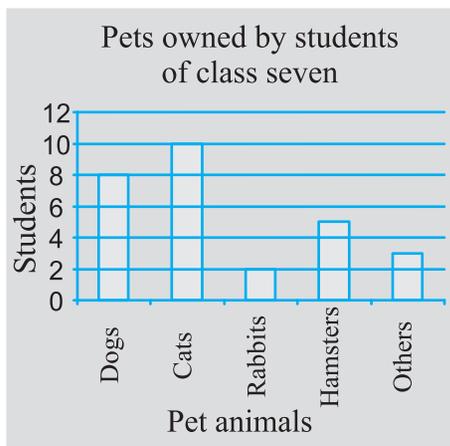


Fig 3.3

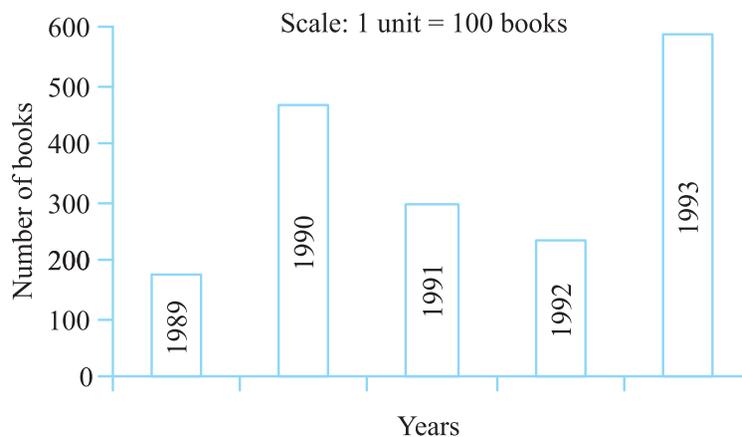


Fig 3.4

2. Read the bar graph (Fig 3.4) which shows the number of books sold by a bookstore during five consecutive years and answer the following questions:
 (i) About how many books were sold in 1989? 1990? 1992?
 (ii) In which year were about 475 books sold? About 225 books sold?
 (iii) In which years were fewer than 250 books sold?
 (iv) Can you explain how you would estimate the number of books sold in 1989?
3. Number of children in six different classes are given below. Represent the data on a bar graph.

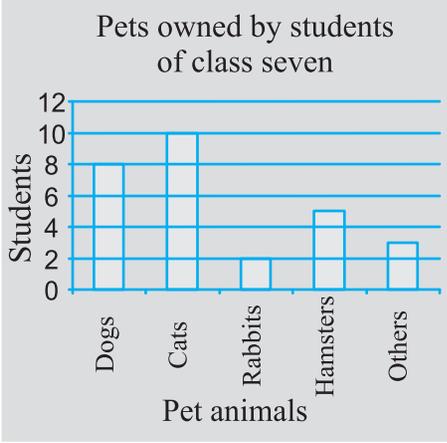
Class	Fifth	Sixth	Seventh	Eighth	Ninth	Tenth
Number of Children	135	120	95	100	90	80

- (a) How would you choose a scale?
 (b) Answer the following questions:
 (i) Which class has the maximum number of children? And the minimum?
 (ii) Find the ratio of students of class sixth to the students of class eight.
4. The performance of a student in 1st Term and 2nd Term is given. Draw a double bar graph choosing appropriate scale and answer the following:

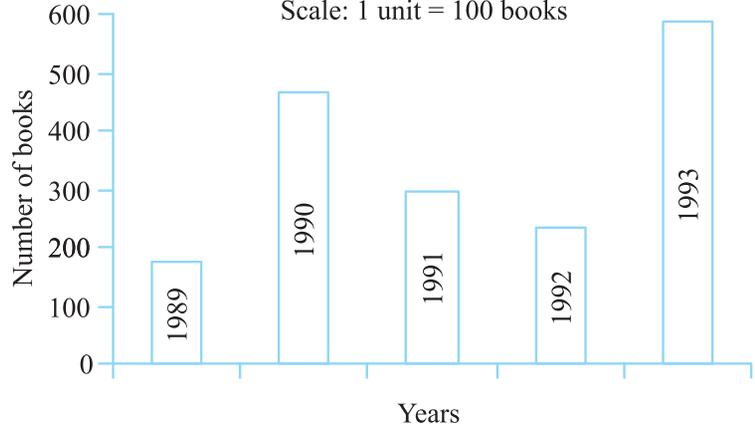
Subject	English	Hindi	Maths	Science	S. Science
1 st Term (M.M. 100)	67	72	88	81	73
2 nd Term (M.M. 100)	70	65	95	85	75

అభ్యాసం 3.3

1. కింది ప్రశ్నలకు సమాధానమివ్వడానికి కమ్మీ రేఖాచిత్రమును (పటం. 3.3) ఉపయోగించండి.
 (a) అత్యంత ప్రజాదరణ పొందిన పెంపుడు జంతువు ఏది? (b) ఎంత మంది విద్యార్థులు కుక్కను పెంపుడు జంతువుగా కలిగి ఉన్నారు?



పటం 3.3



పటం 3.4

2. వరుసగా ఐదు సంవత్సరాలలో పుస్తక దుకాణం ద్వారా విక్రయించబడిన పుస్తకాల సంఖ్యను చూపే కమ్మీ రేఖాచిత్రమును (పటం 3.4) పరిశీలించండి మరియు క్రింది ప్రశ్నలకు సమాధానం ఇవ్వండి:
 (i) 1989, 1990, 1992 సంవత్సరాలలో సుమారు ఎన్ని పుస్తకాలు అమ్ముడయ్యాయి?
 (ii) ఏ సంవత్సరంలో దాదాపు 475 పుస్తకాలు అమ్ముడయ్యాయి? దాదాపు 225 పుస్తకాలు ఎప్పుడు అమ్ముడయ్యాయి?
 (iii) ఏ సంవత్సరాల్లో 250 కంటే తక్కువ పుస్తకాలు అమ్ముడయ్యాయి?
 (iv) 1989 లో విక్రయించబడిన పుస్తకాల సంఖ్యను మీరు ఎలా అంచనా వేస్తారో వివరించగలరా?
3. ఆరు వేర్వేరు తరగతుల్లోని పిల్లల సంఖ్య క్రింద ఇవ్వబడింది. దత్తాంశంను కమ్మీ రేఖా చిత్రంలో సూచించండి.

తరగతి	ఐదవ	ఆరవ	ఏడవ	ఎనిమిది	తొమ్మిది	పది
విద్యార్థుల సంఖ్య	135	120	95	100	90	80

- (a) మీరు స్కేల్‌ని ఎలా ఎంచుకుంటారు?
 (b) కింది ప్రశ్నలకు సమాధానం ఇవ్వండి:
 (i) ఏ తరగతిలో గరిష్ట సంఖ్యలో పిల్లలు ఉన్నారు? మరియు కనీస సంఖ్యలో పిల్లలు ఉన్నారు?
 (ii) ఆరవ తరగతి విద్యార్థులకు ఎనిమిదో తరగతి విద్యార్థులకు నిష్పత్తిని కనుగొనండి.
4. మొదటి టర్మ్ మరియు రెండవ టర్మ్ లలో ఒక విద్యార్థి యొక్క పనితీరు ఇవ్వబడింది. తగిన స్కేల్‌ని ఎంచుకుని రెండు వరుసల కమ్మీ రేఖాచిత్రాన్ని గీయండి మరియు కింది వాటికి సమాధానం ఇవ్వండి:

సబ్జెక్ట్	ఆంగ్లం	హిందీ	గణితం	సైన్స్	సోషల్
మొదటి టెర్మ్ (యం.యం. 100)	67	72	88	81	73
మొదటి టెర్మ్ (యం.యం. 100)	70	65	95	85	75

- (i) In which subject, has the child improved his performance the most?
- (ii) In which subject is the improvement the least?
- (iii) Has the performance gone down in any subject?

5. Consider this data collected from a survey of a colony.

Favourite Sport	Cricket	Basket Ball	Swimming	Hockey	Athletics
Watching	1240	470	510	430	250
Participating	620	320	320	250	105



- (i) Draw a double bar graph choosing an appropriate scale.
What do you infer from the bar graph?
 - (ii) Which sport is most popular?
 - (iii) Which is more preferred, watching or participating in sports?
6. Take the data giving the minimum and the maximum temperature of various cities given in the beginning of this Chapter (Table 3.1). Plot a double bar graph using the data and answer the following:
- (i) Which city has the largest difference in the minimum and maximum temperature on the given date?
 - (ii) Which is the hottest city and which is the coldest city?
 - (iii) Name two cities where maximum temperature of one was less than the minimum temperature of the other.
 - (iv) Name the city which has the least difference between its minimum and the maximum temperature.

WHAT HAVE WE DISCUSSED?

1. Average is a number that represents or shows the central tendency of a group of observations or data.
2. Arithmetic mean is one of the representative values of data.
3. Mode is another form of central tendency or representative value. The mode of a set of observations is the observation that occurs most often.
4. Median is also a form of representative value. It refers to the value which lies in the middle of the data with half of the observations above it and the other half below it.
5. A bar graph is a representation of numbers using bars of uniform widths.
6. Double bar graphs help to compare two collections of data at a glance.



- (i) ఏ సబ్జెక్ట్ లో, పిల్లవాడు తన పనితీరును బాగా మెరుగుపరుచుకున్నాడు?
- (ii) ఏ సబ్జెక్ట్ లో మెరుగుదల తక్కువగా ఉంది?
- (iii) ఏదైనా సబ్జెక్ట్ లో పనితీరు తగ్గిందా?

5. ఒక కాలనీలోని సర్వే నుండి సేకరించిన ఈ దత్తాంశంను పరిగణించండి.

ఇష్టమైన క్రీడ	క్రికెట్	బాస్కెట్ బాల్	ఈత కొట్టడం	హాకీ	అథ్లెటిక్స్
చూడడం	1240	470	510	430	250
పాల్గొనటం	620	320	320	250	105



- (i) తగిన స్కేల్ ని ఎంచుకుని రెండు వరుసల కమ్మీ రేఖాచిత్రాన్ని గీయండి. కమ్మీ రేఖాచిత్రం నుండి మీరు ఏమి చెప్పగలరు?

- (ii) ఏ క్రీడ అత్యంత ప్రజాదరణ పొందింది?

- (iii) క్రీడలను చూడటం లేదా పాల్గొనడంలో ఎక్కువ మంది దేన్ని ఎన్నుకున్నారు?

6. ఈ అధ్యాయం ప్రారంభంలో ఇవ్వబడిన వివిధ నగరాల కనిష్ట మరియు గరిష్ట ఉష్ణోగ్రతను ఇచ్చే దత్తాంశంను(టేబుల్ 3.1) తీసుకోండి. దత్తాంశంను ఉపయోగించి రెండు వరుసల కమ్మీ రేఖా చిత్రాన్ని గీయండి మరియు క్రింది వాటికి సమాధానం ఇవ్వండి:

- (i) ఇచ్చిన తేదీలో కనిష్ట మరియు గరిష్ట ఉష్ణోగ్రతలలో అత్యధిక వ్యత్యాసం ఉన్న నగరం ఏది?
- (ii) అత్యంత వేడిగా ఉండే నగరం ఏది మరియు అత్యంత శీతల నగరం ఏది?
- (iii) ఒకదాని గరిష్ట ఉష్ణోగ్రత మరొకదాని కనిష్ట ఉష్ణోగ్రత కంటే తక్కువగా ఉన్న రెండు నగరాలను పేర్కొనండి.
- (iv) కనిష్ట మరియు గరిష్ట ఉష్ణోగ్రతల మధ్య అతి తక్కువ వ్యత్యాసం ఉన్న నగరాన్ని పేర్కొనండి.

మనం ఏం చర్చించాం?

1. సగటు అనేది సమాహ పరిశీలనలు లేదా దత్తాంశం యొక్క కేంద్రీయ స్థాన విలువలని సూచించే లేదా చూపే సంఖ్య.
2. దత్తాంశం యొక్క ప్రాతినిధ్య విలువల్లో అంకగణిత సగటు ఒకటి.
3. బాహుళకము అనేది కేంద్రీయ స్థాన విలువల లేదా ప్రాతినిధ్య విలువ యొక్క మరొక రూపం. పరిశీలనల సమితి యొక్క బాహుళకము అనేది చాలా తరచుగా కనిపించే పరిశీలన.
4. మధ్యగతము కూడా ప్రాతినిధ్య విలువ యొక్క ఒక రూపం. సగం పరిశీలనలు పైన, సగం పరిశీలనలు కింద ఉండే విధంగా ఇది మధ్యలో ఉన్న విలువను సూచిస్తుంది.
5. కమ్మీ రేఖా చిత్రం అనేది ఏకరీతి వెడల్పుల కమ్మీ లను ఉపయోగించే సంఖ్యల ప్రాతినిధ్యం.
6. రెండు వరుసల కమ్మీ రేఖా చిత్రాలు రెండు దత్తాంశ సేకరణలను ఒక చూపులో సరిపోల్చడానికి సహాయపడతాయి.



Simple Equations



4.1 A MIND-READING GAME!

The teacher has said that she would be starting a new chapter in mathematics and it is going to be simple equations. Appu, Sarita and Ameena have revised what they learnt in algebra chapter in Class VI. Have you? Appu, Sarita and Ameena are excited because they have constructed a game which they call mind reader and they want to present it to the whole class.



The teacher appreciates their enthusiasm and invites them to present their game. Ameena begins; she asks Sara to think of a number, multiply it by 4 and add 5 to the product. Then, she asks Sara to tell the result. She says it is 65. Ameena instantly declares that the number Sara had thought of is 15. Sara nods. The whole class including Sara is surprised.

It is Appu's turn now. He asks Balu to think of a number, multiply it by 10 and subtract 20 from the product. He then asks Balu what his result is? Balu says it is 50. Appu immediately tells the number thought by Balu. It is 7, Balu confirms it.

Everybody wants to know how the 'mind reader' presented by Appu, Sarita and Ameena works. Can you see how it works? After studying this chapter and chapter 12, you will very well know how the game works.

4.2 SETTING UP OF AN EQUATION

Let us take Ameena's example. Ameena asks Sara to think of a number. Ameena does not know the number. For her, it could be anything $1, 2, 3, \dots, 11, \dots, 100, \dots$. Let us denote this unknown number by a letter, say x . You may use y or t or some other letter in place of x . It does not matter which letter we use to denote the unknown number Sara has thought of. When Sara multiplies the number by 4, she gets $4x$. She then adds 5 to the product, which gives $4x + 5$. The value of $(4x + 5)$ depends on the value of x . Thus if $x = 1$, $4x + 5 = 4 \times 1 + 5 = 9$. This means that if Sara had 1 in her mind, her result would have been 9. Similarly, if she thought of 5, then for $x = 5$, $4x + 5 = 4 \times 5 + 5 = 25$; Thus if Sara had chosen 5, the result would have been 25.

సామాన్య సమీకరణాలు



అధ్యాయము - 4

4.1 మనస్సులో ఉన్నదాన్ని చెప్పే ఆట!

తరగతి గదిలో ఉపాధ్యాయులు ఈ రోజు సామాన్య సమీకరణాలు అనే క్రొత్త అధ్యాయాన్ని ప్రారంభిస్తాం అని చెప్పారు. అప్పు, సరితా మరియు అమీనా 6వ తరగతిలోని బీజగణితం అధ్యాయాన్ని జ్ఞాపకం చేసుకొన్నారు. మీకు గుర్తుందా? అప్పు, సరితా మరియు అమీనా వేరొకరి మనస్సులోగల సంఖ్యను చెప్పండి అనే ఒక ఆటని తయారుచేసి అందరి ముందు ప్రదర్శించుటకు చాలా ఉత్సాహంగా ఉన్నారు.

ఉపాధ్యాయులు వారి ఉత్సాహాన్ని ప్రశంసించి ఆటను ప్రదర్శించుటకు ఆహ్వానించారు. అమీనా మొదలు పెట్టెను; మనస్సులో ఒక సంఖ్యను అనుకుని దానిని 4తో గుణించి, ఆ లబ్ధానికి 5ను కూడమని చెప్పింది. అమీనా వచ్చిన సంఖ్యను చెప్పమని శారాని అడిగింది. ఆమె 65 అని చెప్పింది. శారా మనస్సులోవున్న సంఖ్య 15 అని అమీనా వెంటనే చెప్పింది. శారా ఔను అని తల ఊపింది. శారాతో పాటు తరగతి అంతా ఆశ్చర్యపడింది.

ఇప్పుడు అప్పు వంతు వచ్చింది. అప్పు బాలును మనస్సులో ఒక సంఖ్యను అనుకుని దానిని 10తో గుణించి లబ్ధం నుండి 20 ని తీసివేయమని చెప్పాడు. బాలును ఫలితం ఎంత అని అడిగెను? బాలు 50 అని చెప్పాడు. అప్పు తక్షణమే బాలు మనస్సులో అనుకున్న సంఖ్య 7 అని చెప్పాడు, బాలు నిర్ధారించాడు.

అప్పు, సరితా మరియు అమీనా ఇంకొకరి మనస్సులోగల సంఖ్యను ఎలా చెప్పారు అనే రహస్యాన్ని తెలుసుకోవాలని అందరు అనుకున్నారు. అది ఎలా అని మీరు తెలుసుకోవాలా? ఈ అధ్యాయం మరియు 12వ అధ్యాయాన్ని అభ్యసించిన తరువాత మీకే ఈ మనస్సులో ఆట ఎలా అని తెలుస్తుంది.

4.2 సమీకరణాన్ని తయారు చేయడం

అమీనా ఉదాహరణాన్ని మనం తీసుకొందాం. అమీనా శారాకు మనస్సులో ఒక సంఖ్యను అనుకోమని చెప్పింది. అమీనాకు ఆ సంఖ్య ఏదో తెలియదు. ఆమెకు ఆ సంఖ్య 1, 2, 3, ..., 11... 100... ఇలా ఏదైనా కావచ్చు. తెలియని ఆ సంఖ్యను ఒక అక్షరం x తో సూచించండి. ఇక్కడ మనం x బదులు y లేదా t లేదా మరేదైనా అక్షరాన్ని ఉపయోగించవచ్చు. శారా అనుకున్న సంఖ్యను సూచించడానికి ఏ అక్షరం ఉపయోగిస్తాము అనేది ముఖ్యం కాదు. శారా ఆ సంఖ్యను 4 తో గుణించినపుడు ఆమెకు $4x$ వస్తుంది. ఆ లబ్ధానికి 5 ను కలిపినపుడు అది $4x + 5$ అవుతుంది. $(4x + 5)$ యొక్క విలువ x విలువ పై ఆధారపడి వుంటుంది. కావున $x=1$ అయినపుడు $4x + 5 = 4 \times 1 + 5 = 9$ అవుతుంది. అంటే శారా మనస్సులో సంఖ్య 1 అయితే ఫలితం 9 అయ్యుండేది. అదే విధంగా, ఆమె మనస్సులోని సంఖ్య 5 అవుతుంది. $x = 5$, $4x + 5 = 4 \times 5 + 5 = 25$; అంటే శారా మనస్సులో సంఖ్య 5 అయితే ఫలితం 25 అయ్యుండేది.



To find the number thought by Sara let us work backward from her answer 65. We have to find x such that

$$4x + 5 = 65 \quad (4.1)$$

Solution to the equation will give us the number which Sara held in her mind.

Let us similarly look at Appu's example. Let us call the number Balu chose as y . Appu asks Balu to multiply the number by 10 and subtract 20 from the product. That is, from y , Balu first gets $10y$ and from there $(10y - 20)$. The result is known to be 50.

Therefore,
$$10y - 20 = 50 \quad (4.2)$$

The solution of this equation will give us the number Balu had thought of.

4.3 REVIEW OF WHAT WE KNOW

Note, (4.1) and (4.2) are equations. Let us recall what we learnt about equations in Class VI. *An equation is a condition on a variable.* In equation (4.1), the variable is x ; in equation (4.2), the variable is y .

The word *variable* means something that can vary, i.e. change. A **variable** takes on different numerical values; its value is not fixed. Variables are denoted usually by letters of the alphabets, such as x, y, z, l, m, n, p , etc. From variables, we form expressions. The expressions are formed by performing operations like addition, subtraction, multiplication and division on the variables. From x , we formed the expression $(4x + 5)$. For this, first we multiplied x by 4 and then added 5 to the product. Similarly, from y , we formed the expression $(10y - 20)$. For this, we multiplied y by 10 and then subtracted 20 from the product. All these are examples of expressions.

The value of an expression thus formed depends upon the chosen value of the variable. As we have already seen, when $x = 1$, $4x + 5 = 9$; when $x = 5$, $4x + 5 = 25$. Similarly, when $x = 15$, $4x + 5 = 4 \times 15 + 5 = 65$;
when $x = 0$, $4x + 5 = 4 \times 0 + 5 = 5$; and so on.

Equation (4.1) is a condition on the variable x . It states that the value of the expression $(4x + 5)$ is 65. The condition is satisfied when $x = 15$. It is the solution to the equation $4x + 5 = 65$. When $x = 5$, $4x + 5 = 25$ and not 65. Thus $x = 5$ is not a solution to the equation. Similarly, $x = 0$ is not a solution to the equation. No value of x other than 15 satisfies the condition $4x + 5 = 65$.

TRY THESE



The value of the expression $(10y - 20)$ depends on the value of y . Verify this by giving five different values to y and finding for each y the value of $(10y - 20)$. From the different values of $(10y - 20)$ you obtain, do you see a solution to $10y - 20 = 50$? If there is no solution, try giving more values to y and find whether the condition $10y - 20 = 50$ is met.

శారా మనస్సులోని సంఖ్యను తెలుసుకోవడానికి ఆమె జవాబు 65 నుండి వెనుకకు వద్దాం. మనం

$$4x + 5 = 65 \text{ అగునట్లు } x \text{ విలువ కనిపెట్టడానికి ప్రయత్నిద్దాం.} \quad (4.1)$$

ఈ సమీకరణం యొక్క సాధనే మనకు సారా మనస్సులో గల సంఖ్యను ఇస్తుంది అదే విధంగా అప్పు ఉదాహరణను పరిశీలిద్దాం. బాలు కోరుకొన్న సంఖ్య y అనుకొందాం. అప్పు బాలును ఆ సంఖ్యను 10తో గుణించి లబ్ధం నుండి 20 ను తీసివేయమని చెప్పాడు. బాలు y తో 10ని గుణించినప్పుడు “ $10y$ ” మరియు దానినుండి 20ను తీసివేయగా $(10y - 20)$ అవుతుంది. బాలు యొక్క ఫలితం 50 అయింది.

$$\text{కావున,} \quad 10y - 20 = 50 \quad (4.2)$$

ఈ సమీకరణం యొక్క సాధనే మనకు బాలు మనస్సులోవున్న సంఖ్య అగును.

4.3 మనకు తెలిసిన వాటి యొక్క పునర్విమర్శ

(4.1) మరియు (4.2) రెండు సమీకరణాలని గమనించండి. 6వ తరగతిలో సమీకరణాల గురించి నేర్చుకొన్న దానిని ఒకసారి జ్ఞాపకం చేసుకొందాం, ‘సమీకరణం అనేది ఒక చరరాశిపై గల ఒక నియమం’. సమీకరణం(4.1)లో x చరరాశి, (4.2)లో y చరరాశి.

చరరాశి అనగా మారుతూ ఉంటుంది అని అర్థం చరరాశికి ఏదో ఒక విలువ మారుతూ ఉంటుంది. చరరాశి విభిన్న సంఖ్యా విలువలను తీసుకుంటుంది. దాని విలువ స్థిరం కాదు. చరరాశులను సాధారణంగా x, y, z, l, m, n, p , మొదలగు ఆంగ్ల అక్షరాలతో సూచిస్తాం. చరరాశుల నుండి మనం సమాసాలను ఏర్పరుస్తాము. చరరాశులపై మనం గణితపు ప్రాథమిక ప్రక్రియలైన సంకలనం, వ్యవకలనం, గుణకారం మరియు భాగాహారాలను నిర్వహించడం ద్వారా సమాసాలను ఏర్పరుస్తాం. చరరాశి x నుండి $(4x+5)$ అనే సమాసాన్ని ఏర్పరచాం. దీనికోసం మనం మొదట x ను 4తో గుణించి మరియు ఆ లబ్ధానికి 5 ను కూడాము. అదేవిధంగా y నుండి మనం $(10y - 20)$ అనే సమాసం ఏర్పరుస్తాం. దీనికోసం, y ని 10తో గుణించి, లబ్ధం నుండి 20ని తీసివేశాం. ఇవన్నీ సమాసాలకు ఉదాహరణలు.

సమాసం యొక్క విలువ దానిలో ఉన్న చరరాశికి ఇచ్చే విలువపై ఆధారపడి ఉంటుంది. మనం ఇప్పటికే చూసినట్లుగా, $x = 1$, అయినప్పుడు $4x + 5 = 9$; $x = 5$, అయినప్పుడు $4x + 5 = 25$.

$$\text{ఇలాగే,} \quad x = 15, \quad 4x + 5 = 4 \times 15 + 5 = 65;$$

$$\text{ఇలాగే,} \quad x = 0, \quad 4x + 5 = 4 \times 0 + 5 = 5; \text{ మరియు మొదలైనవి}$$

సమీకరణం (4.1) అనేది చరరాశి x పై గల నియమం. దాని ప్రకారం $(4x + 5)$ సమాసం విలువ 65. $x = 15$ సమీకరణం సంతృప్తి చెందుతుంది మరియు ఇది $4x + 5 = 65$ కు సాధన అగును. $x = 5$ అయినప్పుడు, $4x + 5 = 25$ అవుతుంది కాని 65 కాదు. కావున $x = 5$. ఈ సమీకరణపు సాధన కాదు. అదేవిధంగా $x = 0$ కూడా సమీకరణపు సాధన కాదు. $x = 15$ కాక వేరే ఏ విలువ కూడా $4x + 5 = 65$ సమీకరణాన్ని తృప్తిపరచలేదు.

ప్రయత్నించండి



$(10y - 20)$ సమాసం విలువ y యొక్క విలువపై ఆధారపడి వుంటుంది. y కు ఐదు వివిధ విలువలను ఇస్తూ $(10y-20)$ విలువను కనుగొనుట ద్వారా సరిచూడండి. మనం పొందిన $10y-20$ యొక్క వివిధ విలువలలో $10y-20 = 50$ కు సాధనను చూసారా? సాధన లేకపోతే y యొక్క వివిధ విలువలతో $10y - 20 = 50$ సరిపోయే వరకు ప్రయత్నించండి.

4.4 WHAT EQUATION IS?

In an equation there is always an **equality** sign. The equality sign shows that the value of the expression to the left of the sign (the left hand side or LHS) is equal to the value of the expression to the right of the sign (the right hand side or RHS). In equation (4.1), the LHS is $(4x + 5)$ and the RHS is 65. In equation (4.2), the LHS is $(10y - 20)$ and the RHS is 50.

If there is some sign other than the equality sign between the LHS and the RHS, it is not an equation. Thus, $4x + 5 > 65$ is not an equation.

It says that, the value of $(4x + 5)$ is greater than 65.

Similarly, $4x + 5 < 65$ is not an equation. It says that the value of $(4x + 5)$ is smaller than 65.

In equations, we often find that the RHS is just a number. In Equation (4.1), it is 65 and in equation (4.2), it is 50. But this need not be always so. The RHS of an equation may be an expression containing the variable. For example, the equation

$$4x + 5 = 6x - 25$$

has the expression $(4x + 5)$ on the left and $(6x - 25)$ on the right of the equality sign.

In short, an equation is a condition on a variable. The condition is that two expressions should have equal value. Note that at least one of the two expressions must contain the variable.

We also note a simple and useful property of equations. The equation $4x + 5 = 65$ is the same as $65 = 4x + 5$. Similarly, the equation $6x - 25 = 4x + 5$ is the same as $4x + 5 = 6x - 25$. *An equation remains the same, when the expressions on the left and on the right are interchanged.* This property is often useful in solving equations.

EXAMPLE 1 Write the following statements in the form of equations:

- (i) The sum of three times x and 11 is 32.
- (ii) If you subtract 5 from 6 times a number, you get 7.
- (iii) One fourth of m is 3 more than 7.
- (iv) One third of a number plus 5 is 8.

SOLUTION

- (i) Three times x is $3x$.

Sum of $3x$ and 11 is $3x + 11$. The sum is 32.

The equation is $3x + 11 = 32$.

- (ii) Let us say the number is z ; z multiplied by 6 is $6z$.

Subtracting 5 from $6z$, one gets $6z - 5$. The result is 7.

The equation is $6z - 5 = 7$



4.4 సమీకరణం అనగా నేమి?

ఒక సమీకరణంలో ఎల్లప్పుడూ సమానత్వ (=) గుర్తు వుంటుంది. సమానత్వ గుర్తుకు ఎడమవైపు (left hand side or LHS) విలువ, సమానత్వ గుర్తుకు కుడివైపు (Right hand side or RHS) విలువకు సమానంగా వుంటుంది. సమీకరణం (4.1) లో LHS విలువ $(4x + 5)$ మరియు RHS విలువ 65 అయింది. సమీకరణం (4.2) లో LHS విలువ $(10y - 20)$ మరియు RHS విలువ 50 అయింది.

LHS మరియు RHS మధ్య సమానత్వ గుర్తుకు బదులుగా వేరే ఏ గుర్తువున్ననూ అది సమీకరణం కాదు. కావున $4x + 5 > 65$ ఒక సమీకరణం కాదు. ఎందుకంటే అది $(4x + 5)$ అనునది 65 కంటే పెద్దది అని సూచిస్తుంది. ఇట్టే $4x + 5 < 65$ కూడా సమీకరణం కాదు. అది $(4x + 5)$ అనునది 65 కంటే చిన్నది అని సూచిస్తుంది.

సాధారణంగా సమీకరణాలలో RHS ఒక సంఖ్య అనేదానిని గమనించాం. సమీకరణం (4.1) లో అది 64 మరియు (4.2)లో అది 50గా వుంది. సమీకరణంలో RHS ఎల్లప్పుడూ సంఖ్యనే అయివుండాలని లేదు, అది చరరాశిని పొందియున్న సమాసం కూడా అయివుండవచ్చు.

ఉదాహరణకు $4x + 5 = 6x - 25$

సమీకరణంలో సమానత్వ చిహ్నం ఎడమవైపున సమాసం $(4x+5)$ మరియు కుడివైపున $(6x - 25)$ వుంది. సూక్ష్మంగా చెప్పాలంటే సమీకరణం అనేది చరరాశిపైన ఒక నియమం. ఆ నియమం ఏమనగా సమాసాల రెండింటి విలువ సమానంగా వుండాలి. అలాగే రెండింటిలో కనీసం ఒక సమాసం చరరాశిని కలిగి వుండాలి.

సమీకరణాల ఒక సరళమైన మరియు ఉపయోగమైన ధర్మాన్ని గమనిద్దాం. $4x + 5 = 65$ మరియు $65 = 4x + 5$ లు రెండూ ఒకటే. అదేవిధంగా $6x - 25 = 4x + 5$ మరియు $4x + 5 = 6x - 25$ లు రెండూ ఒకటే. ఎడమవైపు మరియు కుడివైపుగల సమాసాలు తారుమారైనా సమీకరణంలో ఎలాంటి మార్పు రాదు. ఈ ధర్మం సమీకరణాలను సాధించుటకు ఉపయోగపడుతున్నది.

ఉదాహరణ 1: కింది ప్రవచనాలను సమీకరణ రూపంలో రాయండి.

- (i) x కు మూడురెట్లు మరియు 11 ల యొక్క మొత్తం 32.
- (ii) ఒక సంఖ్య యొక్క 6 రెట్ల నుండి 5ను తీసివేసినప్పుడు 7 వస్తుంది.
- (iii) m యొక్క నాల్గవ భాగం అనేది 7 కంటే 3 ఎక్కువ.
- (iv) ఒక సంఖ్య యొక్క మూడవ భాగానికి 5ను కలిపితే మొత్తం 8 అగును.

సాధన:

- (i) x యొక్క మూడు రెట్లు = $3x$.
 $3x$ మరియు 11 ల మొత్తం $3x + 11$. దీని మొత్తం 32.
 కనుక సమీకరణం $3x + 11 = 32$ అగును.
- (ii) ఆ సంఖ్య z ; అనుకొందాం. z ను 6 తో గుణించినప్పుడు $6z$ అవుతుంది.
 $6z$ నుండి 5ను తీసివేసినప్పుడు $6z - 5$ వస్తుంది. దాని ఫలితం 7.
 కనుక సమీకరణం $6z - 5 = 7$



- (iii) One fourth of m is $\frac{m}{4}$.

It is greater than 7 by 3. This means the difference ($\frac{m}{4} - 7$) is 3.

The equation is $\frac{m}{4} - 7 = 3$.

- (iv) Take the number to be n . One third of n is $\frac{n}{3}$.

This one-third plus 5 is $\frac{n}{3} + 5$. It is 8.

The equation is $\frac{n}{3} + 5 = 8$.



EXAMPLE 2 Convert the following equations in statement form:

- (i) $x - 5 = 9$ (ii) $5p = 20$ (iii) $3n + 7 = 1$ (iv) $\frac{m}{5} - 2 = 6$

- SOLUTION**
- (i) Taking away 5 from x gives 9.
 - (ii) Five times a number p is 20.
 - (iii) Add 7 to three times n to get 1.
 - (iv) You get 6, when you subtract 2 from one-fifth of a number m .

What is important to note is that for a given equation, **not just one, but many** statement forms can be given. For example, for Equation (i) above, you can say:



TRY THESE

Write at least one other form for each equation (ii), (iii) and (iv).

- Subtract 5 from x , you get 9.
- or The number x is 5 more than 9.
- or The number x is greater by 5 than 9.
- or The difference between x and 5 is 9, and so on.

EXAMPLE 3 Consider the following situation:

Raju's father's age is 5 years more than three times Raju's age. Raju's father is 44 years old. Set up an equation to find Raju's age.

SOLUTION We do not know Raju's age. Let us take it to be y years. Three times Raju's age is $3y$ years. Raju's father's age is 5 years more than $3y$; that is, Raju's father is $(3y + 5)$ years old. It is also given that Raju's father is 44 years old.

Therefore, $3y + 5 = 44$ (4.3)

This is an equation in y . It will give Raju's age when solved.

EXAMPLE 4 A shopkeeper sells mangoes in two types of boxes, one small and one large. A large box contains as many as 8 small boxes plus 4 loose mangoes. Set up an equation which gives the number of mangoes in each small box. The number of mangoes in a large box is given to be 100.

SOLUTION Let a small box contain m mangoes. A large box contains 4 more than 8 times m , that is, $8m + 4$ mangoes. But this is given to be 100. Thus

$$8m + 4 = 100 \quad (4.4)$$

You can get the number of mangoes in a small box by solving this equation.

(iii) m లో నాల్గవ భాగం $\frac{m}{4}$ అగును

ఇది 7కు 3 ఎక్కువ. అనగా $(\frac{m}{4} - 7)$ వ్యత్యాసం 3 అని అర్థం.

కనుక సమీకరణం $\frac{m}{4} - 7 = 3$ అగును.

(iv) ఆ సంఖ్యను n అనుకొందాం. n లో మూడవ వంతు $\frac{n}{3}$.

ఈ మూడవ వంతు మరియు 5ల మొత్తం $\frac{n}{3} + 5$. ఇది 8 కు సమానం

కనుక సమీకరణం $\frac{n}{3} + 5 = 8$ అగును.



ఉదాహరణ 2 : కింది సమీకరణాలను వాక్యరూపంలోకి మార్చండి.

(i) $x - 5 = 9$ (ii) $5p = 20$ (iii) $3n + 7 = 1$ (iv) $\frac{m}{5} - 2 = 6$

సాధన

(i) x నుండి 5ను తీసివేసిన 9 వస్తుంది.

(ii) p యొక్క ఐదు రెట్లు 20 అవుతుంది.

(iii) n యొక్క మూడు రెట్లకు 7ను కూడినపుడు 1 వస్తుంది.

(iv) m యొక్క ఐదవ భాగంలో 2ను తీసివేసినపుడు 6 వస్తుంది.

ఒక ముఖ్యమైన విషయం ఏమనగా ఒక సమీకరణానికి ఒకటి కంటే ఎక్కువ వాక్యాలు రాయవచ్చును.

ఉదాహరణకు పై సమీకరణం (1) ని

x నుండి 5ను తీసివేసినపుడు 9 వస్తుంది.

లేదా సంఖ్య x , 9 కంటే 5 ఎక్కువగా వుంది.

లేదా x అనునది 9 కంటే 5 పెద్దదిగా వుంది.

లేదా x మరియు 5ల వ్యత్యాసం 9 మొదలగునవిగా కూడా రాయవచ్చును.

ఉదాహరణ 3: కింది సందర్భాలను గమనించండి.

రాజు తండ్రి వయస్సు రాజు వయస్సు యొక్క మూడు రెట్లు కంటే 5 సంవత్సరాలు ఎక్కువగా వుంది. రాజు తండ్రి వయస్సు 44 సంవత్సరాలు అయితే రాజు వయస్సు కనిపెట్టడానికి సమీకరణం వ్రాయండి.

సాధన రాజు వయస్సు మనకు తెలియదు. అతనికి y సంవత్సరాలు అని అనుకుందాం. రాజు వయస్సు కంటే మూడురెట్లు అనగా $3y$ సంవత్సరాలు. రాజు తండ్రి వయస్సు $3y$ కంటే 5 సంవత్సరాలు ఎక్కువ, అంటే రాజు యొక్క తండ్రి వయస్సు $(3y+5)$ సంవత్సరాలు. రాజు తండ్రి వయస్సు 44 సంవత్సరాలు అని ఇవ్వబడింది. అందువల్ల $3y+5 = 44$ (4.3)

ఇది y లో సమీకరణం. దీన్ని సాధించినప్పుడు రాజు యొక్క వయస్సును ఇస్తుంది.

ఉదాహరణ 4: ఒక అంగడి వ్యాపారి ఒక పెద్ద పెట్టె మరియు ఒక చిన్న పెట్టెలలో గల మామిడిపళ్ళను రెండు రకాలుగా అమ్ముతాడు. ఒక పెద్ద పెట్టెలో 8 చిన్న పెట్టెలలో ఉన్న మామిడిపళ్ళకు మరియు 4 విడి మామిడిపళ్ళు కలిగి ఉంది. ప్రతి చిన్న పెట్టెలో ఉన్న మామిడిపళ్ళ సంఖ్యను ఇచ్చే సమీకరణం తయారు చేయండి. పెద్ద పెట్టెలో ఉన్న మామిడి పండ్ల సంఖ్య 100 అని ఇవ్వబడింది.

సాధన చిన్న పెట్టెలో గల మామిడిపళ్ళ సంఖ్య m అనుకుందాం. పెద్ద పెట్టెలో m కు 8 రెట్లు మరియు 4 మామిడి పళ్ళు ఎక్కువగా కలవు. అనగా $8m + 4$. అయితే అది 100 గా ఇవ్వబడింది.

$$\text{కావున } 8m + 4 = 100 \quad (4.4)$$

ఈ సమీకరణాన్ని సాధించడం వల్ల చిన్న పెట్టెలో గల మామిడి పళ్ళ సంఖ్యను పొందవచ్చును.



ప్రయత్నించండి.

సమీకరణం (ii), (iii) మరియు (iv) లకు వేరొక రూపంలో వ్యాఖ్యానాలను రాయండి.

EXERCISE 4.1

1. Complete the last column of the table.

S. No.	Equation	Value	Say, whether the Equation is Satisfied. (Yes/ No)
(i)	$x + 3 = 0$	$x = 3$	
(ii)	$x + 3 = 0$	$x = 0$	
(iii)	$x + 3 = 0$	$x = -3$	
(iv)	$x - 7 = 1$	$x = 7$	
(v)	$x - 7 = 1$	$x = 8$	
(vi)	$5x = 25$	$x = 0$	
(vii)	$5x = 25$	$x = 5$	
(viii)	$5x = 25$	$x = -5$	
(ix)	$\frac{m}{3} = 2$	$m = -6$	
(x)	$\frac{m}{3} = 2$	$m = 0$	
(xi)	$\frac{m}{3} = 2$	$m = 6$	



2. Check whether the value given in the brackets is a solution to the given equation or not:
- (a) $n + 5 = 19$ ($n = 1$) (b) $7n + 5 = 19$ ($n = -2$) (c) $7n + 5 = 19$ ($n = 2$)
 (d) $4p - 3 = 13$ ($p = 1$) (e) $4p - 3 = 13$ ($p = -4$) (f) $4p - 3 = 13$ ($p = 0$)
3. Solve the following equations by trial and error method:
- (i) $5p + 2 = 17$ (ii) $3m - 14 = 4$
4. Write equations for the following statements:
- (i) The sum of numbers x and 4 is 9. (ii) 2 subtracted from y is 8.
 (iii) Ten times a is 70. (iv) The number b divided by 5 gives 6.
 (v) Three-fourth of t is 15. (vi) Seven times m plus 7 gets you 77.
 (vii) One-fourth of a number x minus 4 gives 4.
 (viii) If you take away 6 from 6 times y , you get 60.
 (ix) If you add 3 to one-third of z , you get 30.
5. Write the following equations in statement forms:
- (i) $p + 4 = 15$ (ii) $m - 7 = 3$ (iii) $2m = 7$ (iv) $\frac{m}{5} = 3$
 (v) $\frac{3m}{5} = 6$ (vi) $3p + 4 = 25$ (vii) $4p - 2 = 18$ (viii) $\frac{p}{2} + 2 = 8$

అభ్యాసం 4.1

1. పట్టికలోని చివరి నిలువ వరుసను పూరించండి.

వ.సం.	సమీకరణం	విలువ	సమీకరణం తృప్తి చెందిందా? (అవును/కాదు) చెప్పండి
(i)	$x + 3 = 0$	$x = 3$	
(ii)	$x + 3 = 0$	$x = 0$	
(iii)	$x + 3 = 0$	$x = -3$	
(iv)	$x - 7 = 1$	$x = 7$	
(v)	$x - 7 = 1$	$x = 8$	
(vi)	$5x = 25$	$x = 0$	
(vii)	$5x = 25$	$x = 5$	
(viii)	$5x = 25$	$x = -5$	
(ix)	$\frac{m}{3} = 2$	$m = -6$	
(x)	$\frac{m}{3} = 2$	$m = 0$	
(xi)	$\frac{m}{3} = 2$	$m = 6$	



2. బ్రాకెట్లలో ఇచ్చిన విలువ, ఇచ్చిన సమీకరణానికి సాధన అవుతుందా, కాదా సరిచూడండి.

(a) $n + 5 = 19$ ($n = 1$) (b) $7n + 5 = 19$ ($n = -2$) (c) $7n + 5 = 19$ ($n = 2$)
 (d) $4p - 3 = 13$ ($p = 1$) (e) $4p - 3 = 13$ ($p = -4$) (f) $4p - 3 = 13$ ($p = 0$)

3. యత్నద్లోపపద్ధతిద్వారా కింది సమీకరణాలను సాధించండి.

(i) $5p + 2 = 17$ (ii) $3m - 14 = 4$

4. కింది ప్రవచనాలకు సమీకరణాలు వ్రాయండి.

- (i) x మరియు 4 సంఖ్యల యొక్క మొత్తం 9. (ii) y నుండి 2ను తీసివేసినప్పుడు 8 వస్తుంది.
 (iii) a యొక్క 10రెట్లు 70. (iv) b ని 5తో భాగించినప్పుడు 6 వస్తుంది.
 (v) t యొక్క మూడింట నాలుగు వంతులు 15. (vi) m యొక్క 7రెట్లు మరియు 7ల మొత్తం 77
 (vii) x లో నాల్గవ వంతు నుండి 4 ను తీసివేస్తే 4 వస్తుంది.
 (viii) y యొక్క 6 రెట్లు నుండి 6 ను తీసివేస్తే 60 వస్తుంది.
 (ix) z మూడవ వంతుకు 3 ను కూడినప్పుడు 30 వస్తుంది.

5. క్రింది సమీకరణాలకు ప్రవచనాలను రాయండి.

(i) $p + 4 = 15$ (ii) $m - 7 = 3$ (iii) $2m = 7$ (iv) $\frac{m}{5} = 3$
 (v) $\frac{3m}{5} = 6$ (vi) $3p + 4 = 25$ (vii) $4p - 2 = 18$ (viii) $\frac{p}{2} + 2 = 8$

6. Set up an equation in the following cases:
- Irfan says that he has 7 marbles more than five times the marbles Parmit has. Irfan has 37 marbles. (Take m to be the number of Parmit's marbles.)
 - Laxmi's father is 49 years old. He is 4 years older than three times Laxmi's age. (Take Laxmi's age to be y years.)
 - The teacher tells the class that the highest marks obtained by a student in her class is twice the lowest marks plus 7. The highest score is 87. (Take the lowest score to be l .)
 - In an isosceles triangle, the vertex angle is twice either base angle. (Let the base angle be b in degrees. Remember that the sum of angles of a triangle is 180 degrees).

4.4.1 Solving an Equation

Consider an equality $8 - 3 = 4 + 1$ (4.5)

The equality (4.5) holds, since both its sides are equal (each is equal to 5).

- Let us now add 2 to both sides; as a result

$$\text{LHS} = 8 - 3 + 2 = 5 + 2 = 7 \qquad \text{RHS} = 4 + 1 + 2 = 5 + 2 = 7.$$

Again the equality holds (i.e., its LHS and RHS are equal).

Thus *if we add the same number to both sides of an equality, it still holds.*

- Let us now subtract 2 from both the sides; as a result,

$$\text{LHS} = 8 - 3 - 2 = 5 - 2 = 3 \qquad \text{RHS} = 4 + 1 - 2 = 5 - 2 = 3.$$

Again, the equality holds.

Thus *if we subtract the same number from both sides of an equality, it still holds.*

- Similarly, *if we multiply or divide both sides of the equality by the same non-zero number, it still holds.*

For example, let us multiply both the sides of the equality by 3, we get

$$\text{LHS} = 3 \times (8 - 3) = 3 \times 5 = 15, \quad \text{RHS} = 3 \times (4 + 1) = 3 \times 5 = 15.$$

The equality holds.

Let us now divide both sides of the equality by 2.

$$\text{LHS} = (8 - 3) \div 2 = 5 \div 2 = \frac{5}{2}$$

$$\text{RHS} = (4 + 1) \div 2 = 5 \div 2 = \frac{5}{2} = \text{LHS}$$

Again, the equality holds.

If we take any other equality, we shall find the same conclusions.

Suppose, we do not observe these rules. Specifically, suppose we add different numbers, to the two sides of an equality. We shall find in this case that the equality does not



6. క్రింది సందర్భాలను సమీకరణ రూపంలో వ్రాయండి.
- ఇర్ఫాన్ తన దగ్గర పర్మిట్ దగ్గరవున్న గోళీల కన్నా ఐదు రెట్లు కంటే 7 గోళీలు ఎక్కువగా వున్నవి అని చెప్పాడు. ఇర్ఫాన్ దగ్గర 37 గోళీలు కలవు (పర్మిట్ దగ్గరవున్న గోళీల సంఖ్య అని తీసుకోండి).
 - లక్ష్మీ తండ్రి వయస్సు 49 సంవత్సరాలు. ఆతని వయస్సు, లక్ష్మీ వయస్సుకు మూడురెట్లు కంటే 4 సంవత్సరాలు ఎక్కువ. (లక్ష్మీ వయస్సు y సంవత్సరాలు అని తీసుకోండి).
 - తరగతి గదిలో ఉపాధ్యాయురాలు, ఒక విద్యార్థిని పొందిన గరిష్ట మార్కులు, తరగతిలో మరొక విద్యార్థి పొందిన అతి తక్కువ మార్కుల 2 రెట్లు కంటే 7 మార్కులు ఎక్కువ అని చెప్పింది. గరిష్ట మార్కులు 87. (కనిష్ట మార్కును l అని తీసుకోండి).
 - సమద్విభాహు త్రిభుజంలో శీర్షకోణం ఏదైనా ఇతర ఒక భూ కోణంకు రెండు రెట్లు కలదు. (భూ కోణం b డిగ్రీలు అనుకోండి. త్రిభుజాల అంతర్ కోణాల మొత్తం 180° అని గుర్తుచేసుకోండి.)

4.4.1 సమీకరణాన్ని సాధించడం

ఈ సమానత్వాన్ని గమనించండి. $8 - 3 = 4 + 1$ (4.5)

ఇరువైపులా సమానంగా వుండడం వల్ల ఇక్కడ సమీకరణం (4.5) సమానత్వం సాధించింది. (ప్రతిదీ 5కు సమానం).

- ఇరువైపులా మన 2ను కూడినపుడు ఫలితం క్రిందివిధంగా వుంటుంది.

$$\text{LHS} = 8 - 3 + 2 = 5 + 2 = 7 \quad \text{RHS} = 4 + 1 + 2 = 5 + 2 = 7.$$

ఇప్పుడు కూడా సమానత్వం కలిగిఉంది. (ఎందుకంటే LHS మరియు RHSలు సమానంగా వున్నాయి)

ఇలా, ఒక సమానత్వానికి ఇరువైపులా ఒకే సంఖ్యను కలిపితే సమానత్వంలో మార్పు ఉండదు.

- ఇరువైపులా మనం 2ను తీసివేస్తే ఫలితం ఈ కిందివిధంగా ఉంటుంది.

$$\text{LHS} = 8 - 3 - 2 = 5 - 2 = 3 \quad \text{RHS} = 4 + 1 - 2 = 5 - 2 = 3.$$

ఇప్పుడు కూడా సమానత్వం కలిగి ఉంది. ఇలా ఒక సమానత్వానికి ఇరువైపులా ఒకే సంఖ్యను తీసివేస్తే సమానత్వంలో మార్పు ఉండదు.

- అదేవిధంగా, సమానత్వానికి ఇరువైపులా ఒక శూన్యేతర సంఖ్యతో గుణిస్తే లేదా భాగిస్తే సమానత్వంలో ఎటువంటి మార్పు ఉండదు.
- అదేవిధంగా, సమానత్వానికి ఇరువైపులా ఒక శూన్యేతర సంఖ్యతో గుణిస్తే లేదా భాగిస్తే సమానత్వంలో ఎటువంటి మార్పు ఉండదు.

ఉదాహరణకు, సమానత్వం ఇరువైపులా 3తో గుణిస్తే

$$\text{LHS} = 3 \times (8 - 3) = 3 \times 5 = 15, \quad \text{RHS} = 3 \times (4 + 1) = 3 \times 5 = 15.$$

సమానత్వం కలిగి ఉంది.

ఇప్పుడు సమానత్వపు ఇరువైపులా 2తో భాగిస్తాం.

$$\text{LHS} = (8 - 3) \div 2 = 5 \div 2 = \frac{5}{2}$$

$$\text{RHS} = (4+1) \div 2 = 5 \div 2 = \frac{5}{2} = \text{LHS}$$

మళ్ళీ సమానత్వం కలిగి ఉంది. ఏ సమానత్వాన్ని పరిక్షించిననూ, ఇదేవిధంగా ఫలితాలు వస్తాయి.

ఒకవేళ మనం ఈ నియమాలను గమనించలేదు. ప్రత్యేకంగా సమానత్వానికి ఇరువైపులా మనం వేర్వేరు సంఖ్యలను కలిపినాము. ఈ సందర్భంలో సమానత్వాన్ని పాటించకపోవడం మనం కనుగొంటాం.



hold (i.e., its both sides are not equal). For example, let us take again equality (4.5),

$$8 - 3 = 4 + 1$$

add 2 to the LHS and 3 to the RHS. The new LHS is $8 - 3 + 2 = 5 + 2 = 7$ and the new RHS is $4 + 1 + 3 = 5 + 3 = 8$. The equality does not hold, because the new LHS and RHS are not equal.

Thus if we fail to do the same mathematical operation with same number on both sides of an equality, the equality may not hold.

The equality that involves variables is an equation.

These conclusions are also valid for equations, as in each equation variable represents a number only.

Often an equation is said to be like a weighing balance. Doing a mathematical operation on an equation is like adding weights to or removing weights from the pans of a weighing balance.

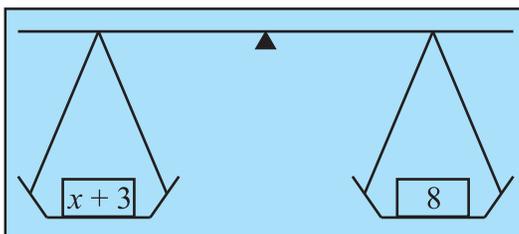
An equation is like a weighing balance with equal weights on both its pans, in which case the arm of the balance is exactly horizontal. If we add the same weights to both the pans, the arm remains horizontal. Similarly, if we remove the same weights from both the pans, the arm remains horizontal. On the other hand if we add different weights to the pans or remove different weights from them, the balance is tilted; that is, the arm of the balance does not remain horizontal.

We use this principle for solving an equation. Here, ofcourse, the balance is imaginary and numbers can be used as weights that can be physically balanced against each other. This is the real purpose in presenting the principle. Let us take some examples.

- Consider the equation: $x + 3 = 8$ (4.6)

We shall subtract 3 from both sides of this equation.

The new LHS is $x + 3 - 3 = x$ and the new RHS is $8 - 3 = 5$

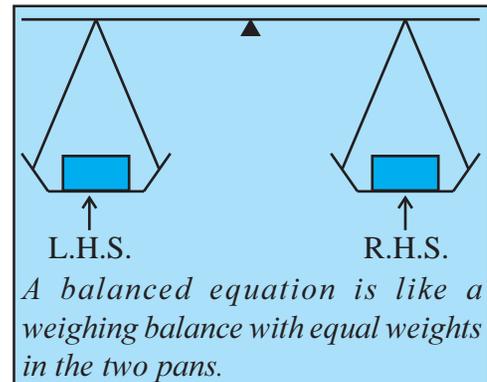


Why should we subtract 3, and not some other number? Try adding 3. Will it help? Why not? It is because subtracting 3 reduces the LHS to x.

Since this does not disturb the balance, we have

$$\text{New LHS} = \text{New RHS} \quad \text{or} \quad x = 5$$

which is exactly what we want, the solution of the equation (4.6).



(అంటే రెండువైపులు సమానం కాదు) ఉదాహరణకు మరొకసారి, $8 - 3 = 4 + 1$ సమానత్వం (4.5) ను తీసుకుందాం.

LHS కు 2ను మరియు RHSకు 3ను కూడుదాం. ఇప్పుడు LHS, $8 - 3 + 2 = 5 + 2 = 7$ మరియు $4 + 1 + 3 = 5 + 3 = 8$. ఇక్కడ LHS మరియు RHS సమానంగా లేనందువల్ల సమానత్వాన్ని సాధించుటకు సాధ్యం కాదు. ఇలా సమానత్వం ఇరువైపులా ఒకేవిధమైన గణిత పరిక్రియను ఒకేసంఖ్యను ఉపయోగించి చేయకపోతే సమానత్వాన్ని సాధించుటకు వీలుకాదు. చరరాశులు కలిగియున్న సమానత్వమే సమీకరణం.

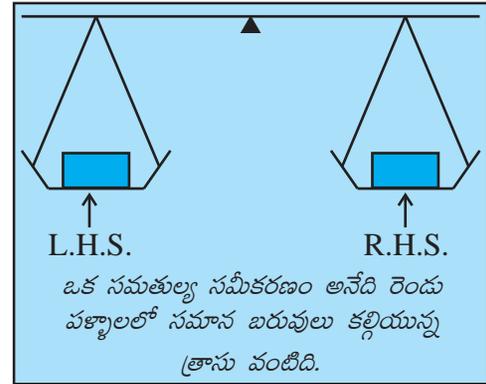
ప్రతి సమీకరణంలో చరరాశి, ఒక సంఖ్యను మాత్రమే సూచించడంవల్ల, ఈ ఫలితాలు సమీకరణాలకు కూడచెల్లుబాటు అవుతాయి.

తరుచుగా సమీకరణాన్ని ఒక త్రాసుతో పోలుస్తారు.

సమీకరణాలపై గణిత ప్రక్రియలు చేయడం అనేది త్రాసులోని పళ్ళాలలో బరువులు వేయడం, తీయడం లాగా ఉంటుంది.

సమీకరణం అనేది త్రాసు యొక్క రెండు పళ్ళాలలో సమాన బరువులను కలిగియున్న త్రాసుతో పంచడం లాంటిది. ఈ సందర్భంలో, త్రాసు యొక్క దండం ఖచ్చితంగా క్షితిజ సమాంతరంగా వుంటుంది.

రెండు పళ్ళాలలో మనం సమాన బరువులను ఉంచితే దండం ఖచ్చితంగా క్షితిజ సమాంతరంగా వుంటుంది. ఆదేవిధంగా, రెండు పళ్ళాలలో సమాన బరువులను తీసివేస్తే అప్పుడు కూడా దండం ఖచ్చితంగా క్షితిజ సమాంతరంగానే వుంటుంది. అలాకాకుండా, వేర్వేరు బరువులను పళ్ళాలలో కలిపినా లేదా తీసివేసినా తుల్యత ఉండదు మరియు పట్టి క్షితిజ సమాంతరంగా ఉండదు.



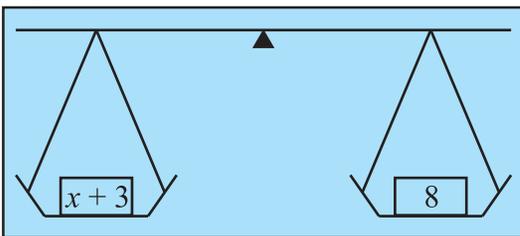
ఇదేధర్మాన్ని సమీకరణాన్ని సాధించుటకు ఉపయోగిస్తాం. ఇక్కడ

త్రాసు ఊహాత్మకమైనది మరియు ఒకదానికొకటి భౌతికంగా సమతుల్యం చేయగల సంఖ్యలను బరువులకు బదులుగా ఉపయోగించవచ్చు. ఈ ధర్మాన్ని ఉపయోగించడం వెనక ఇదే ఆసలైన ఉద్దేశం. కొన్ని ఉదాహరణాలను తీసుకొందాం.

● కింది సమీకరణాన్ని తీసుకుందాం. $x + 3 = 8$ (4.6)

సమీకరణం ఇరువైపులనుండి 3ను తీసివేద్దాం.

అప్పుడు క్రొత్త LHS, $x + 3 - 3 = x$ మరియు క్రొత్త RHS $8 - 3 = 5$



తుల్యతలో ఎలాంటి మార్పులేని కారణంగా

క్రొత్త LHS = క్రొత్త RHS

మనం 3నే ఎందుకు తీసివేయాలి? వేరే సంఖ్యను ఎందుకు తీసివేయరాదు? 3ను కూడడానికి ప్రయత్నించండి. ఇది సమీకరణాన్ని సాధించుటకు సహాయపడుతుందా? 3ను తీసివేయడం వల్ల LHSలో 3 తగ్గును

లేదా సమీకరణపు $x = 5$

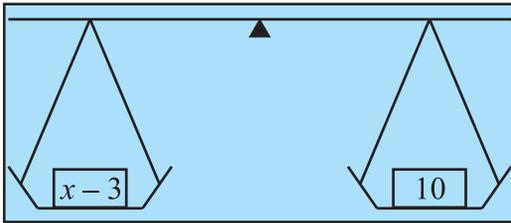
మనకు అవసరమున్నది కూడా ఇదే (4.6) యొక్క సాధన అగును.

To confirm whether we are right, we shall put $x = 5$ in the original equation. We get $\text{LHS} = x + 3 = 5 + 3 = 8$, which is equal to the RHS as required.

By doing the right mathematical operation (i.e., subtracting 3) on both the sides of the equation, we arrived at the solution of the equation.

- Let us look at another equation $x - 3 = 10$ (4.7)

What should we do here? We should add 3 to both the sides, By doing so, we shall retain the balance and also the LHS will reduce to just x .



New LHS = $x - 3 + 3 = x$, New RHS = $10 + 3 = 13$

Therefore, $x = 13$, which is the required solution.

By putting $x = 13$ in the original equation (4.7) we confirm that the solution is correct:

LHS of original equation = $x - 3 = 13 - 3 = 10$

This is equal to the RHS as required.



- Similarly, let us look at the equations

$$5y = 35 \quad (4.8)$$

$$\frac{m}{2} = 5 \quad (4.9)$$

In the first case, we shall divide both the sides by 5. This will give us just y on LHS

$$\text{New LHS} = \frac{5y}{5} = \frac{5 \times y}{5} = y, \quad \text{New RHS} = \frac{35}{5} = \frac{5 \times 7}{5} = 7$$

Therefore, $y = 7$

This is the required solution. We can substitute $y = 7$ in Eq. (4.8) and check that it is satisfied.

In the second case, we shall multiply both sides by 2. This will give us just m on the LHS

$$\text{The new LHS} = \frac{m}{2} \times 2 = m. \quad \text{The new RHS} = 5 \times 2 = 10.$$

Hence, $m = 10$ (It is the required solution. You can check whether the solution is correct).

One can see that in the above examples, the operation we need to perform depends on the equation. Our attempt should be to get the variable in the equation separated. Sometimes, for doing so we may have to carry out more than one mathematical operation. Let us solve some more equations with this in mind.

EXAMPLE 5 Solve: (a) $3n + 7 = 25$ (4.10)

(b) $2p - 1 = 23$ (4.11)

SOLUTION

- (a) We go stepwise to separate the variable n on the LHS of the equation. The LHS is $3n + 7$. We shall first subtract 7 from it so that we get $3n$. From this, in the next step we shall divide by 3 to get n . Remember we must do the same operation on both sides of the equation. Therefore, subtracting 7 from both sides,

$$3n + 7 - 7 = 25 - 7 \quad (\text{Step 1})$$

or $3n = 18$

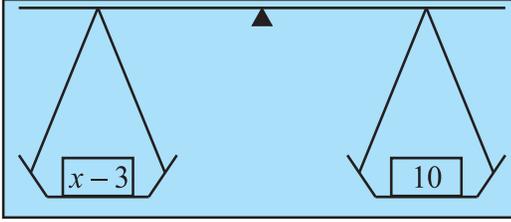
మన జవాబు సరిగ్గా వుందో లేదో అని నిర్ధారించుటకు $x = 5$ ను ఇచ్చిన సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపించి పరిశీలిద్దాం.

LHS = $x + 3 = 5 + 3 = 8$, ఇది మనకు సరిపోయేటట్లు RHS కు సమానంగా వుంది.

సమీకరణపు ఇరువైపులా సరైన గణిత ప్రక్రియను (అంటే, 3ను తీసివేయడం) ఉపయోగించడం వలన సరైన సాధన లభించింది.

- ఇంకొక సమీకరణాన్ని చూద్దాం $x - 3 = 10$ (4.7)

ఇక్కడ మనం ఏమి చేయవలెను? ఇరువైపులా 3ను కూడడం వల్ల సమీకరణం సంతృప్తం అగును మరియు LHS లో x మాత్రమే మిగులుతుంది.



క్రొత్త LHS = $x - 3 + 3 = x$, మాత్రమే మిగులుతుంది. క్రొత్త RHS = $10 + 3 = 13$.

అందువల్ల $x = 13$ ఇదే కావాల్సిన సాధన. $x = 13$ విలువను ఇచ్చిన సమీకరణం (4.7) లో ప్రతిక్షేపించి సాధనను సరిచూడవచ్చు.

ఇచ్చిన సమీకరణపు LHS = $x - 3 = 13 - 3 = 10$

ఇది మనకు సరిపోయేటట్లు RHS కు సమానంగా వుంది.



అదేవిధంగా క్రింది సమీకరణాలను చూద్దాం.

$$5y = 35 \quad (4.8)$$

$$\frac{m}{2} = 5 \quad (4.9)$$

మొదటి సందర్భంలో, ఇరువైపులా 5తో భాగించవలెను. దీనివల్ల LHS లో y మాత్రమే మిగులుతుంది.

$$\text{క్రొత్త LHS} = \frac{5y}{5} = \frac{5 \times y}{5} = y, \quad \text{క్రొత్త RHS} = \frac{35}{5} = \frac{5 \times 7}{5} = 7$$

అందువల్ల, $y = 7$

ఇదే కావాల్సిన సాధన. మనం $y = 7$ విలువను ఇచ్చిన సమీకరణం (4.8) లో ప్రతిక్షేపించి అది తృప్తి చెందిందా అని సరిచూడవచ్చును.

రెండవ సందర్భంలో ఇరువైపులా 2తో గుణించవలెను. దీనివల్ల LHS లో m మాత్రమే మిగులుతుంది.

$$\text{క్రొత్త LHS} = \frac{m}{2} \times 2 = m, \quad \text{క్రొత్త RHS} = 5 \times 2 = 10.$$

కావున, $m = 10$ (ఇదే కావలసిన సాధన. సాధన సరిగ్గావున్నదా లేదా అని సరిచూడవచ్చును). పై ఉదాహరణల వల్ల సమీకరణాన్ని సాధించుటకు ఏ గణిత ప్రక్రియను ఉపయోగించాలి అనునది ఆ సమీకరణం పై ఆధారపడివుంటుంది అని తెలుసుకోవచ్చు. మన ప్రయత్నం చరరాశిని వేరు చేయడమై వుండాలి. ఒక్కొక్కసారి చరరాశిని వేరుచేయుటకు ఒకటికంటే ఎక్కువ గణిత ప్రక్రియలను ఉపయోగించవలసివుంటుంది. దీన్ని దృష్టిలో ఉంచుకుని మరికొన్ని సమీకరణాలను సాధిద్దాం

ఉదాహరణ 5 (a) $3n + 7 = 25$ (4.10)

(b) $2p - 1 = 23$ సాధించండి (4.11)

సాధన:

(a) మనం సోపాన సోపానాలుగా LHS లో గల చరరాశిను వేరుచేద్దాం. LHS లో $3n + 7$ అవుతుంది. మొదట 7 ను తీసివేయడం వల్ల $3n$ ను పొందుతాం. తరువాత సోపానంలో n ను పొందుటకు 3తో భాగించండి. ఈ ప్రక్రియలను సమీకరణపు ఇరువైపులా ఉపయోగించాలి అనునది గుర్తుపెట్టుకోండి. కావున ఇరువైపులా 7ను తీసివేసినప్పుడు

$$3n + 7 - 7 = 25 - 7 \quad (1వ సోపానం)$$

లేదా $3n = 18$

Now divide both sides by 3,

$$\frac{3n}{3} = \frac{18}{3} \quad (\text{Step 2})$$

or $n = 6$, which is the solution.

(b) What should we do here? First we shall add 1 to both the sides:

$$2p - 1 + 1 = 23 + 1 \quad (\text{Step 1})$$

or $2p = 24$

Now divide both sides by 2, we get $\frac{2p}{2} = \frac{24}{2}$ (Step 2)

or $p = 12$, which is the solution.

One good practice you should develop is to check the solution you have obtained. Although we have not done this for (a) above, let us do it for this example.

Let us put the solution $p = 12$ back into the equation.

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= 2p - 1 = 2 \times 12 - 1 = 24 - 1 \\ &= 23 = \text{RHS} \end{aligned}$$

The solution is thus checked for its correctness.

Why do you not check the solution of (a) also?

We are now in a position to go back to the mind-reading game presented by Appu, Sarita, and Ameena and understand how they got their answers. For this purpose, let us look at the equations (4.1) and (4.2) which correspond respectively to Ameena's and Appu's examples.

● First consider the equation $4x + 5 = 65$. (4.1)

Subtracting 5 from both sides, $4x + 5 - 5 = 65 - 5$.

i.e. $4x = 60$

Divide both sides by 4; this will separate x . We get $\frac{4x}{4} = \frac{60}{4}$

or $x = 15$, which is the solution. (Check, if it is correct.)

● Now consider, $10y - 20 = 50$ (4.2)

Adding 20 to both sides, we get $10y - 20 + 20 = 50 + 20$ or $10y = 70$

Dividing both sides by 10, we get $\frac{10y}{10} = \frac{70}{10}$

or $y = 7$, which is the solution. (Check if it is correct.)

You will realise that exactly these were the answers given by Appu, Sarita and Ameena. They had learnt to set up equations and solve them. That is why they could construct their mind reader game and impress the whole class. We shall come back to this in Section 4.7.



ఇప్పుడు ఇరువైపులా 3 తో భాగించినప్పుడు,

$$\frac{3n}{3} = \frac{18}{3} \quad (2\text{వ సోపానం})$$

లేదా $n = 6$, ఇదే కావలసిన సాధన

(b) మనం ఇక్కడ ఏం చేయవచ్చును? మొదట 1ని ఇరువైపులా కూడుదాం.

$$2p - 1 + 1 = 23 + 1 \quad (1\text{వ సోపానం})$$

లేదా $2p = 24$

ఇప్పుడు, ఇరువైపులా 2 తో భాగించినపుడు $\frac{2p}{2} = \frac{24}{2}$ మనం పొందుతాం. (2వ సోపానం)

లేదా $p = 12$, ఇదే కావలసిన సాధన

మీరు తెలుసుకోవలసిన ఒక మంచి విషయం ఏమిటంటే మీరు పొందిన సాధనను సరిచూడండి.

మనము పైన (a) కోసం దీనిని చేయనప్పటికీ, ఈ ఉదాహరణ కోసం దీనిని చేద్దాం.

మనం సాధన $p = 12$ ను ఇచ్చిన సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపించగా,

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= 2p - 1 = 2 \times 12 - 1 = 24 - 1 \\ &= 23 = \text{RHS} \end{aligned}$$

ఇలా సరిచూసి సాధన సరిగ్గా వున్నదా లేదా అని తెలుసుకున్నాం. మీరు (a) యొక్క సాధనను కూడా ఎందుకు సరిచూడరాదు?

ఇప్పుడు మనం అప్పు, సరిత మరియు అమీనా ఆడిన మనస్సులో సంఖ్యను చెప్పే ఆటకు వెళ్దాం. వారు జవాబులను ఎలా పొందారో వాటిని అర్థం చేసుకుందాం. ఈ ఉద్దేశ్యం కోసం మనం వరుసగా అమీనా మరియు అప్పు ఉదాహరణలకు సరిపోవు (4.1) మరియు (4.2) సమీకరణాలను గమనిద్దాం.

● మొదట ఈ సమీకరణాన్ని పరిగణిద్దాం, $4x + 5 = 65$. (4.1)

ఇరువైపులా 5ను తీసివేసినపుడు $4x + 5 - 5 = 65 - 5$.

అనగా $4x = 60$

ఇరువైపులా 4తో భాగించినప్పుడు అది x ను వేరు చేస్తుంది. $\frac{4x}{4} = \frac{60}{4}$

లేదా $x = 15$, ఇదే కావలసిన సాధన (సరిగ్గా ఉందా సరిచూడండి)

● ఇప్పుడు ఈ సమీకరణాన్ని పరిగణిద్దాం $10y - 20 = 50$ (4.2)

ఇరువైపులా 20 ను కూడగా $10y - 20 + 20 = 50 + 20$ లేదా $10y = 70$

ఇరువైపులా 10 తో భాగించినప్పుడు, $\frac{10y}{10} = \frac{70}{10}$

లేదా $y = 7$, ఇదే కావలసిన సాధన (సరిగ్గా వుందా సరిచూడండి)

అప్పు, సరితా మరియు అమీనా సరిగ్గా ఇచ్చిన జవాబు ఇదే అని మీరు తెలుసుకుంటారు. వారికి సమీకరణాన్ని తయారుచేసి సాధించడం తెలిసినందువల్ల మనస్సులో ఉన్న సంఖ్యను చెప్పి ఆటతో అందరిని ఆశ్చర్యపడేటట్లు చేశారు. ఇదే విషయాన్ని మరొకసారి విభాగం 4.7లో చూద్దాం.



EXERCISE 4.2



1. Give first the step you will use to separate the variable and then solve the equation:

(a) $x - 1 = 0$ (b) $x + 1 = 0$ (c) $x - 1 = 5$ (d) $x + 6 = 2$
 (e) $y - 4 = -7$ (f) $y - 4 = 4$ (g) $y + 4 = 4$ (h) $y + 4 = -4$

2. Give first the step you will use to separate the variable and then solve the equation:

(a) $3l = 42$ (b) $\frac{b}{2} = 6$ (c) $\frac{p}{7} = 4$ (d) $4x = 25$
 (e) $8y = 36$ (f) $\frac{z}{3} = \frac{5}{4}$ (g) $\frac{a}{5} = \frac{7}{15}$ (h) $20t = -10$

3. Give the steps you will use to separate the variable and then solve the equation:

(a) $3n - 2 = 46$ (b) $5m + 7 = 17$ (c) $\frac{20p}{3} = 40$ (d) $\frac{3p}{10} = 6$

4. Solve the following equations:

(a) $10p = 100$ (b) $10p + 10 = 100$ (c) $\frac{p}{4} = 5$ (d) $\frac{-p}{3} = 5$
 (e) $\frac{3p}{4} = 6$ (f) $3s = -9$ (g) $3s + 12 = 0$ (h) $3s = 0$
 (i) $2q = 6$ (j) $2q - 6 = 0$ (k) $2q + 6 = 0$ (l) $2q + 6 = 12$

4.5 MORE EQUATIONS

Let us practise solving some more equations. While solving these equations, we shall learn about transposing a number, i.e., moving it from one side to the other. We can transpose a number instead of adding or subtracting it from both sides of the equation.

EXAMPLE 6 Solve: $12p - 5 = 25$ (4.12)

SOLUTION

- Adding 5 on both sides of the equation,

$$12p - 5 + 5 = 25 + 5 \quad \text{or} \quad 12p = 30$$

- Dividing both sides by 12,

$$\frac{12p}{12} = \frac{30}{12} \quad \text{or} \quad p = \frac{5}{2}$$

Check Putting $p = \frac{5}{2}$ in the LHS of equation 4.12,

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= 12 \times \frac{5}{2} - 5 = 6 \times 5 - 5 \\ &= 30 - 5 = 25 = \text{RHS} \end{aligned}$$

Note, adding 5 to both sides is the same as changing side of (-5).

$$12p - 5 = 25$$

$$12p = 25 + 5$$

*Changing side is called **transposing**. While transposing a number, we change its sign.*

అభ్యాసం 4.2



- క్రింది వాటిలో చరరాశిని వేరుచేయడానికి ఉపయోగించే మొదటి సోపానంను తెలపండి. తరువాత సమీకరణాన్ని సాధించండి.

(a) $x - 1 = 0$	(b) $x + 1 = 0$	(c) $x - 1 = 5$	(d) $x + 6 = 2$
(e) $y - 4 = -7$	(f) $y - 4 = 4$	(g) $y + 4 = 4$	(h) $y + 4 = -4$
- క్రింది వాటిలో చరరాశిని వేరుచేయడానికి ఉపయోగించే మొదటి సోపానంను తెలపండి. తరువాత సమీకరణాన్ని సాధించండి.

(a) $3l = 42$	(b) $\frac{b}{2} = 6$	(c) $\frac{p}{7} = 4$	(d) $4x = 25$
(e) $8y = 36$	(f) $\frac{z}{3} = \frac{5}{4}$	(g) $\frac{a}{5} = \frac{7}{15}$	(h) $20t = -10$
- క్రింది వాటిలో చరరాశిని వేరు చేయడానికి ఉపయోగించే సోపానాలను తెలపండి. తరువాత సమీకరణాన్ని సాధించండి.

(a) $3n - 2 = 46$	(b) $5m + 7 = 17$	(c) $\frac{20p}{3} = 40$	(d) $\frac{3p}{10} = 6$
-------------------	-------------------	--------------------------	-------------------------
- క్రింది సమీకరణాలను సాధించండి :

(a) $10p = 100$	(b) $10p + 10 = 100$	(c) $\frac{p}{4} = 5$	(d) $\frac{-p}{3} = 5$
(e) $\frac{3p}{4} = 6$	(f) $3s = -9$	(g) $3s + 12 = 0$	(h) $3s = 0$
(i) $2q = 6$	(j) $2q - 6 = 0$	(k) $2q + 6 = 0$	(l) $2q + 6 = 12$

4.5 మరిన్ని సమీకరణాలు

మరిన్ని సమీకరణాలు సాధించుట అభ్యాసం చేద్దాం. ఈ సమీకరణాలను సాధించేటప్పుడు సంఖ్యలను పక్షాంతరం అనగా ఒకవైపు నుండి మరొకవైపు మార్చడాన్ని నేర్చుకుందాం. ఇరువైపులా కూడడం లేదా తీసివేయడానికి బదులు సంఖ్యలను పక్షాంతరం చేయవచ్చును.

ఉదాహరణ 6 $12p - 5 = 25$ ను సాధించండి.

(4.12)

సూచన: రెండువైపులా 5ను కూడడం అనగా అది ఉండేవైపును మార్పు చేయడం కనుక (-5) అవుతుంది.

$$12p - 5 = 25$$

$$12p = 25 + 5$$

వైపున మార్పుచేయడాన్ని పక్షాంతరం అంటారు. సంఖ్యను పక్షాంతరం చేసినప్పుడు మనం దాని గుర్తును మార్చాలి.

- సమీకరణపు ఇరువైపులా 5ను కూడినపుడు

$$12p - 5 + 5 = 25 + 5 \quad \text{లేదా} \quad 12p = 30$$

- ఇరువైపులా 12 తో భాగించినపుడు

$$\frac{12p}{12} = \frac{30}{12} \quad \text{లేదా} \quad p = \frac{5}{2}$$

సరిచూచుట: $p = \frac{5}{2}$ ను సమీకరణం (4.12) LHS లో ప్రతిక్షేపించినప్పుడు

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= 12 \times \frac{5}{2} - 5 = 6 \times 5 - 5 \\ &= 30 - 5 = 25 = \text{RHS} \end{aligned}$$

As we have seen, while solving equations one commonly used operation is adding or subtracting the same number on both sides of the equation. *Transposing a number (i.e., changing the side of the number) is the same as adding or subtracting the number from both sides.* In doing so, the sign of the number has to be changed. What applies to numbers also applies to expressions. Let us take two more examples of transposing.

Adding or Subtracting on both sides	Transposing
(i) $3p - 10 = 5$ Add 10 to both sides $3p - 10 + 10 = 5 + 10$ or $3p = 15$	(i) $3p - 10 = 5$ Transpose (-10) from LHS to RHS (On transposing -10 becomes $+10$). $3p = 5 + 10$ or $3p = 15$
(ii) $5x + 12 = 27$ Subtract 12 from both sides $5x + 12 - 12 = 27 - 12$ or $5x = 15$	(ii) $5x + 12 = 27$ Transposing $+12$ (On transposing $+12$ becomes -12) $5x = 27 - 12$ or $5x = 15$

We shall now solve two more equations. As you can see they involve brackets, which have to be solved before proceeding.

EXAMPLE 7 Solve

(a) $4(m + 3) = 18$

(b) $-2(x + 3) = 8$

SOLUTION

(a) $4(m + 3) = 18$

Let us divide both the sides by 4. This will remove the brackets in the LHS We get,

$$m + 3 = \frac{18}{4} \quad \text{or} \quad m + 3 = \frac{9}{2}$$

or $m = \frac{9}{2} - 3$ (transposing 3 to RHS)

or $m = \frac{3}{2}$ (required solution) $\left(\text{as } \frac{9}{2} - 3 = \frac{9}{2} - \frac{6}{2} = \frac{3}{2} \right)$

Check LHS = $4 \left[\frac{3}{2} + 3 \right] = 4 \times \frac{3}{2} + 4 \times 3 = 2 \times 3 + 4 \times 3$ [put $m = \frac{3}{2}$]
= $6 + 12 = 18 = \text{RHS}$

(b) $-2(x + 3) = 8$

We divide both sides by (-2) , so as to remove the brackets in the LHS, we get,

$$x + 3 = -\frac{8}{2} \quad \text{or} \quad x + 3 = -4$$

i.e., $x = -4 - 3$ (transposing 3 to RHS) or $x = -7$ (required solution)



ఇదివరకు చూసినట్లు సమీకరణాన్ని సాధించేటప్పుడు సాధారణంగా ఉపయోగించే గణిత ప్రక్రియ అనగా ఒకే సంఖ్యను సమీకరణపు ఇరువైపులా కూడటం లేదా తీసివేయడం. ఒక సంఖ్యను పక్షాంతరం చేయడం అనగా (సంఖ్యను మరొకవైపు తీసుకెళ్ళడం) అదే సంఖ్యను ఇరువైపులా కూడడం లేదా తీసివేయడం పక్షాంతరం చేయునపుడు సంఖ్య యొక్క గుర్తును మార్చవలెను. ఈ నియమం సంఖ్యలతోపాటు సమాసాలకు కూడా వర్తిస్తుంది. మనం సంఖ్యలను పక్షాంతరం చేయు రెండు ఉదాహరణలను తీసుకుందాం.

ఇరువైపులా కూడడం లేదా తీసివేయడం	పక్షాంతరం చేయడం
(i) $3p - 10 = 5$ ఇరువైపులా 10ని కూడండి $3p - 10 + 10 = 5 + 10$ లేదా $3p = 15$	(i) $3p - 10 = 5$ -10 ను LHS నుండి RHS కు పక్షాంతరం చేయండి (-10ని పక్షాంతరం చేయునప్పుడు +10 అవుతుంది) $3p = 5 + 10$ లేదా $3p = 15$
(ii) $5x + 12 = 27$ ఇరువైపులా 12ను తీసివేయండి. $5x + 12 - 12 = 27 - 12$ లేదా $5x = 15$	(ii) $5x + 12 = 27$ +12 ను పక్షాంతరం చేయండి. (+12 ను పక్షాంతరం చేయునప్పుడు -12 అవుతుంది) $5x = 27 - 12$ లేదా $5x = 15$

ఇప్పుడు మనం ఇంకా రెండు సమీకరణాలను సాదిద్దాం. బ్రాకెట్లను కలిగియున్న సమీకరణాలను సాధించడానికి ముందు బ్రాకెట్లను తీయవలసిన ప్రక్రియను తెలుసుకొనుటకు రెండు సమీకరణాలను సాదిద్దాం.

ఉదాహరణ 7 సాధించండి.

(a) $4(m + 3) = 18$

(b) $-2(x + 3) = 8$

సాధన

(a) $4(m + 3) = 18$

ఇరువైపులా 4తో భాగించడం వల్ల LHS లో బ్రాకెట్లు తొలగించబడతాయి.

$$m + 3 = \frac{18}{4} \quad \text{లేదా} \quad m + 3 = \frac{9}{2}$$

లేదా $m = \frac{9}{2} - 3$ (3 ను RHS కు పక్షాంతరం చేసారు)

లేదా $m = \frac{3}{2}$ (కావలసిన సాధన) $\left(\frac{9}{2} - 3 = \frac{9}{2} - \frac{6}{2} = \frac{3}{2} \right)$

సరిచూచుట $\text{LHS} = 4 \left[\frac{3}{2} + 3 \right] = 4 \times \frac{3}{2} + 4 \times 3 = 2 \times 3 + 4 \times 3$ [$m = \frac{3}{2}$]ను
ప్రతిక్షేపించగా $= 6 + 12 = 18 = \text{RHS}$

(b) $-2(x + 3) = 8$

ఇరువైపులా (-2) తో భాగించడం వల్ల LHS లో బ్రాకెట్లు తొలగించబడతాయి,

$$x + 3 = -\frac{8}{2} \quad \text{లేదా} \quad x + 3 = -4$$

అపగా $x = -4 - 3$ (3 ను RHS కు పక్షాంతరం చేసారు) లేదా $x = -7$ (కావలసిన సాధన)



Check $\text{LHS} = -2(-7+3) = -2(-4)$
 $= 8 = \text{RHS}$ as required.

4.6 APPLICATIONS OF SIMPLE EQUATIONS TO PRACTICAL SITUATIONS

We have already seen examples in which we have taken statements in everyday language and converted them into simple equations. We also have learnt how to solve simple equations. Thus we are ready to solve puzzles/problems from practical situations. The method is first to form equations corresponding to such situations and then to solve those equations to give the solution to the puzzles/problems. We begin with what we have already seen [Example 1 (i) and (iii), Section 4.2].

EXAMPLE 8 The sum of three times a number and 11 is 32. Find the number.

SOLUTION

- If the unknown number is taken to be x , then three times the number is $3x$ and the sum of $3x$ and 11 is 32. That is, $3x + 11 = 32$
- To solve this equation, we transpose 11 to RHS, so that

$$3x = 32 - 11 \quad \text{or} \quad 3x = 21$$

Now, divide both sides by 3

$$\text{So} \quad x = \frac{21}{3} = 7$$

This equation was obtained earlier in Section 4.2, Example 1.

The required number is 7. (We may check it by taking 3 times 7 and adding 11 to it. It gives 32 as required.)

EXAMPLE 9 Find a number, such that one-fourth of the number is 3 more than 7.

SOLUTION

TRY THESE

- When you multiply a number by 6 and subtract 5 from the product, you get 7. Can you tell what the number is?
- What is that number one third of which added to 5 gives 8?

- Let us take the unknown number to be y ; one-fourth of y is $\frac{y}{4}$.

This number $\left(\frac{y}{4}\right)$ is more than 7 by 3.

Hence we get the equation for y as $\frac{y}{4} - 7 = 3$

- To solve this equation, first transpose 7 to RHS We get, $\frac{y}{4} = 3 + 7 = 10$. We then multiply both sides of the equation by 4, to get

$$\frac{y}{4} \times 4 = 10 \times 4 \quad \text{or} \quad y = 40 \quad (\text{the required number})$$

సరిచూచుట: $LHS = -2(-7+3) = -2(-4)$
 $= 8 = RHS$ ఇదే కావలసినది

4.6 నిజ జీవిత సందర్భాలలో సామాన్య సమీకరణపు అనువర్తనాలు

వ్యవహారిక భాషలోని ప్రవచనాలను సామాన్య సమీకరణాలుగా మార్చే ఉదాహరణలు ఇదివరకే చూశాం. సామాన్య సమీకరణాలను సాధించడాన్ని కూడా నేర్చుకొన్నాం. ఇప్పుడు ప్రాయోగిక సందర్భాలలో వచ్చు పజిల్లను/ సమస్యలను సాధించుటకు సిద్ధంగా వున్నాము. మొదట నిజజీవిత సందర్భాల పజిల్లను/ సమస్యలను సమీకరణ రూపానికి మార్చి, తరువాత ఆ సమీకరణాలను సాధించి సమస్యలకు సాధనను కనుగొనవచ్చును. మనం ముందు గమనించిన (ఉదాహరణం 1(i) మరియు (iii), విభాగం 4.2) అంశాలనుండి ప్రారంభిద్దాం.

ఉదాహరణ 8 ఒక సంఖ్య యొక్క మూడురెట్లు మరియు 11 ల మొత్తం 32 అయితే ఆ సంఖ్య ఏది?

సాధన

- తెలియని ఆ సంఖ్య x అయితే ఆ సంఖ్య యొక్క మూడురెట్లు $3x$ అవుతుంది. $3x$ మరియు 11 ల మొత్తం 32. కనుక, $3x + 11 = 32$

- సమీకరణాన్ని సాధించుటకు 11 ను RHS, కు సక్షాంతరం చేస్తాం.

$$3x = 32 - 11 \quad \text{లేదా} \quad 3x = 21$$

ఇప్పుడు ఇరువైపులా 3 తో భాగించండి.

$$\text{కనుక,} \quad x = \frac{21}{3} = 7$$

ఈ సమీకరణంను ముందుగా సెక్షన్ 4.2 ఉదాహరణ 1లో తీసుకోవడం జరిగింది

కావలసిన సంఖ్య 7 (7 ను 3తో గుణించి లభ్యానికి 11 ను కూడినప్పుడు మనకు కావలసిన 32 వస్తుంది అని సరిచూసుకోవచ్చు).

ఉదాహరణ 9 ఒక సంఖ్య యొక్క నాలుగవ వంతు 7 కంటే మూడు ఎక్కువగా వుంటే, ఆ సంఖ్యను కనిపెట్టండి.

సాధన

ప్రయత్నించండి.

- ఒక సంఖ్యను 6తో గుణించండి. గుణలబ్ధంలో నుండి 5ను తీసివేసినప్పుడు, మీకు 7 వస్తుంది. ఆ సంఖ్య ఏది అని చెప్పగలరా?
- ఒక సంఖ్య మూడింటిలో ఒక వంతుకు 5ను కూడినప్పుడు 8 లభిస్తుంది. ఆ సంఖ్య ఏది?

- ఆ సంఖ్య y అనుకుందాం. y లో నాల్గవ వంతు $\frac{y}{4}$.

ఈ సంఖ్య $\left(\frac{y}{4}\right)$ 7 కంటే 3 ఎక్కువగా వుంది.

$$\text{కావున } y \text{ యొక్క సమీకరణం } \frac{y}{4} - 7 = 3.$$

- ఈ సమీకరణం సాధించుటకు (-7) ను RHS కు పక్షాంతరం చేయవలెను.

$$\frac{y}{4} = 3 + 7 = 10.$$

సమీకరణాన్ని ఇరువైపులా 4తో గుణించగా,

$$\frac{y}{4} \times 4 = 10 \times 4 \quad \text{లేదా} \quad y = 40 \quad (\text{ఇదే కావలసిన సంఖ్య})$$

Let us check the equation formed. Putting the value of y in the equation,

$$\text{LHS} = \frac{40}{4} - 7 = 10 - 7 = 3 = \text{RHS, as required.}$$

EXAMPLE 10 Raju's father's age is 5 years more than three times Raju's age. Find Raju's age, if his father is 44 years old.

SOLUTION

- As given in Example 3 earlier, the equation that gives Raju's age is

$$3y + 5 = 44$$

- To solve it, we first transpose 5, to get $3y = 44 - 5 = 39$

$$\text{Dividing both sides by 3, we get } y = 13$$

That is, Raju's age is 13 years. (You may check the answer.)

TRY THESE



There are two types of boxes containing mangoes. Each box of the larger type contains 4 more mangoes than the number of mangoes contained in 8 boxes of the smaller type. Each larger box contains 100 mangoes. Find the number of mangoes contained in the smaller box?

EXERCISE 4.3

- Set up equations and solve them to find the unknown numbers in the following cases:
 - Add 4 to eight times a number; you get 60.
 - One-fifth of a number minus 4 gives 3.
 - If I take three-fourths of a number and add 3 to it, I get 21.
 - When I subtracted 11 from twice a number, the result was 15.
 - Munna subtracts thrice the number of notebooks he has from 50, he finds the result to be 8.
 - Ibenhal thinks of a number. If she adds 19 to it and divides the sum by 5, she will get 8.
 - Anwar thinks of a number. If he takes away 7 from $\frac{5}{2}$ of the number, the result is 23.
- Solve the following:
 - The teacher tells the class that the highest marks obtained by a student in her class is twice the lowest marks plus 7. The highest score is 87. What is the lowest score?



ఇప్పుడు రాసిన సమీకరణాన్ని పరిశీలిద్దాం. y యొక్క విలువను సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపించినప్పుడు

$$\text{LHS} = \frac{40}{4} - 7 = 10 - 7 = 3 = \text{RHS}, \text{ ఇదే కావాలిసింది.}$$

ఉదాహరణ 10 రాజు తండ్రి వయస్సు రాజు వయస్సునకు మూడురెట్టు కంటే 5 సంవత్సరాలు ఎక్కువ. రాజు తండ్రి వయస్సు 44 సం॥ అయినప్పుడు రాజు యొక్క వయస్సు ఎంత?

సాధన

- ఉదాహరణ 3లో చూపినవిధంగా రాజు యొక్క వయస్సు సూచించు సమీకరణం

$$3y + 5 = 44$$

- సమీకరణం సాధించుటకు 5ను పక్షాంతరం చేయగా $3y = 44 - 5 = 39$ ఇరువైపులా 3తో భాగించినప్పుడు $y = 13$. రాజు యొక్క వయస్సు 13 సం॥ (మీరు జవాబును సరిచూడవచ్చు)

ప్రయత్నించండి.



రెండు రకాల పెట్టెలు మామిడి పళ్ళును కలిగి ఉన్నాయి. ప్రతి పెద్ద పెట్టెలో 8 చిన్న పెట్టెలలోగల పండ్ల కంటే 4 పళ్ళు ఎక్కువగా కలవు. ప్రతి పెద్ద పెట్టెలో 100 మామిడి పళ్ళు వుంటే ప్రతి చిన్న పెట్టెలోగల మామిడి పళ్ళు సంఖ్య ఎంత?

అభ్యాసం 4.3

- క్రింది వాటికి సమీకరణాన్ని తయారుచేసి సాధించి, తెలియని ఆ సంఖ్యను కనిపెట్టండి.
 - ఒక సంఖ్య యొక్క 8 రెట్లుకు 4ను కూడినప్పుడు 60 వస్తుంది.
 - ఒక సంఖ్య యొక్క ఐదవ వంతు నుండి 4ను తీసివేస్తే 3 వస్తుంది.
 - ఒక సంఖ్య యొక్క మూడింట నాల్గవ వంతును తీసుకొని మూడును కూడితే నాకు 21 వస్తుంది
 - ఒక సంఖ్య యొక్క రెండింతల నుండి 11ను తీసివేస్తే నాకు 15 వస్తుంది.
 - మున్నూ తన వద్ద గల పుస్తకాల సంఖ్య యొక్క మూడింతలను 50 నుండి తీసివేస్తే అతనికి 8 వస్తుంది.
 - ఇబెన్ హాల్ ఒక సంఖ్యను అనుకుంది. ఆ సంఖ్యకు 19ను కూడి 5తో భాగించినప్పుడు ఆమెకు 8 వస్తుంది.
 - అన్నర్ ఒక సంఖ్యను అనుకున్నాడు. ఆ సంఖ్య యొక్క $\frac{5}{2}$ వంతు నుండి 7 తీసివేసినప్పుడు అతనికి 23 వస్తుంది.
- క్రింది వాటిని సాధించండి:
 - తరగతి గదిలో ఒక విద్యార్థిని పొందిన గరిష్ట మార్కులు తక్కువ పొందిన విద్యార్థి మార్కులకు రెండు రెట్ల కంటే 7 ఎక్కువగా ఉన్నాయి. గరిష్ట మార్కులు 87. కనిష్ట మార్కులు ఎంత?



- (b) సమద్విభాహు త్రిభుజంలో భూకోణాలు సమానంగా వున్నాయి. శీర్షకోణం 40° అయితే భూకోణాల కొలత ఎంత? (త్రిభుజం యొక్క అంతరకోణాల మొత్తం 180° అని గుర్తు చేసుకోండి)
- (c) పవన్, రాహుల్ తీసుకున్న పరుగులు కంటే రెట్టింపు పరుగులు తీసాడు. వారిద్దరు కలిసి మొత్తంగా తీసుకున్న పరుగులు రెండువందల కంటే 2 తక్కువ. ఒక్కొక్కరు తీసిన పరుగులు ఎంత?
3. క్రింది వాటిని సాధించండి:
- (i) ఇర్ఫాన్ దగ్గర పర్మిట్ వద్దగల గోళీల 5 రెట్లు కంటే 7 గోళీలు ఎక్కువగా గలవు. ఇర్ఫాన్ దగ్గర 37 గోళీలు వుంటే పర్మిట్ దగ్గరవున్న గోళీల సంఖ్య ఎంత?
- (ii) లక్ష్మి తండ్రికి 49 సం॥ తండ్రి వయస్సు, లక్ష్మి వయస్సు యొక్క మూడు రెట్లు కంటే 4 సంవత్సరాలు ఎక్కువగా ఉంది. ఇప్పుడు లక్ష్మి వయస్సు ఎంత?
- (iii) సుందరగ్రామ్ ప్రజలు గ్రామ ఉద్యానవనంలో మొక్కలను నాటారు. వీటిలో కొన్ని పండ్ల మొక్కలు. ఇతర మొక్కలు పండ్ల మొక్కల సంఖ్యకు మూడు రెట్లుకంటే రెండు ఎక్కువగా ఉన్నాయి. ఇతర మొక్కల సంఖ్య 77 ఉన్నచో, పండ్ల మొక్కల సంఖ్య ఎంత?
4. క్రింద పొడుపుకథను సాధించండి:

నేనొక సంఖ్యను,

నేను ఎవరో చెప్పండి!

నాకు 7 రెట్లు తీసుకోండి.

మరియు దానికి యాభై కూడండి!

మూడు వందలు పొందడానికి

ఇంకా నలభై కావలెను!

మనం ఏం చర్చించాం?

- సమీకరణం అనేది ఒక చరరాశి పై గల ఒక నియమం అయివుండి రెండు సమాసాలు తప్పనిసరిగా సమాన విలువను కలిగివుండాలి.
- సమీకరణాన్ని తృప్తిపరిచే చరరాశి విలువను ఆ సమీకరణపు సాధన అంటారు.
- LHS మరియు RHS లను తారుమారు చేసినను సమీకరణంలో ఎలాంటి మార్పు ఉండదు.
- ఒక తుల్య సమీకరణం సందర్భంలో మనం
 - ఒకే సంఖ్యను ఇరువైపులా కలిపితే లేదా
 - ఒకే సంఖ్యను ఇరువైపులా తీసివేస్తే, లేదా
 - ఇరువైపులా ఒకే సంఖ్యతో గుణించినప్పుడు లేదా
 - ఇరువైపులా ఒకే సంఖ్యతో భాగించినప్పుడు సమీకరణం మార్పు చెందదు. అంటే LHS మరియు RHS యొక్క విలువలు సమానమై ఉంటాయి.
- పై ధర్మాల ఉపయోగించి సమీకరణాన్ని క్రమబద్ధంగా సోపానాల వారిగా సాధించవచ్చు. ఇరువైపులా ఒకేవిధమైన వరుస గణిత ప్రక్రియలను అన్వయించడం ద్వారా ఏదో ఒకవైపు చరరాశిని మాత్రమే పొందగలం. చివరి సోపానం సమీకరణపు సాధన అగును.

6. Transposing means moving to the other side. Transposition of a number has the same effect as adding same number to (or subtracting the same number from) both sides of the equation. When you transpose a number from one side of the equation to the other side, you change its sign. For example, transposing +3 from the LHS to the RHS in equation $x + 3 = 8$ gives $x = 8 - 3 (= 5)$. We can carry out the transposition of an expression in the same way as the transposition of a number.
7. We also learnt how, using the technique of doing the same mathematical operation (for example adding the same number) on both sides, we could build an equation starting from its solution. Further, we also learnt that we could relate a given equation to some appropriate practical situation and build a practical word problem/puzzle from the equation.



6. పక్షాంతరం చేయడం అనగా ఇంకొకవైపుకు మార్చడం. ఒక సంఖ్యను పక్షాంతరం చేయడం మరియు ఒకే సంఖ్యను ఇరువైపులా కూడడం లేదా (తీసివేయడం) ఒకటి అగును. ఒక సంఖ్యను ఒక వైపు నుండి మరొకవైపుకు పక్షాంతరం చేసినప్పుడు మనం గుర్తును మార్చవలెను. ఉదాహరణకు, $x + 3 = 8$ సమీకరణంలో $+3$ ను LHS నుండి RHS కు పక్షాంతరం చేసినప్పుడు $x = 8 - 3 (= 5)$ వస్తుంది. ఇదేవిధంగా సంఖ్యలను పక్షాంతరం చేసినట్లుగానే సమాసాలను కూడా పక్షాంతరం చేయవచ్చు.
7. నిజ జీవిత సందర్భాలకు అన్వయించునట్లు సామాన్య సమాసాలను రాయడాన్ని నేర్చుకున్నాం. మనం సమీకరణపు ఇరువైపులా ఒకే గణిత ప్రక్రియలను (ఉదాహరణకు ఒకే సంఖ్యను కలపడం) ఉపయోగించి సాధన కనిపెట్టేటట్లు, సాధనతో ప్రారంభించిన సమీకరణం రాయడాన్ని నేర్చుకొనియున్నాం. ఇంకా మనం ఇచ్చిన సమీకరణాన్ని కొన్ని సముచితమైన నిజ జీవిత పరిస్థితులకు అనుసంధానించవచ్చని మరియు సమీకరణం నుండి నిజ జీవిత పద సమస్య / పజిల్ను తయారు చేయవచ్చని కూడా మనం తెలుసుకున్నాం.



Lines and Angles



5.1 INTRODUCTION

You already know how to identify different lines, line segments and angles in a given shape. Can you identify the different line segments and angles formed in the following figures? (Fig 5.1)

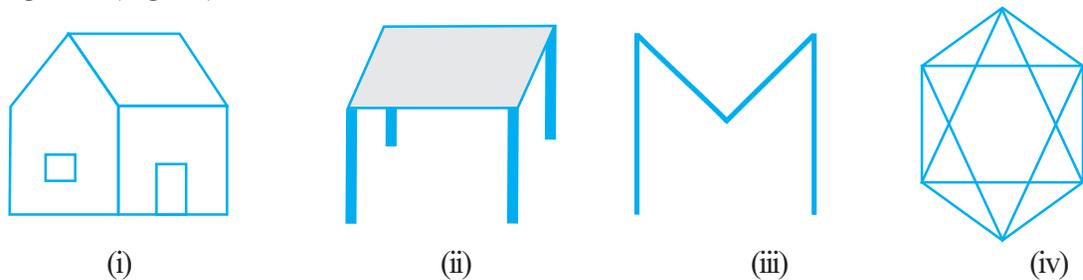


Fig 5.1

Can you also identify whether the angles made are acute or obtuse or right?

Recall that a **line segment** has two end **points**. If we extend the two end points in either direction endlessly, we get a **line**. Thus, we can say that a line has no end points. On the other hand, recall that a ray has one end point (namely its starting point). For example, look at the figures given below:

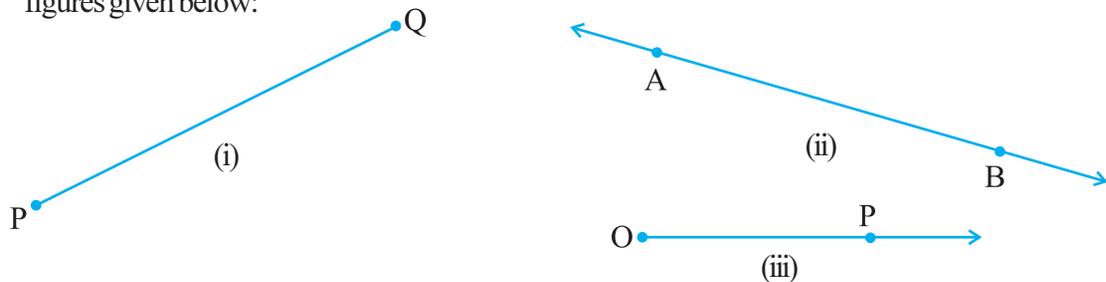


Fig 5.2

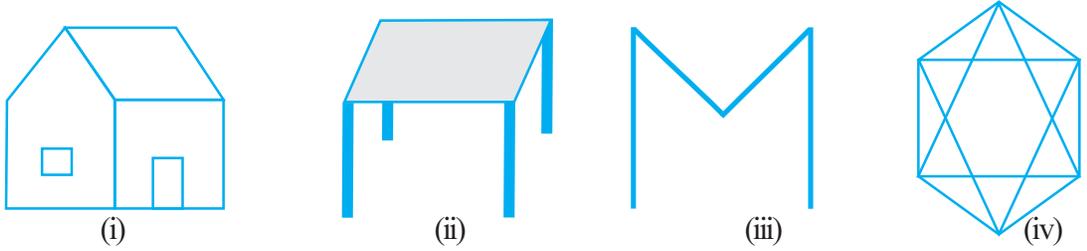
Here, Fig 5.2 (i) shows a **line segment**, Fig 5.2 (ii) shows a **line** and Fig 5.2 (iii) is that of a **ray**. A line segment PQ is generally denoted by the symbol \overline{PQ} , a line AB is denoted by the symbol \overleftrightarrow{AB} and the ray OP is denoted by \overrightarrow{OP} . Give some examples of line segments and rays from your daily life and discuss them with your friends.

రేఖలు మరియు కోణాలు



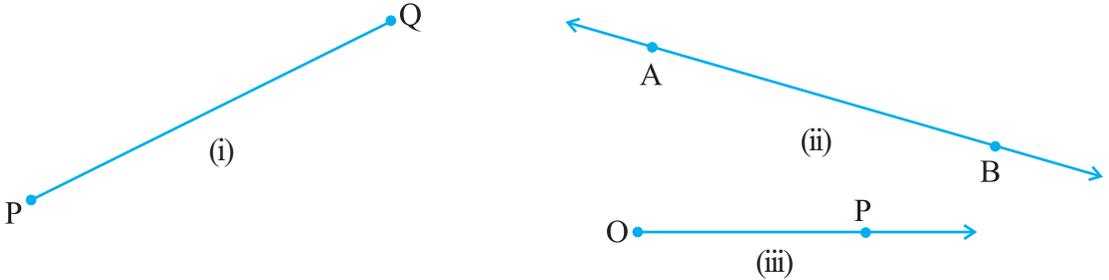
5.1 పరిచయం

ఇవ్వబడ్డ ఆకారంలో విభిన్న రేఖలు రేఖాఖండాలు మరియు కోణాలు ఎలా గుర్తించాలో మీకు ఇదిరకే తెలుసు. దిగువ పటాల్లో ఏర్పడిన విభిన్న రేఖాఖండాలు మరియు కోణాలను మీరు గుర్తించగలరా? (పటం 5.1)



పటం 5.1

ఏర్పడిన కోణాలు అల్ప లేదా అధిక లేక లంబకోణాలుగా మీరు గుర్తించగలరా? ఒక రేఖా ఖండానికి రెండు అంత్య బిందువులుంటాయని జ్ఞప్తికి తెచ్చుకోండి. రెండు అంత్య బిందువులను ఇరువైపులా అనంతంగా పొడిగిస్తే, మనకు ఒక రేఖ లభిస్తుంది. అందువల్ల, ఒక రేఖకు అంత్యబిందువులు లేవని మనం చెప్పవచ్చు. మరోవైపు, ఒక కిరణానికి ఒక అంత్య బిందువు (అంటే దాని తొలిబిందువు) ఉందని జ్ఞప్తికి తెచ్చుకోండి. ఉదాహరణకు, క్రింద ఇవ్వబడిన పటాలను పరిశీలించండి:



పటం 5.2

ఇక్కడ పటం 5.2 (i) ఒక రేఖా ఖండాన్ని చూపుతుంది. పటం 5.2 (ii) ఒక రేఖను చూపుతుంది. పటం 5.2 (iii) ఒక కిరణాన్ని చూపుతుంది. ఒక రేఖాఖండము PQ ను సాధారణంగా \overline{PQ} , ద్వారా సూచిస్తారు. AB రేఖను \overline{AB} ద్వారా మరియు OP కిరణంను \overrightarrow{OP} గా సూచిస్తాము. మీ దైనందిన జీవితంలో వచ్చే రేఖాఖండాలు మరియు కిరణాలకు కొన్ని ఉదాహరణలు ఇవ్వండి మరియు వాటిని మీ స్నేహితులతో చర్చించండి.

Again recall that an **angle** is formed when lines or line segments meet. In Fig 5.1, observe the corners. These corners are formed when two lines or line segments intersect at a point. For example, look at the figures given below:

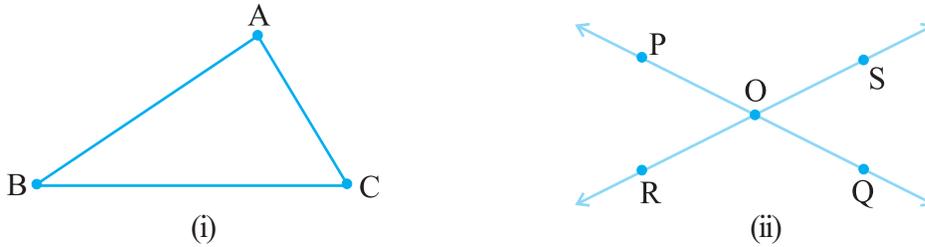


Fig 5.3

In Fig 5.3 (i) line segments AB and BC intersect at B to form angle ABC, and again line segments BC and AC intersect at C to form angle ACB and so on. Whereas, in Fig 5.3 (ii) lines PQ and RS intersect at O to form four angles POS, SOQ, QOR and ROP. An angle ABC is represented by the symbol $\angle ABC$. Thus, in Fig 5.3 (i), the three angles formed are $\angle ABC$, $\angle BCA$ and $\angle BAC$, and in Fig 5.3 (ii), the four angles formed are $\angle POS$, $\angle SOQ$, $\angle QOR$ and $\angle POR$. You have already studied how to classify the angles as acute, obtuse or right angle.

Note: While referring to the measure of an angle ABC, we shall write $m\angle ABC$ as simply $\angle ABC$. The context will make it clear, whether we are referring to the angle or its measure.

TRY THESE

List ten figures around you and identify the acute, obtuse and right angles found in them.



5.2 RELATED ANGLES

5.2.1 Complementary Angles

When the sum of the measures of two angles is 90° , the angles are called **complementary angles**.

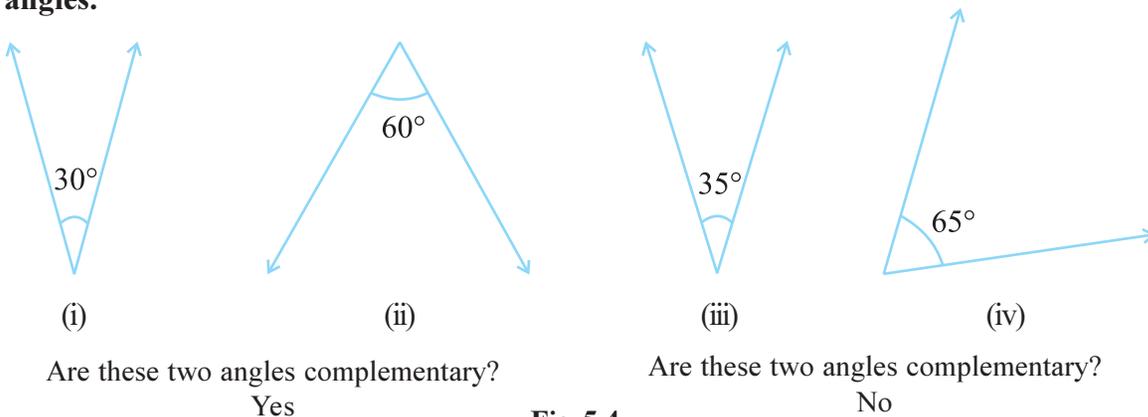


Fig 5.4

Whenever two angles are complementary, each angle is said to be the **complement** of the other angle. In the above diagram (Fig 5.4), the '30° angle' is the complement of the '60° angle' and vice versa.

రేఖలు లేదా రేఖాఖండాలు కలిసినప్పుడు కోణం ఏర్పడుతుందని మళ్ళీ జ్ఞప్తికి తెచ్చుకోండి. పటం 5.1 లో మూలలను గమనించండి. ఒక బిందువు వద్ద రెండు రేఖలు లేదా రేఖాఖండాలు ఖండించుకున్నప్పుడు ఈ మూలలు ఏర్పడతాయి. ఉదాహరణకు, క్రింద ఇవ్వబడిన పటాలను చూడండి:



పటం 5.3



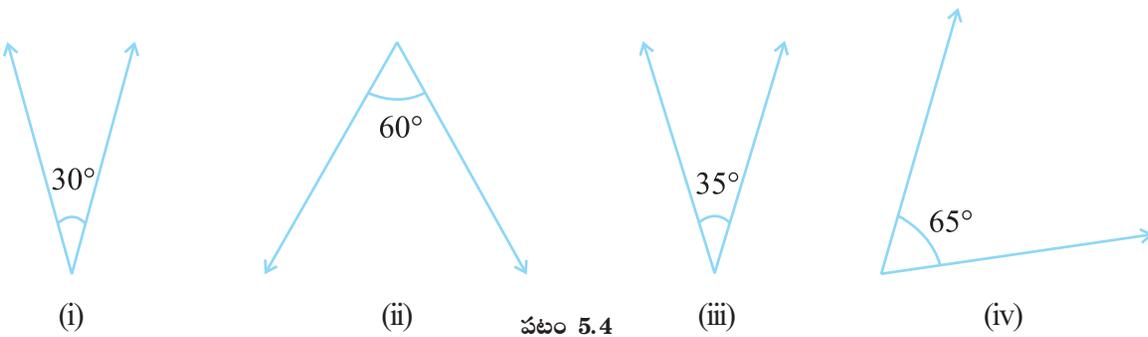
పటం 5.3 (i) B వద్ద రేఖాఖండాలు BC మరియు AB ఖండించుకొని కోణాన్ని ABC ఏర్పరుస్తాయి. మరలా BC మరియు AC రేఖాఖండాలు వద్ద C ఖండించుకొని ACB కోణాన్ని మరియు మొదలగునవి అలాగే పటం 5.3 (ii) లో వద్ద O రేఖలు RS మరియు PQ ఖండించుకొని POS, SOQ అనే QOR మరియు ROP అనే నాలుగు కోణాలను ఏర్పరుస్తాయి. ABC కోణంను $\angle ABC$ గుర్తు ద్వారా సూచిస్తాం. ఈవిధంగా పటం 5.3 (i) లో ఏర్పడిన మూడు కోణాలు $\angle ABC$, $\angle BCA$ మరియు $\angle BAC$ మరియు పటం 5.3(ii) లో ఏర్పడిన నాలుగు కోణాలు $\angle POS$, $\angle SOQ$ మరియు $\angle QOR$ $\angle POR$ కోణాలను అల్ప అధిక లేదా లంబ కోణాలుగా, ఎలా వర్గీకరించాలో మీరు ఇప్పటికే అధ్యయనం చేశారు.

ప్రయత్నించండి.
 మీ చుట్టూ ఉన్న పది బొమ్మలను జాబితా చేయండి మరియు వాటిలో కనిపించే తీవ్రమైన, సున్నితమైన మరియు సరైన కోణాలను గుర్తించండి.

గమనిక: కోణం యొక్క కొలతను $\angle ABC$ ప్రస్తావిస్తున్నప్పుడు $m\angle ABC$ అని రాస్తాం. మనం కోణం లేదా దాని కొలతను సూచిస్తున్నామా అనేది ఈ సందర్భం స్పష్టం చేస్తుంది. .

5.2 సంబంధిత కోణాలు

5.2.1 పూరక కోణాలు



పటం 5.4

ఈ రెండు కోణాలు పూరక కోణాలేనా?

ఈ రెండు కోణాలు పూరక కోణాలేనా?

అవును

కాదు

రెండు కోణాలు పూరక కోణాలైనప్పుడు, ప్రతి కోణం మరొక కోణం యొక్క పూరక కోణం అని చెప్పబడుతుంది. పై పటంలో (పటం 5.4) 30° అనేది 60° యొక్క పూరక కోణం మరియు విపర్యయం కూడా సత్యమే.



THINK, DISCUSS AND WRITE

1. Can two acute angles be complement to each other?
2. Can two obtuse angles be complement to each other?
3. Can two right angles be complement to each other?

TRY THESE

1. Which pairs of following angles are complementary? (Fig 5.5)

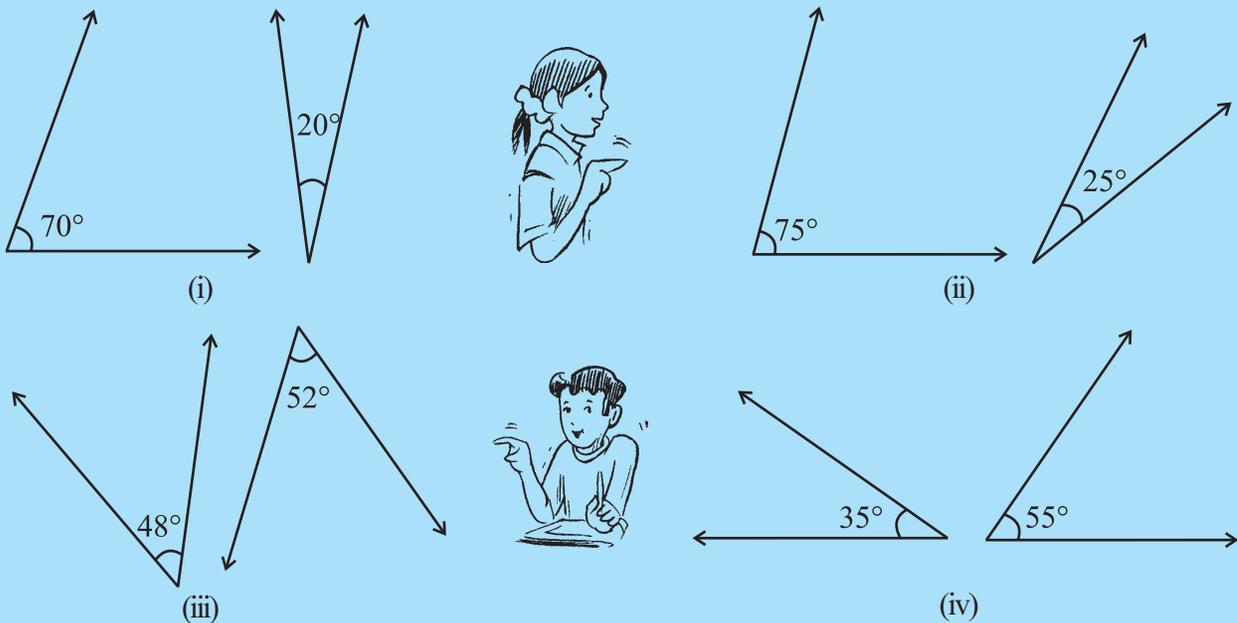
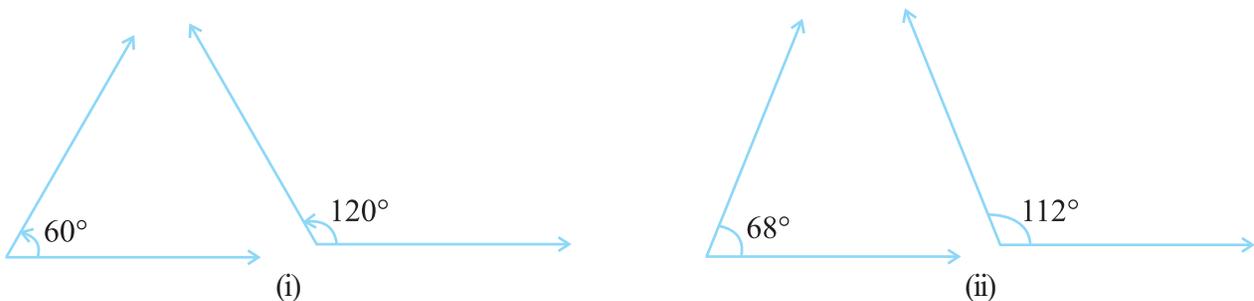


Fig 5.5

2. What is the measure of the complement of each of the following angles?
 (i) 45° (ii) 65° (iii) 41° (iv) 54°
3. The difference in the measures of two complementary angles is 12° . Find the measures of the angles.

5.2.2 Supplementary Angles

Let us now look at the following pairs of angles (Fig 5.6):



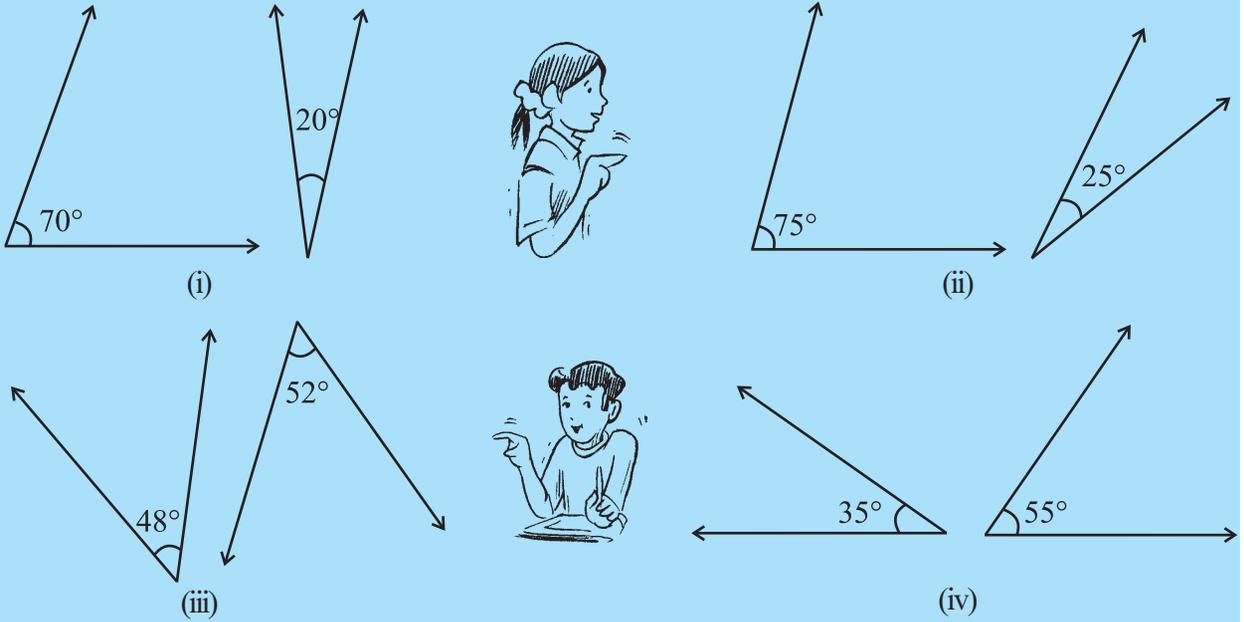


ఆలోచించి, చర్చించి రాయండి

1. రెండు అల్ప కోణాలు ఒకదానికొకటి పూరకాలు కాగలవా?
2. రెండు అధిక కోణాలు ఒకదానికొకటి పూరకాలు కాగలవా?
3. రెండు లంబ కోణాలు ఒకదానికొకటి పూరకాలు కాగలవా?

ప్రయత్నించండి.

1. క్రింది కోణాలలో ఏ జతలు పూరకాలు? (పటం 5.5)

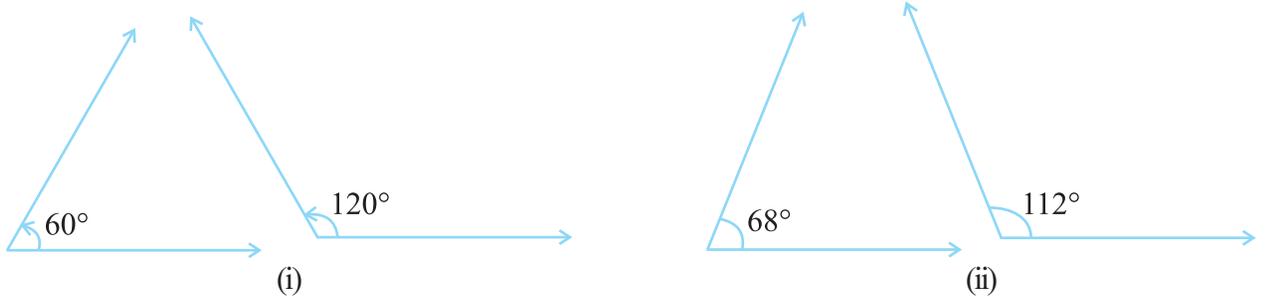


పటం 5.5

2. ఈ క్రింది కోణాల్లో ప్రతిదాని యొక్క పూరకము యొక్క కొలత ఎంత?
 (i) 45° (ii) 65° (iii) 41° (iv) 54°
3. రెండు పూరకకోణాల కొలతలలో వ్యత్యాసం 12° . ఆ కోణాలు కొలతలను కనుగొనండి.

5.2.2 సంపూరక కోణాలు

మనము ఇప్పుడు క్రింది కోణాల జతలను పరిశీలిద్దాం (పటం 5.6)



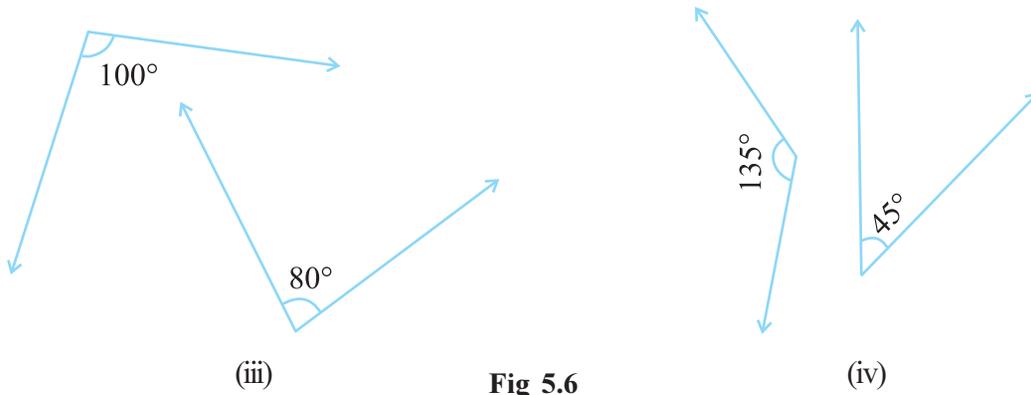


Fig 5.6

Do you notice that the sum of the measures of the angles in each of the above pairs (Fig 5.6) comes out to be 180° ? Such pairs of angles are called **supplementary angles**. When two angles are supplementary, each angle is said to be the **supplement** of the other.

THINK, DISCUSS AND WRITE

1. Can two obtuse angles be supplementary?
2. Can two acute angles be supplementary?
3. Can two right angles be supplementary?



TRY THESE

1. Find the pairs of supplementary angles in Fig 5.7:

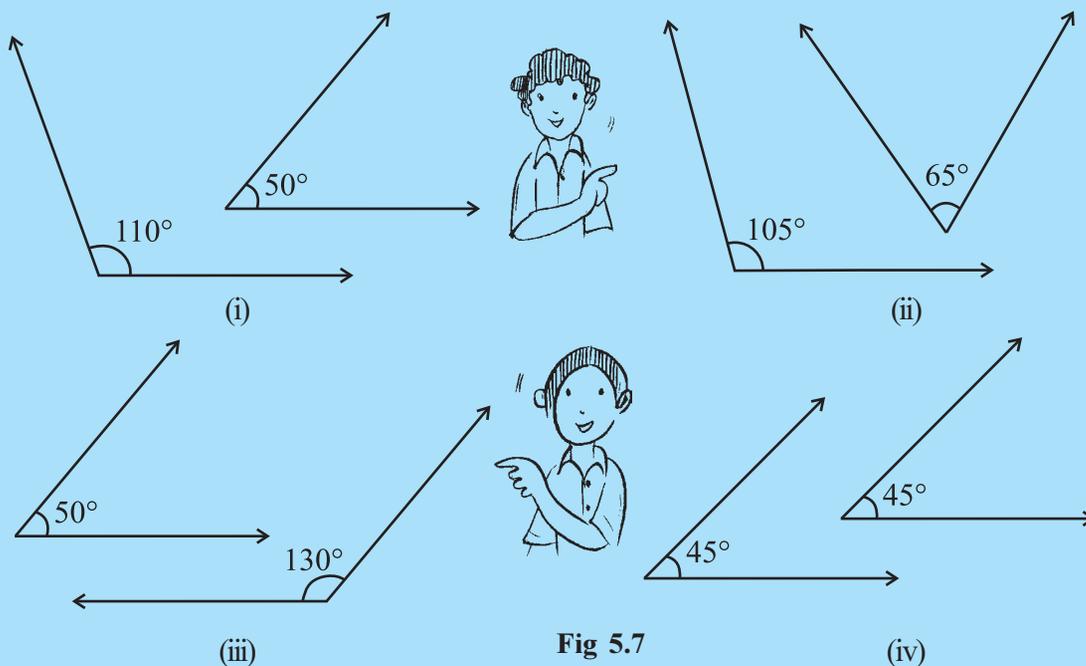
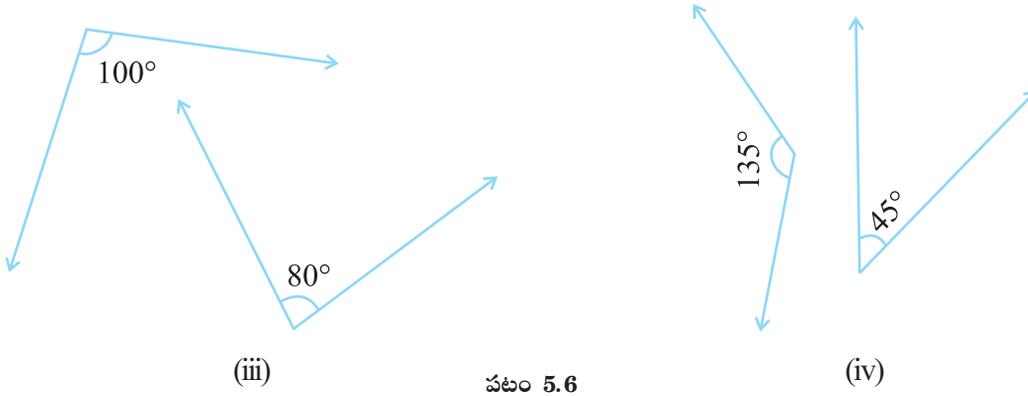


Fig 5.7



పటం 5.6

పై జతల (పటం 5.6) లోని కోణాల కొలతల మొత్తం 180° అని మీరు గమనించారా? అటువంటి జత కోణాలను సంపూర్ణ కోణాలు అంటారు. రెండు కోణాలు సంపూర్ణ కోణాలైనప్పుడు, ప్రతి కోణం మరొకదానికి సంపూర్ణంగా ఉంటుంది.

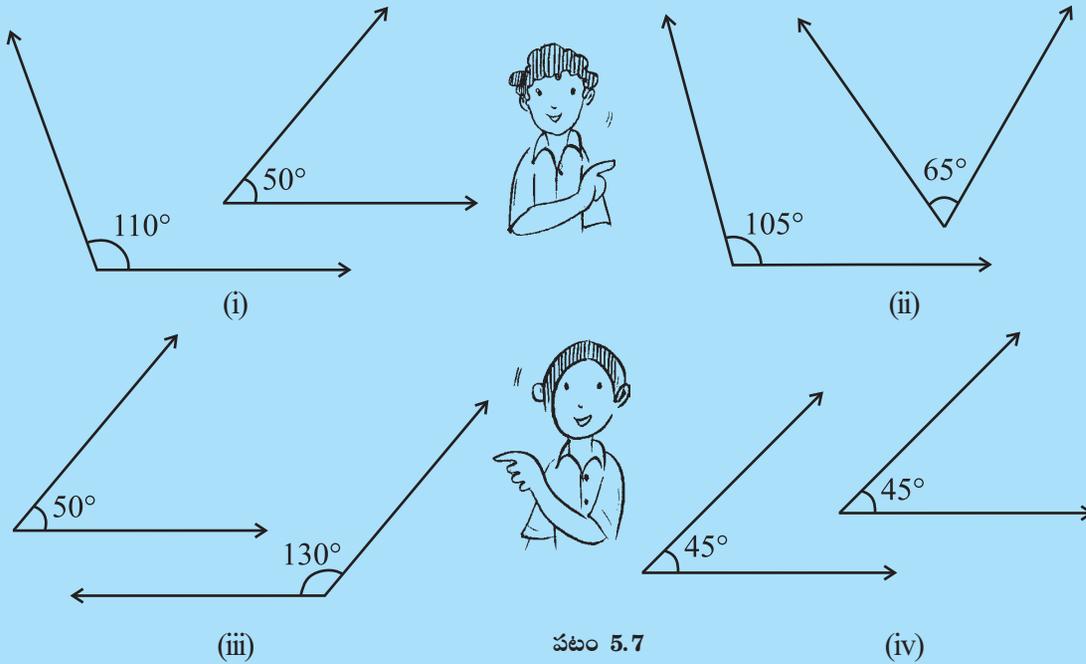
ఆలోచించి, చర్చించి రాయండి

1. రెండు అధిక కోణాలు ఒకదానికొకటి సంపూర్ణకాలు కాగలవా?
2. రెండు అల్ప కోణాలు ఒకదానికొకటి సంపూర్ణకాలు కాగలవా?
3. రెండు లంబ కోణాలు ఒకదానికొకటి సంపూర్ణకాలు కాగలవా?



ప్రయత్నించండి

1. పటం 5.7 లో సంపూర్ణ కోణాల జతలను కనుక్కోండి.



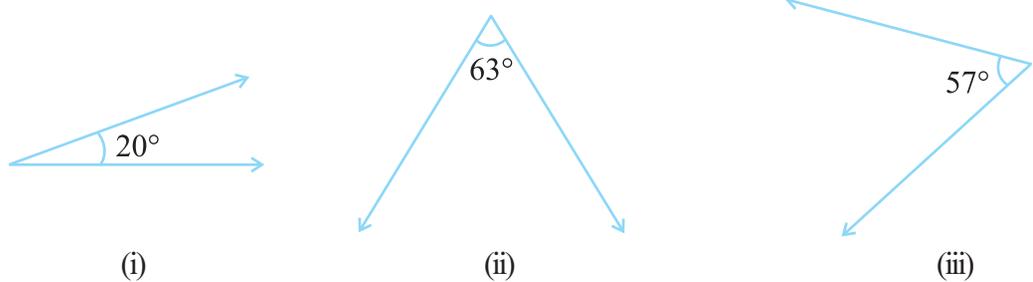
పటం 5.7

- What will be the measure of the supplement of each one of the following angles?
 - 100°
 - 90°
 - 55°
 - 125°
- Among two supplementary angles the measure of the larger angle is 44° more than the measure of the smaller. Find their measures.

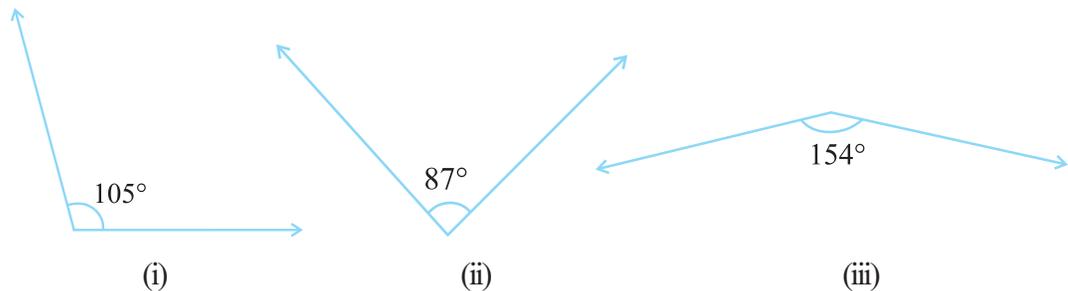
EXERCISE 5.1



- Find the complement of each of the following angles:



- Find the supplement of each of the following angles:

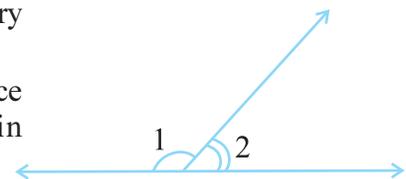


- Identify which of the following pairs of angles are complementary and which are supplementary.

- (i) $65^\circ, 115^\circ$ (ii) $63^\circ, 27^\circ$ (iii) $112^\circ, 68^\circ$
 (iv) $130^\circ, 50^\circ$ (v) $45^\circ, 45^\circ$ (vi) $80^\circ, 10^\circ$

- Find the angle which is equal to its complement.
- Find the angle which is equal to its supplement.
- In the given figure, $\angle 1$ and $\angle 2$ are supplementary angles.

If $\angle 1$ is decreased, what changes should take place in $\angle 2$ so that both the angles still remain supplementary.



- Can two angles be supplementary if both of them are:

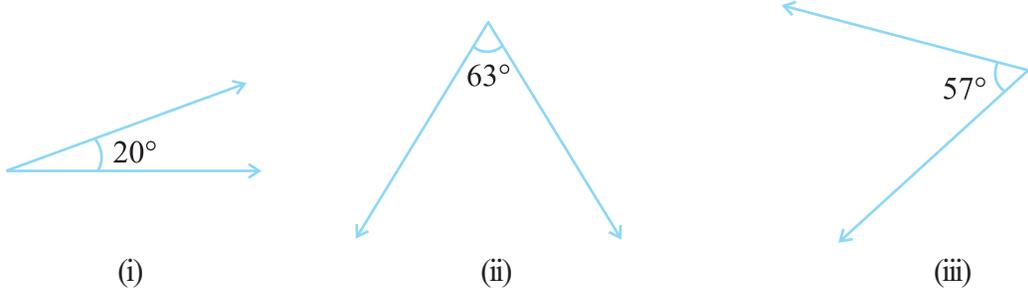
- (i) acute? (ii) obtuse? (iii) right?

2. ఈ క్రింది కోణాల్లో ప్రతి కోణం యొక్క సంపూర్ణకోణం యొక్క విలువ ఎంత?
 - (i) 100°
 - (ii) 90°
 - (iii) 55°
 - (iv) 125°
3. రెండు సంపూర్ణ కోణాలలో పెద్ద కోణం యొక్క కొలత, చిన్న కోణం యొక్క కొలత కంటే 44° ఎక్కువ, అయిన ఆ కొలతలను కనుగొనండి.

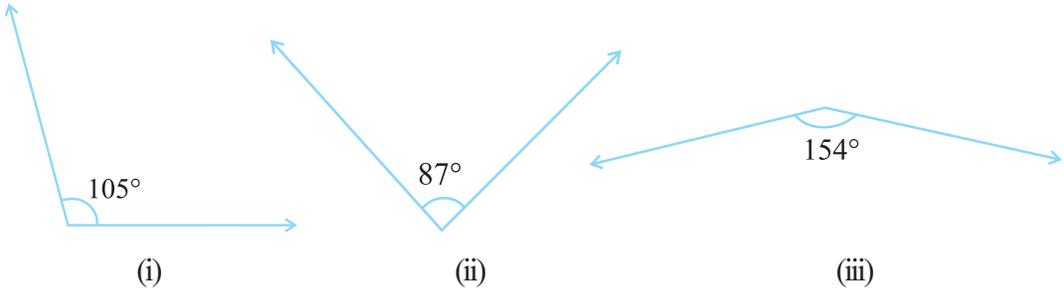
అభ్యాసం 5.1



1. క్రింది ప్రతి కోణానికి పూర్ణ కోణాలు కనుగొనండి.



2. క్రింది ప్రతి కోణానికి సంపూర్ణ కోణాలు కనుగొనండి.

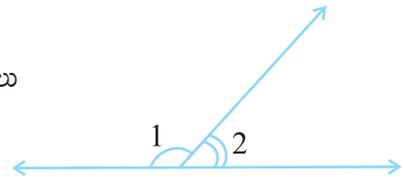


3. క్రింది వాటిలో పూర్ణ కోణాల జతలను, సంపూర్ణ కోణాల జతలను గుర్తించండి.

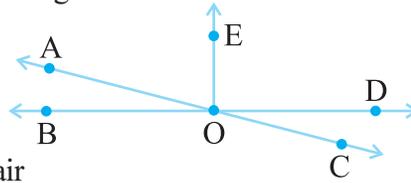
- (i) $65^\circ, 115^\circ$
- (ii) $63^\circ, 27^\circ$
- (iii) $112^\circ, 68^\circ$
- (iv) $130^\circ, 50^\circ$
- (v) $45^\circ, 45^\circ$
- (vi) $80^\circ, 10^\circ$

4. ఒక కోణానికి సమాన పూర్ణ కోణాన్ని కనుగొనండి.
5. ఒక కోణానికి సమాన సంపూర్ణ కోణాన్ని కనుగొనండి.
6. ఇచ్చిన పటంలో $\angle 1$ మరియు $\angle 2$ లు సంపూర్ణ కోణాలు. $\angle 1$ తగ్గించబడినట్లయితే, $\angle 2$ లో కలిగే మార్పు ఏమిటి?
7. ఇచ్చిన రెండు కోణాలు క్రింది విధంగా వుంటే అవి సంపూర్ణకాలు అవుతాయా?

- (i) అల్ప?
- (ii) అధిక?
- (iii) లంబ?



8. An angle is greater than 45° . Is its complementary angle greater than 45° or equal to 45° or less than 45° ?
9. Fill in the blanks:
- If two angles are complementary, then the sum of their measures is _____.
 - If two angles are supplementary, then the sum of their measures is _____.
 - If two adjacent angles are supplementary, they form a _____.
10. In the adjoining figure, name the following pairs of angles.
- Obtuse vertically opposite angles
 - Adjacent complementary angles
 - Equal supplementary angles
 - Unequal supplementary angles
 - Adjacent angles that do not form a linear pair



5.3 PAIRS OF LINES

5.3.1 Intersecting Lines

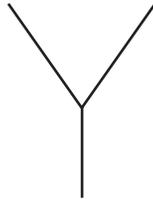
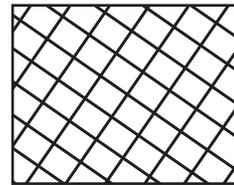


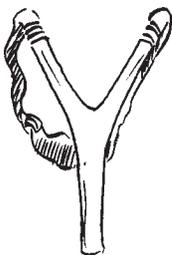
Fig 5.8



The blackboard on its stand, the letter Y made up of line segments and the grill-door of a window (Fig 5.8), what do all these have in common? They are examples of **intersecting lines**.

Two lines l and m intersect if they have a point in common. This common point O is their **point of intersection**.

THINK, DISCUSS AND WRITE



In Fig 5.9, AC and BE intersect at P.

AC and BC intersect at C, AC and EC intersect at C.

Try to find another ten pairs of intersecting line segments.

Should any two lines or line segments necessarily intersect? Can you find two pairs of non-intersecting line segments in the figure?

Can two lines intersect in more than one point?

Think about it.

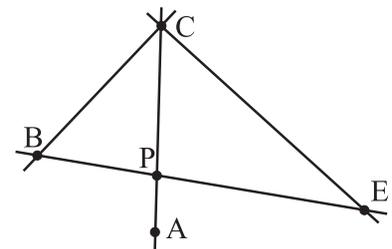
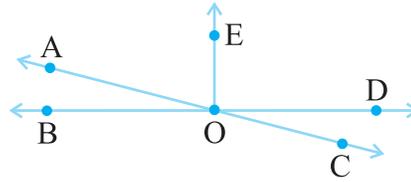


Fig 5.9

8. ఒక కోణం 45° కంటే ఎక్కువ. దాని పూరక కోణం 45° కంటే ఎక్కువా? లేదా 45° కు సమానమా? లేదా 45° కంటే తక్కువా?
9. ఖాళీలను పూరించండి:
- (i) రెండు కోణాలు పూరక కోణాలయితే, ఆ కోణాలమొత్తం _____.
 - (ii) రెండు కోణాలు సంపూరక కోణాలయితే, ఆ కోణాలమొత్తం _____.
 - (iii) రెండు ఆసన్నకోణాలు సంపూరక కోణాలయితే, అవి _____ను ఏర్పరుస్తాయి.

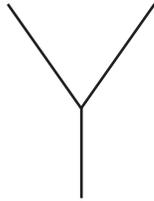
10. ప్రక్క పటంలోని, క్రింది కోణాల జతలకు పేర్లు పెట్టండి.

- (i) అధిక కోణం కలిగిన శీర్షాభిముఖ కోణాలు
- (ii) ఆసన్న పూరక కోణాలు
- (iii) సమాన సంపూరక కోణాలు
- (iv) అసమాన సంపూరక కోణాలు
- (v) రేఖీయ ద్వయాన్ని ఏర్పరచని ఆసన్నకోణాలు

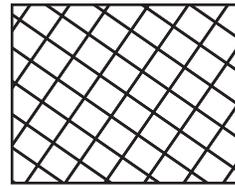


5.3 రేఖల జతలు

5.3.1 ఖండన రేఖలు



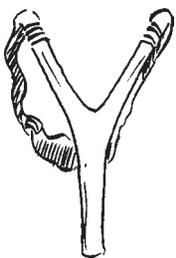
పటం 5.8



స్టాండ్ మీద ఉన్న బ్లాక్ బోర్డ్, అక్షరం Y మరియు కిటికీ యొక్క గ్రిల్ డోర్ (పటం 5.8), ఇవన్నీ రేఖాఖండాలచే ఏర్పడ్డాయి. వీటన్నింటికీ ఉమ్మడిగా ఏమి ఉంది? అవి ఖండన రేఖలకు ఉదాహరణలు.

l మరియు m అనే రెండు రేఖలు ఉమ్మడిగా ఒక బిందువును కలిగి వుంటే, ఆ రేఖలు ఖండించుకుంటాయి... ఈ ఉమ్మడి బిందువు వాటి ఖండన బిందువు.

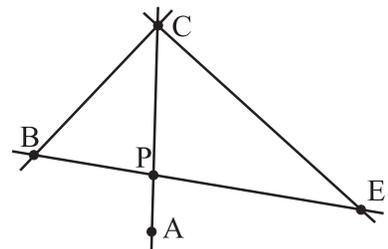
ఆలోచించి, చర్చించి రాయండి



పటం 5.9లో AC మరియు BE లు P వద్ద ఖండించుకుంటున్నాయి. AC మరియు BCలు C వద్ద ఖండించుకుంటున్నాయి. AC మరియు EC లు C వద్ద ఖండించుకుంటున్నాయి. మరో పది జతల ఖండనరేఖలను కనుగొనడానికి ప్రయత్నించండి.

ఏదైనా రెండు రేఖలు లేదా రేఖాఖండాలు తప్పనిసరిగా ఖండించుకుంటాయా? పటంలో రెండు జతల ఖండించుకొనని రేఖాఖండాలను మీరు కనుగొనగలరా?

రెండు రేఖలు ఒకటి కంటే ఎక్కువ బిందువులలో ఖండించుకుంటాయా? దాని గురించి ఆలోచించండి.



పటం 5.9

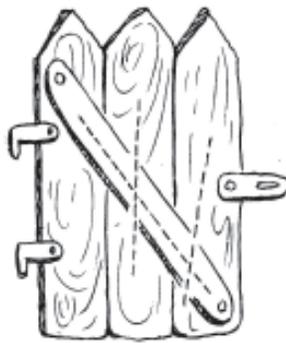
TRY THESE



1. Find examples from your surroundings where lines intersect at right angles.
2. Find the measures of the angles made by the intersecting lines at the vertices of an equilateral triangle.
3. Draw any rectangle and find the measures of angles at the four vertices made by the intersecting lines.
4. If two lines intersect, do they always intersect at right angles?

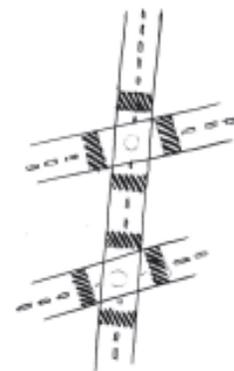
5.3.2 Transversal

You might have seen a road crossing two or more roads or a railway line crossing several other lines (Fig 5.10). These give an idea of a transversal.



(i)

Fig 5.10



(ii)

A line that intersects two or more lines at **distinct** points is called a **transversal**.
In the Fig 5.11, p is a transversal to the lines l and m .

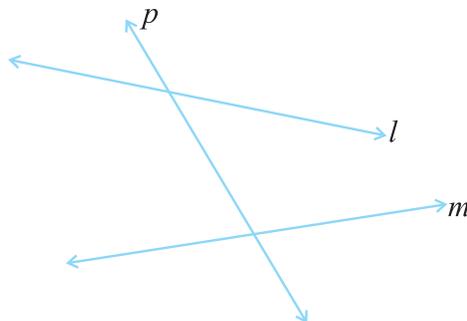


Fig 5.11

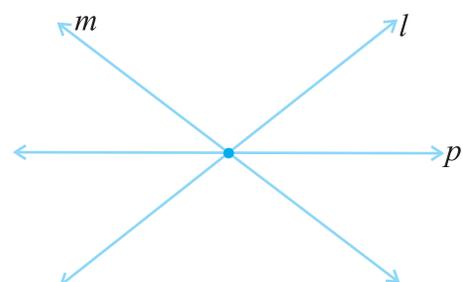


Fig 5.12

In Fig 5.12 the line p is not a transversal, although it cuts two lines l and m . Can you say, 'why'?

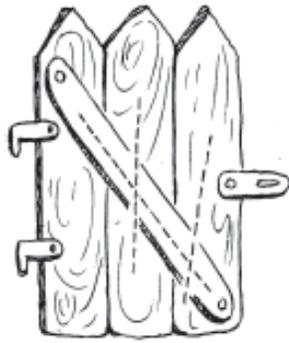
ప్రయత్నించండి.



1. మీ పరిసరాలనుండి, లంబంగా ఖండించుకునే రేఖలకు ఉదాహరణలను కనుగొనండి.
2. ఒక సమబాహు త్రిభుజం యొక్క శీర్షాలవద్ద ఖండన రేఖల ద్వారా ఏర్పడిన కోణాల కొలతలను కనుగొనండి
3. ఏదైనా దీర్ఘచతురస్రాకారాన్ని గీయండి మరియు ఖండన రేఖల ద్వారా ఏర్పడిన నాలుగు శీర్షాలవద్ద కోణాల కొలతలను కనుగొనండి.
4. ఒకవేళ రెండు రేఖలు ఖండించుకుంటే, అవి ఎల్లప్పుడూ లంబంగానే ఖండించుకుంటాయా?

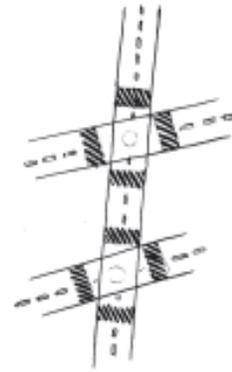
5.3.2 తిర్యగ్రేఖ

రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ రోడ్లను దాటే రహదారిని లేదా అనేక ఇతర మార్గాలను దాటే రైల్వే లైన్ ను మీరు చూసి ఉంటారు (పటం 5.10). ఇవి తిర్యగ్రేఖ యొక్క ఆలోచనను ఇస్తాయి.



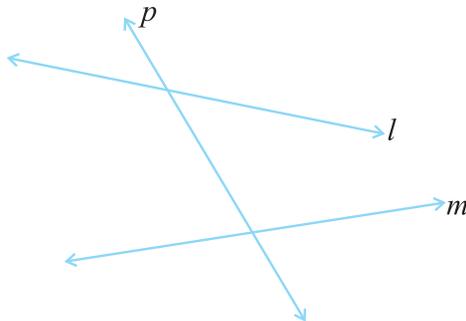
(i)

పటం 5.10

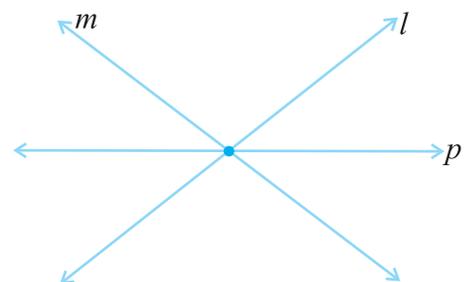


(ii)

రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ రేఖలను విభిన్న బిందువుల వద్ద ఖండించే రేఖను తిర్యగ్రేఖ అంటారు. పటం 5.11 లో p అనేది l మరియు m రేఖలకు ఒక తిర్యగ్రేఖ.



పటం 5.11



పటం 5.12

పటం 5.12 లో l మరియు m రేఖలను ఖండించినప్పటికీ అది తిర్యగ్రేఖ కాదు. ఎందుకు మీరు చెప్పగలరా?

5.3.3. Angles made by a Transversal

In Fig 5.13, you see lines l and m cut by transversal p . The eight angles marked 1 to 8 have their special names:

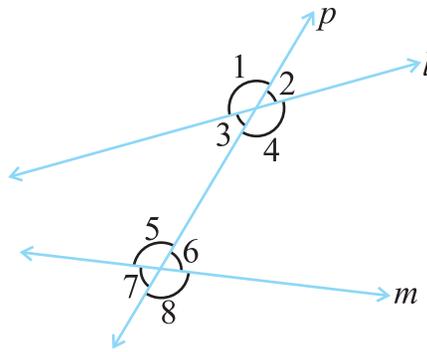


Fig 5.13

TRY THESE

1. Suppose two lines are given. How many transversals can you draw for these lines?
2. If a line is a transversal to three lines, how many points of intersections are there?
3. Try to identify a few transversals in your surroundings.

Interior angles	$\angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 6$
Exterior angles	$\angle 1, \angle 2, \angle 7, \angle 8$
Pairs of Corresponding angles	$\angle 1$ and $\angle 5, \angle 2$ and $\angle 6,$ $\angle 3$ and $\angle 7, \angle 4$ and $\angle 8$
Pairs of Alternate interior angles	$\angle 3$ and $\angle 6, \angle 4$ and $\angle 5$
Pairs of Alternate exterior angles	$\angle 1$ and $\angle 8, \angle 2$ and $\angle 7$
Pairs of interior angles on the same side of the transversal	$\angle 3$ and $\angle 5, \angle 4$ and $\angle 6$

Note: Corresponding angles (like $\angle 1$ and $\angle 5$ in Fig 5.14) include

- (i) different vertices
- (ii) are on the same side of the transversal and
- (iii) are in 'corresponding' positions (above or below, left or right) relative to the two lines.

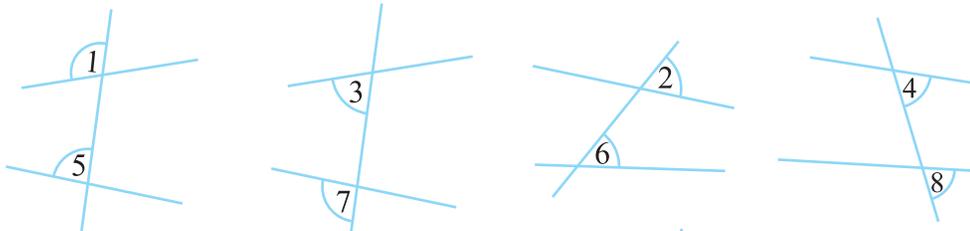


Fig 5.14

Alternate interior angles (like $\angle 3$ and $\angle 6$ in Fig 5.15)

- (i) have different vertices
- (ii) are on opposite sides of the transversal and
- (iii) lie 'between' the two lines.

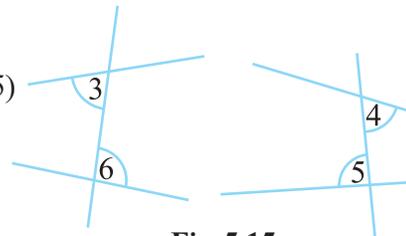
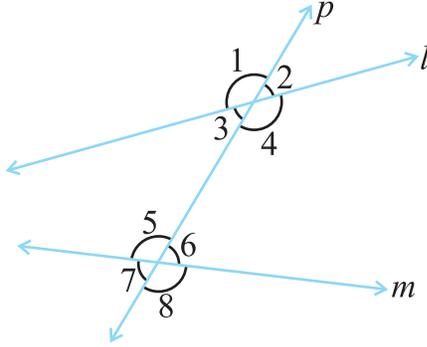


Fig 5.15

5.3.3 తిర్యగ్రేఖచే ఏర్పడ్డ కోణాలు

పటం 5.13లో l మరియు m రేఖలు తిర్యగ్రేఖ p చే ఖండించబడ్డాయి. 1 నుండి 8 గా గుర్తించబడిన కోణాలకు ప్రత్యేకమైన పేర్లు కలవు.



పటం 5.13

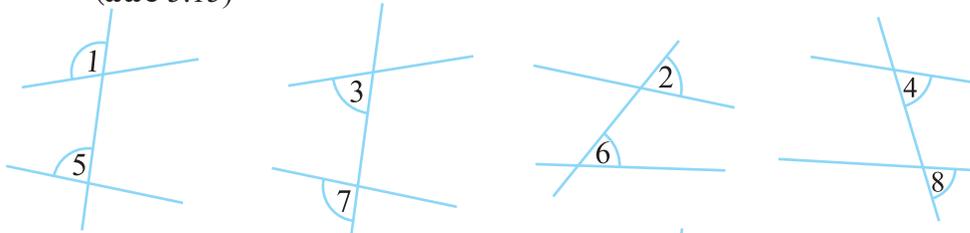
ప్రయత్నించండి

1. రెండు రేఖలు ఇవ్వబడినవి అనుకోండి. ఈ రేఖలకు మీరు ఎన్ని తిర్యగ్రేఖలు గీయగలరు?
2. ఒకవేళ, ఒక రేఖ మూడు రేఖలకు తిర్యగ్రేఖ అయితే, ఎన్ని ఖండన బిందువులుంటాయి?
3. మీ పరిసరాలలో, కొన్ని తిర్యగ్రేఖలను గుర్తించడానికి ప్రయత్నించండి.

అంతర కోణాలు	$\angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 6$
బాహ్య కోణాలు	$\angle 1, \angle 2, \angle 7, \angle 8$
సదృశ కోణాల జతలు	$\angle 1$ మరియు $\angle 5, \angle 2$ మరియు $\angle 6, \angle 3$ మరియు $\angle 7, \angle 4$ మరియు $\angle 8$
ఏకాంతర కోణాల జతలు	$\angle 3$ మరియు $\angle 6, \angle 4$ మరియు $\angle 5$
ఏక బాహ్య కోణాల జతలు	$\angle 1$ మరియు $\angle 8, \angle 2$ మరియు $\angle 7$
తిర్యగ్రేఖకు ఒకేవైపున గల అంతర కోణాల జతలు	$\angle 3$ మరియు $\angle 5, \angle 4$ మరియు $\angle 6$

గమనిక: సదృశ కోణాలు (పటం 5.14లో $\angle 1$ మరియు $\angle 5$ వంటివి)

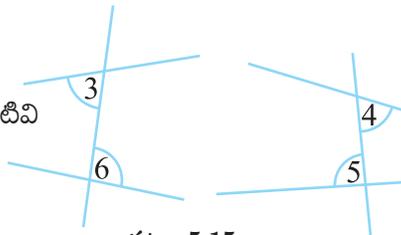
- వేర్వేరు శీర్షాల వద్ద మరియు (ii) తిర్యగ్రేఖకు ఒకేవైపున ఉండును మరియు
- రెండు రేఖల దృష్ట్యా 'సదృశ' స్థానాల వద్ద ఉండును (పైన లేదా కింది ఎడమ లేదా కుడి) (పటం 5.15)



పటం 5.14

ఏకాంతర కోణాలు (పటం 5.15) లో $\angle 3$ మరియు $\angle 6$ వంటివి

- వేర్వేరు శీర్షాలను కలిగి ఉంటాయి.
- తిర్యగ్రేఖకు ఇరువైపులా ఉంటాయి మరియు
- రెండు రేఖల అంతరంలో గల కోణాలు

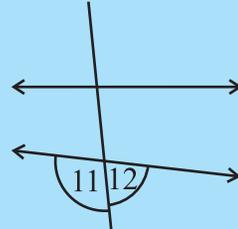
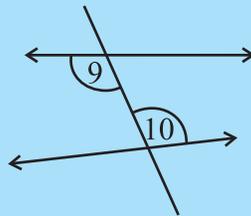
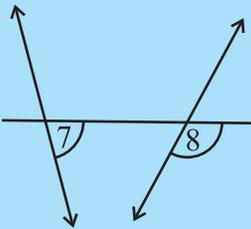
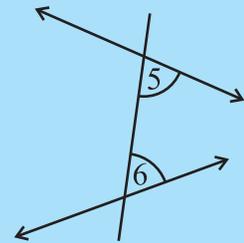
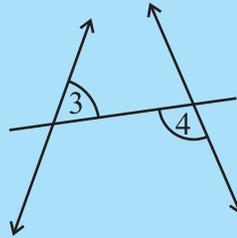
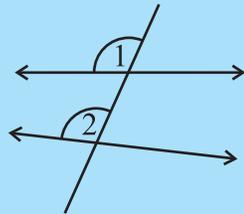


పటం 5.15

TRY THESE



Name the pairs of angles in each figure:

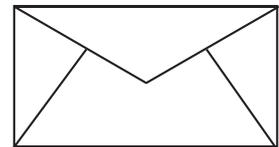


5.3.4 Transversal of Parallel Lines

Do you remember what parallel lines are? They are lines on a plane that do not meet anywhere. Can you identify parallel lines in the following figures? (Fig 5.16)



Fig 5.16



Transversals of parallel lines give rise to quite interesting results.

DO THIS

Take a ruled sheet of paper. Draw (in thick colour) two parallel lines l and m .

Draw a transversal t to the lines l and m . Label $\angle 1$ and $\angle 2$ as shown [Fig 5.17(i)].

Place a tracing paper over the figure drawn. Trace the lines l , m and t .

Slide the tracing paper along t , until l coincides with m .

You find that $\angle 1$ on the traced figure coincides with $\angle 2$ of the original figure.

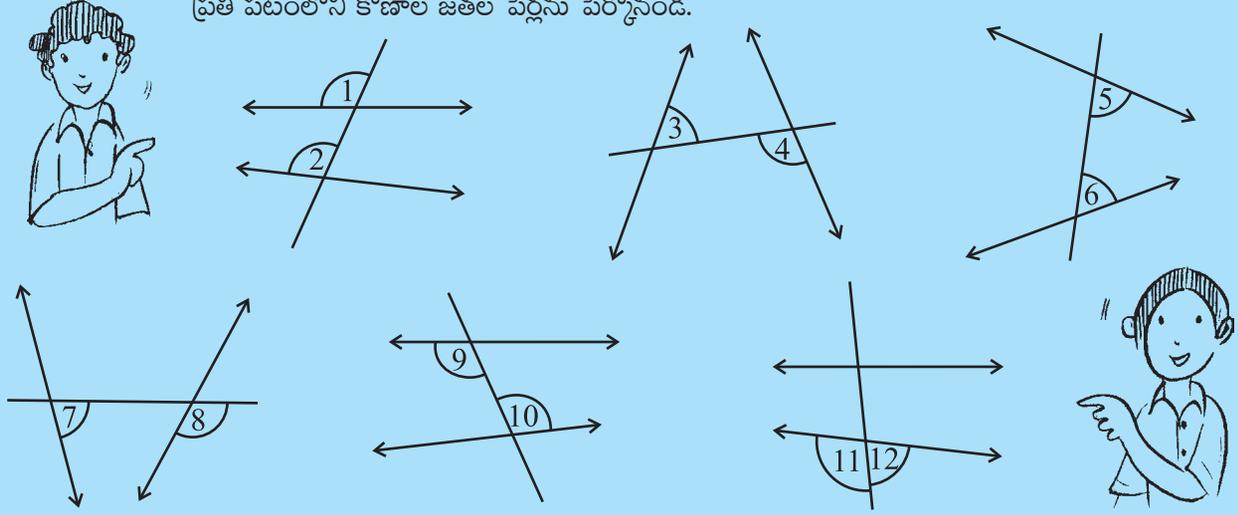
In fact, you can see all the following results by similar tracing and sliding activity.

- (i) $\angle 1 = \angle 2$ (ii) $\angle 3 = \angle 4$ (iii) $\angle 5 = \angle 6$ (iv) $\angle 7 = \angle 8$



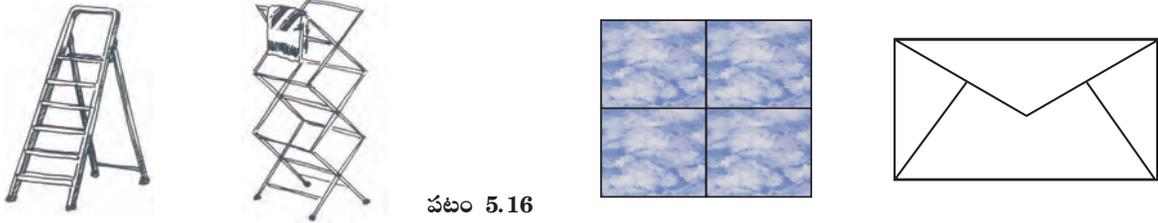
ప్రయత్నించండి.

ప్రతి పటంలోని కోణాల జతల పేర్లను పేర్కొనండి.



5.3.4 సమాంతర రేఖల యొక్క తిర్యగ్రేఖ

సమాంతర రేఖలు అంటే ఏమిటో మీకు గుర్తుందా? అవి సమతలంలో ఎక్కడా కలవని రేఖలు. క్రింది పటాల్లో సమాంతర రేఖలను మీరు గుర్తించగలరా? (పటం 5.16)



పటం 5.16

సమాంతర రేఖల యొక్క తిర్యగ్రేఖలు చాలా ఆసక్తికరమైన ఫలితాలనిస్తాయి.

ఇవి చేయండి

రూళ్ళు కాగితాన్ని తీసుకోండి. l మరియు m అనే రెండు సమాంతర రేఖలను గీయండి (ముదురు రంగు). l మరియు m రేఖలకు తిర్యగ్రేఖ t గీయండి. పటం 5.17(i) లో చూపిన విధంగా $\angle 1$ మరియు $\angle 2$ లను గుర్తించండి. గీసిన బొమ్మపై పారదర్శక కాగితం ఉంచండి. l, m మరియు t రేఖలను పారదర్శక కాగితం పై గుర్తించండి.

l అనేది m తో ఏకీభవించేంత వరకు, పారదర్శక కాగితాన్ని t వెంట జరపండి. ట్రేస్ చేయబడ్డ పటంపై

$\angle 1$ ఒరిజినల్ పటం యొక్క $\angle 2$ తో ఏకీభవిస్తున్నట్లు మీరు కనుగొన్నారు. వాస్తవానికి, ఇలాంటి

ట్రేసింగ్ మరియు జరపడం కార్యకలాపాల ద్వారా మీరు ఈ క్రింది అన్ని ఫలితాలను చూడవచ్చు

- (i) $\angle 1 = \angle 2$
- (ii) $\angle 3 = \angle 4$
- (iii) $\angle 5 = \angle 6$
- (iv) $\angle 7 = \angle 8$



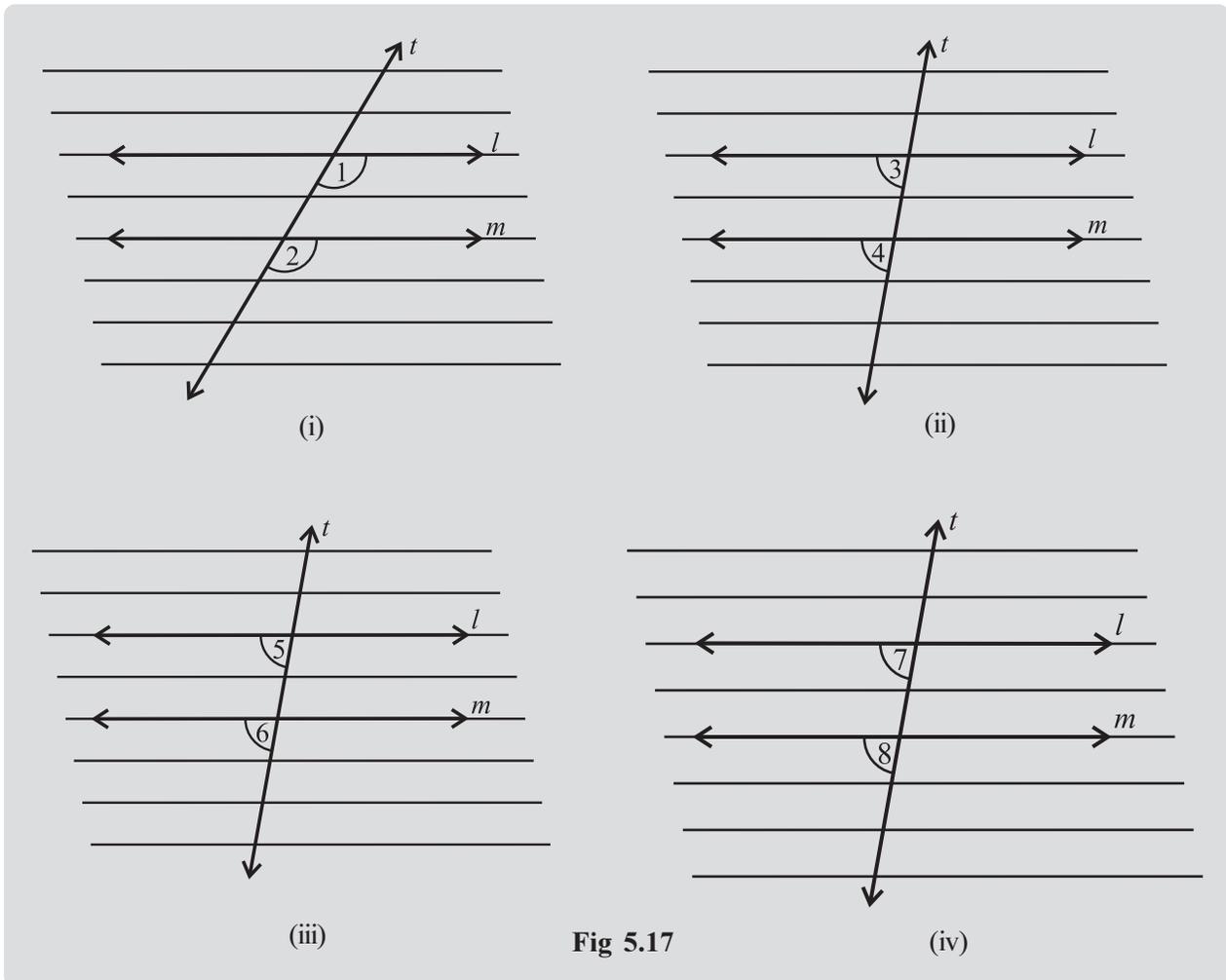


Fig 5.17

This activity illustrates the following fact:

If two parallel lines are cut by a transversal, each pair of corresponding angles are equal in measure.

We use this result to get another interesting result. Look at Fig 5.18.

When t cuts the parallel lines, l , m , we get, $\angle 3 = \angle 7$ (vertically opposite angles).

But $\angle 7 = \angle 8$ (corresponding angles). Therefore, $\angle 3 = \angle 8$

You can similarly show that $\angle 1 = \angle 6$. Thus, we have the following result :

If two parallel lines are cut by a transversal, each pair of alternate interior angles are equal.

This second result leads to another interesting property. Again, from Fig 5.18.

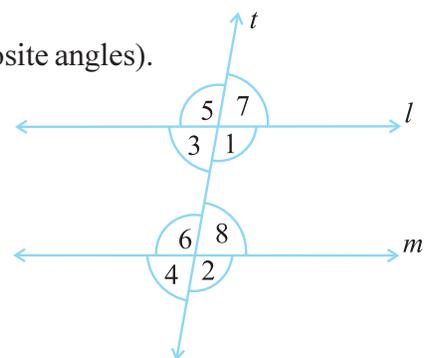
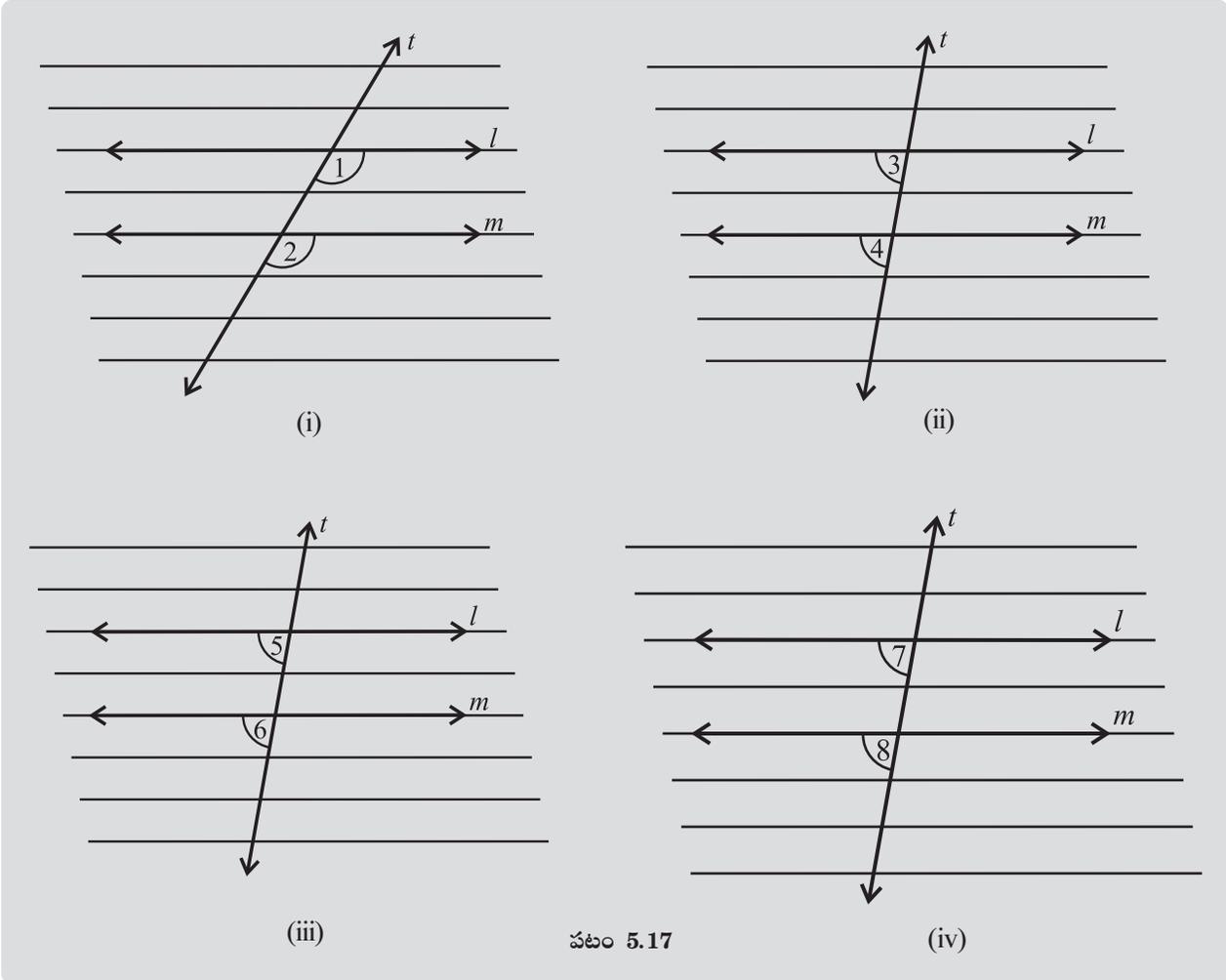


Fig 5.18



పటం 5.17

ఈ కృత్యం క్రింది వాస్తవాన్ని వివరిస్తుంది.

రెండు సమాంతర రేఖలను ఒక తిర్యగ్రేఖ ఖండించినప్పుడు ఏర్పడిన సదృశ కోణాల ప్రతి జత సమానం

మరొక ఆసక్తికరమైన ఫలితాన్ని పొందడానికి మేము ఈ ఫలితాన్ని ఉపయోగిస్తాము. పటం 5.18 చూడండి.

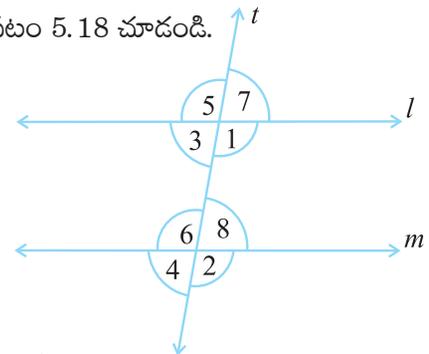
l, m , సమాంతర రేఖలను ఖండించినప్పుడు $\angle 3 = \angle 7$ (శీర్షాభిముఖ కోణాలు).

కాని $\angle 7 = \angle 8$ (సదృశ కోణాలు). అందువలన, $\angle 3 = \angle 8$

అదేవిధంగా $\angle 1 = \angle 6$ అని మీరు చూపించవచ్చు. అందువలన మనకు, ఈ క్రింది ఫలితం ఉంది.

రెండు సమాంతర రేఖలను ఒక తిర్యగ్రేఖ ఖండించినప్పుడు ఏర్పడిన ఏకాంతర కోణాల జతలు సమానం.

ఈ రెండవ ఫలితం మరొక ఆసక్తికరమైన ధర్మానికి దారితీస్తుంది. మరలా పటం 5.18 నుండి



పటం 5.18

$\angle 3 + \angle 1 = 180^\circ$ ($\angle 3$ and $\angle 1$ form a linear pair)

But $\angle 1 = \angle 6$ (A pair of alternate interior angles)

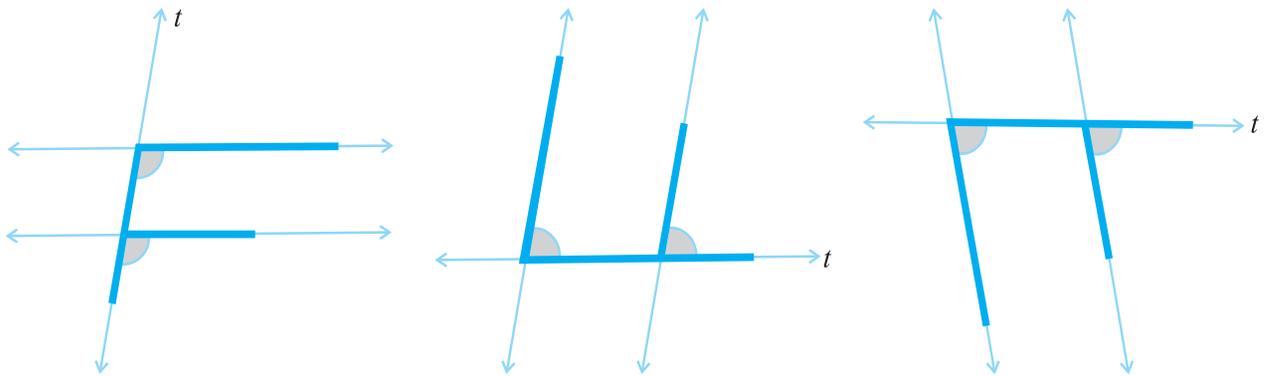
Therefore, we can say that $\angle 3 + \angle 6 = 180^\circ$.

Similarly, $\angle 1 + \angle 8 = 180^\circ$. Thus, we obtain the following result:

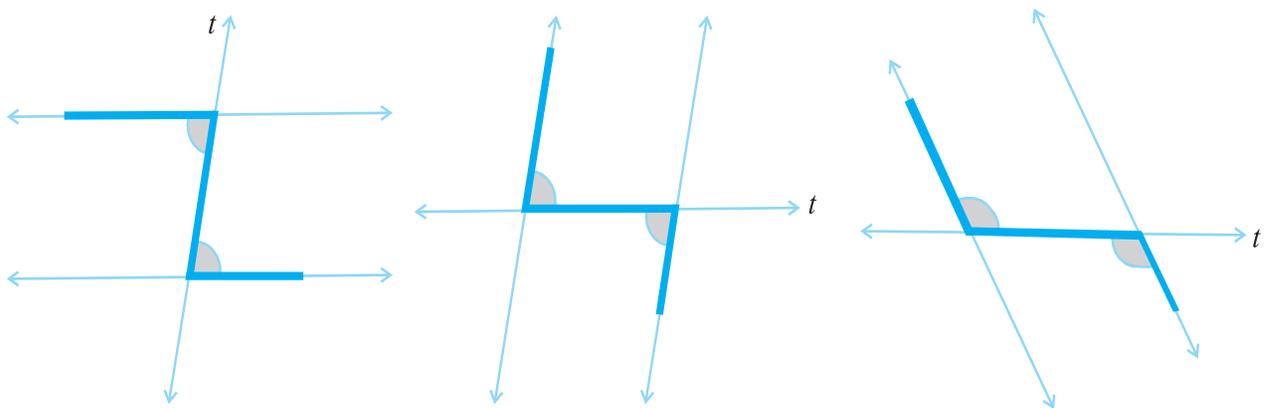
If two parallel lines are cut by a transversal, then each pair of interior angles on the same side of the transversal are supplementary.

You can very easily remember these results if you can look for relevant 'shapes'.

The F-shape stands for corresponding angles:



The Z - shape stands for alternate angles.



Do This

Draw a pair of parallel lines and a transversal. Verify the above three statements by actually measuring the angles.

$\angle 3 + \angle 1 = 180^\circ$ ($\angle 3$ మరియు $\angle 1$ రేఖీయ ద్వయంను ఏర్పరచును)

కాని $\angle 1 = \angle 6$ (ఏకాంతర కోణాల జత) కాబట్టి

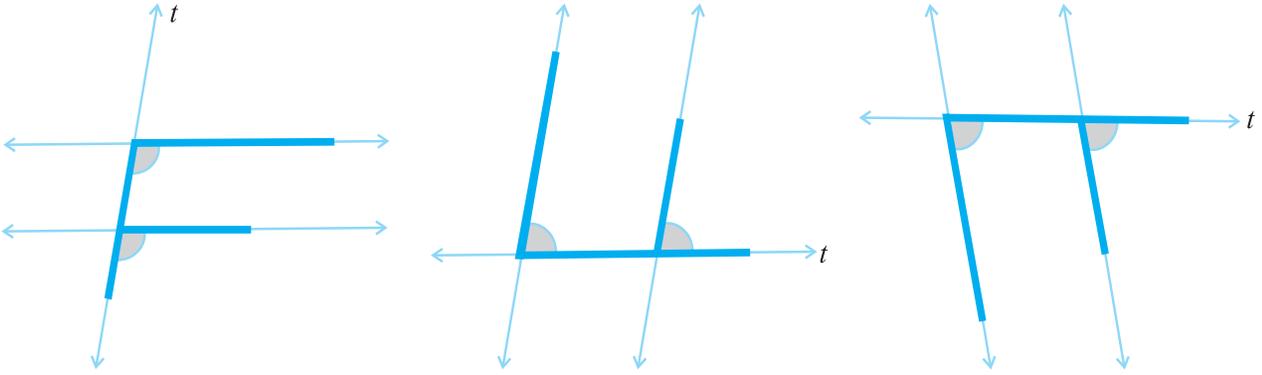
మనం ఇలా చెప్పవచ్చు. $\angle 3 + \angle 6 = 180^\circ$. అదేవిధంగా

$\angle 1 + \angle 8 = 180^\circ$ అందువలన ఈ ఫలితాన్ని పొందుతాము.

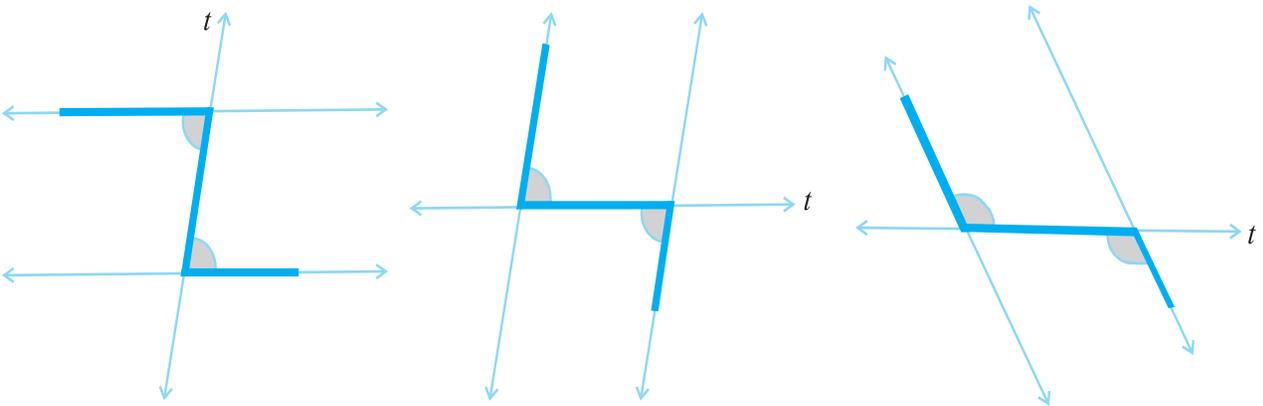
రెండు సమాంతర రేఖలను ఒక తిర్యగ్రేఖ ఖండించినట్లైతే, అప్పుడు తిర్యగ్రేఖ కు ఒకే వైపున ఉన్న ప్రతి జత అంతర కోణాలు సంపూర్ణాలు.

కాబట్టి సంబంధిత 'ఆకృతుల' కోసం మీరు వెతకగలిగితే, మీరు ఈ ఫలితాలను చాలా సులభంగా గుర్తుంచుకోగలరు.

F - ఆకారం సదృశ కోణాలను సూచిస్తుంది.



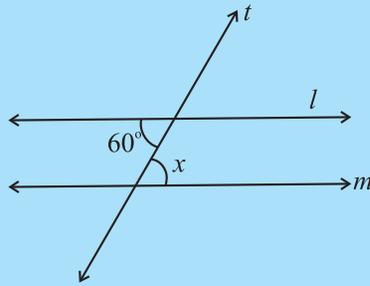
Z - ఆకారం ఏకాంతర కోణాలను సూచిస్తుంది.



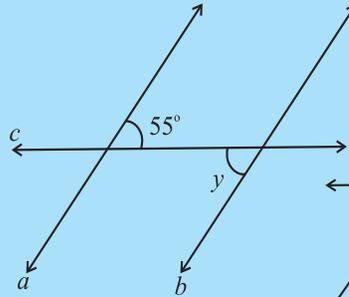
ఇది చేయండి

ఒక జత సమాంతర రేఖలు మరియు తిర్యగ్రేఖను గీయండి. కోణాలను కొలచి పై మూడు ప్రవచనాలను సరిచూడండి.

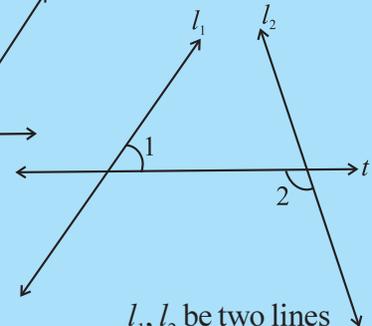
TRY THESE



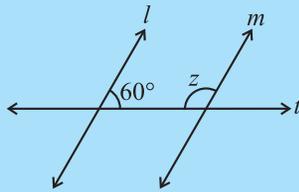
Lines $l \parallel m$;
 t is a transversal
 $\angle x = ?$



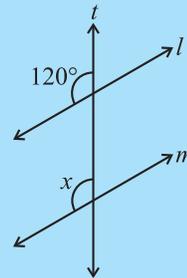
Lines $a \parallel b$;
 c is a transversal
 $\angle y = ?$



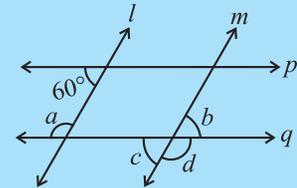
l_1, l_2 be two lines
 t is a transversal
 Is $\angle 1 = \angle 2$?



Lines $l \parallel m$;
 t is a transversal
 $\angle z = ?$



Lines $l \parallel m$;
 t is a transversal
 $\angle x = ?$



Lines $l \parallel m, p \parallel q$;
 Find a, b, c, d

5.4 CHECKING FOR PARALLEL LINES

If two lines are parallel, then you know that a transversal gives rise to pairs of equal corresponding angles, equal alternate interior angles and interior angles on the same side of the transversal being supplementary.

When two lines are given, is there any method to check if they are parallel or not? You need this skill in many life-oriented situations.

A draftsman uses a carpenter's square and a straight edge (ruler) to draw these segments (Fig 5.19). He claims they are parallel. How?

Are you able to see that he has kept the corresponding angles to be equal? (What is the transversal here?)

Thus, when a transversal cuts two lines, such that pairs of corresponding angles are equal, then the lines have to be parallel.

Look at the letter Z (Fig 5.20). The horizontal segments here are parallel, because the alternate angles are equal.

When a transversal cuts two lines, such that pairs of alternate interior angles are equal, the lines have to be parallel.

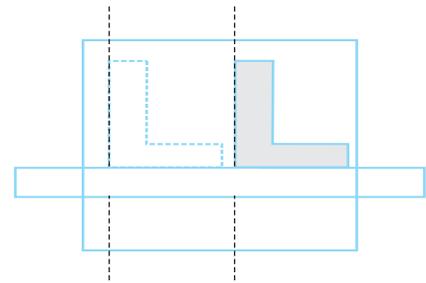


Fig 5.19

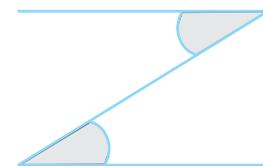
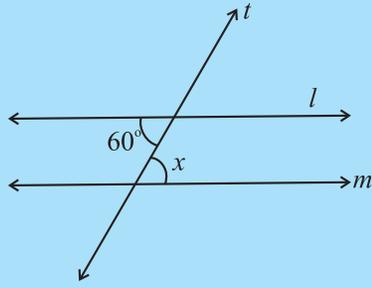
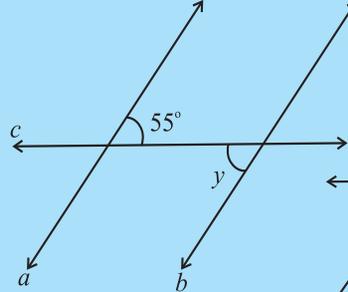


Fig 5.20

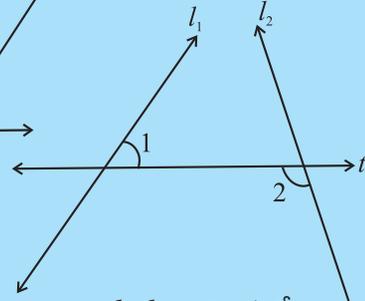
ప్రయత్నించండి.



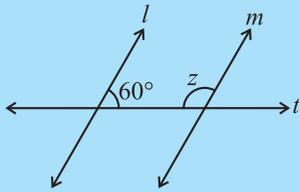
రేఖలు $l \parallel m$;
 t ఒక తిర్యగ్రేఖ
 $\angle x = ?$



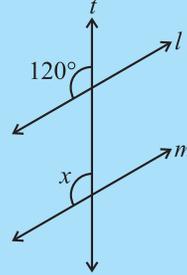
రేఖలు $a \parallel b$;
 c ఒక తిర్యగ్రేఖ
 $\angle y = ?$



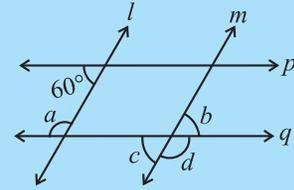
l_1, l_2 లు రెండు రేఖలు
 t ఒక తిర్యగ్రేఖ
 $\angle 1 = \angle 2$ అగునా?



రేఖలు $l \parallel m$;
 t ఒక తిర్యగ్రేఖ
 $\angle z = ?$



రేఖలు $l \parallel m$;
 t ఒక తిర్యగ్రేఖ
 $\angle x = ?$



రేఖలు $l \parallel m, p \parallel q$;
 a, b, c, d లను కనుక్కోండి

5.4 సమాంతర రేఖలను సరిచూడటం

రెండు రేఖలు సమాంతరాలైతే, అప్పుడు తిర్యగ్రేఖ సమాన సదృశ కోణాల జతలను, సమాన ఏకాంతర కోణాల జతను మరియు తిర్యగ్రేఖకు ఒకేవైపున ఉన్న అంతరకోణాలు సంపూర్ణకాలను ఇస్తుందని మీకు తెలుసు.

రెండు రేఖలు ఇచ్చినప్పుడు, అవి సమాంతరమా కాదా అని సరి చూడడానికి ఏదైనా పద్ధతి ఉందా? అనేక జీవిత-ఆధారిత పరిస్థితులలో మీకు ఈ నైపుణ్యం అవసరం.

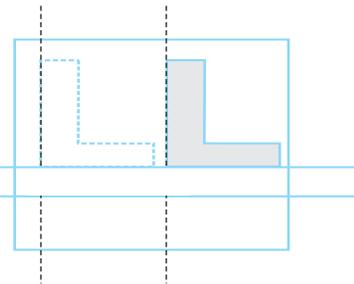
ఈ రేఖలు గీయడానికి ఒక డ్రాఫ్ట్ మెన్ (draftsman) మూలమట్టం బద్దలను మరియు ఒక రూలర్ ను ఉపయోగిస్తాడు. (పటం 5.19). అవి సమాంతరాలని అతనన్నాడు. ఎలా?

అతను సదృశ కోణాలను సమానంగా ఉంచినట్లు మీరు చూడగలరా? (ఇక్కడ తిర్యగ్రేఖ అంటే ఏమిటి?)

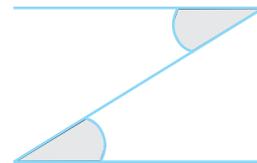
ఈ విధంగా, ఒక తిర్యగ్రేఖ రెండు రేఖలను ఖండించినప్పుడు, సదృశ కోణాల జతలు సమానంగా ఉంటే, అప్పుడు ఆ రేఖలు సమాంతరంగా ఉంటాయి.

Z అక్షరాన్ని చూడండి (పటం. 5.31). ఇక్కడ క్షితిజ సమాంతర భాగాలు సమాంతరంగా ఉంటాయి, ఎందుకంటే ఏకాంతర కోణాలు సమానంగా ఉంటాయి

రెండు రేఖలను ఒక తిర్యగ్రేఖ ఖండించినప్పుడు ఏకాంతర కోణాలు సమానమైతే ఆ రెండు రేఖలు సమాంతరాలు.



పటం 5.19



పటం 5.20

Draw a line l (Fig 5.21).
 Draw a line m , perpendicular to l . Again draw a line p , such that p is perpendicular to m .
 Thus, p is perpendicular to a perpendicular to l .
 You find $p \parallel l$. How? This is because you draw p such that $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$.

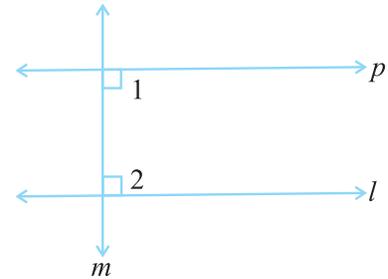


Fig 5.21

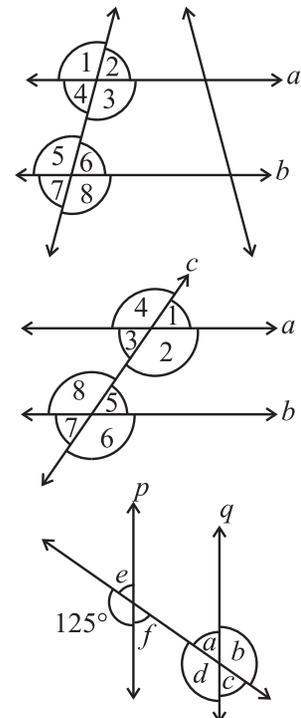
Thus, when a transversal cuts two lines, such that pairs of interior angles on the same side of the transversal are supplementary, the lines have to be parallel.

TRY THESE

EXERCISE 5.2



- State the property that is used in each of the following statements?
 - If $a \parallel b$, then $\angle 1 = \angle 5$.
 - If $\angle 4 = \angle 6$, then $a \parallel b$.
 - If $\angle 4 + \angle 5 = 180^\circ$, then $a \parallel b$.
- In the adjoining figure, identify
 - the pairs of corresponding angles.
 - the pairs of alternate interior angles.
 - the pairs of interior angles on the same side of the transversal.
 - the vertically opposite angles.
- In the adjoining figure, $p \parallel q$. Find the unknown angles.

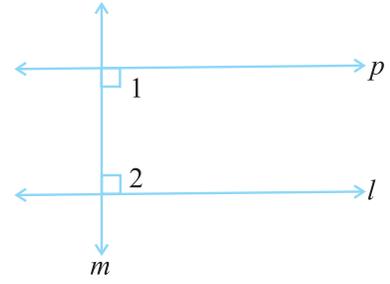


l రేఖను గీయండి. (పటం 5.21)

l కు లంబంగా m రేఖ గీయండి. m కు లంబంగా p ఉండేవిధంగా మరలా p రేఖ గీయండి.

అందువలన l కు గల లంబానికి లంబంగా p రేఖ ఉంది.

మీరు $p \parallel l$ అని కనుగొంటారు. ఎలా? మీరు $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ అయ్యేవిధంగా p ని గీయడం వలన ఈవిధంగా జత రేఖలను తిర్యగ్రేఖ ఖండించినప్పుడు, తిర్యగ్రేఖకు ఒకేవైపున గల అంతరకోణాలు సంపూర్ణకాలు.



పటం 5.21

ఒక తిర్యగ్రేఖ రెండు రేఖలను ఖండించినప్పుడు, ఏకాంతర కోణాల జతలు సమానంగా ఉంటే, ఆ రేఖలు సమాంతరంగా ఉంటాయి.

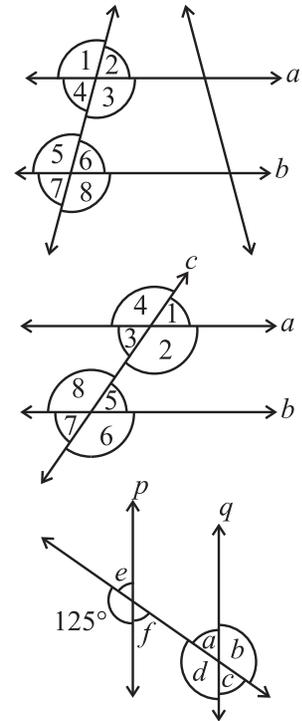
ప్రయత్నించండి.

$l \parallel m$ అగునా? ఎందుకు? $l \parallel m$ అగునా? ఎందుకు? $l \parallel m$ అయిన $\angle x$?

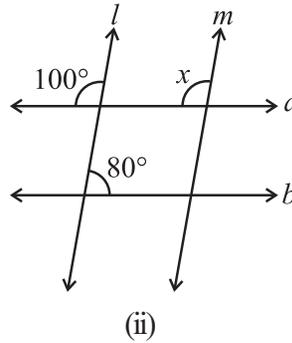
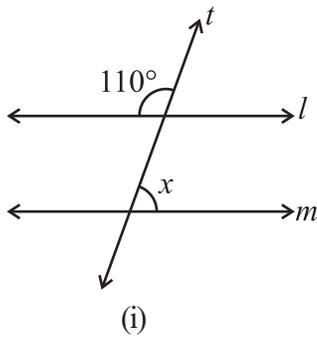
అభ్యాసం 5.2



- కింది ప్రతి ప్రవచనాలలో ఉపయోగించబడిన ధర్మాన్ని పేర్కొనండి.
 - $a \parallel b$ అయితే $\angle 1 = \angle 5$.
 - $\angle 4 = \angle 6$ అయితే $a \parallel b$.
 - $\angle 4 + \angle 5 = 180^\circ$ అయితే $a \parallel b$.
- పక్క పటంలో కింది వాటిని గుర్తించండి.
 - సదృశ కోణాల జతలు.
 - ఏకాంతర కోణాల జతలు.
 - తిర్యగ్రేఖకు ఒకేవైపు ఉన్న అంతరకోణాలు జత.
 - శీర్షాఖిముఖ కోణాలు.
- పక్కన ఉన్న పటంలో, $p \parallel q$. తెలియని కోణాలను కనుగొనండి.



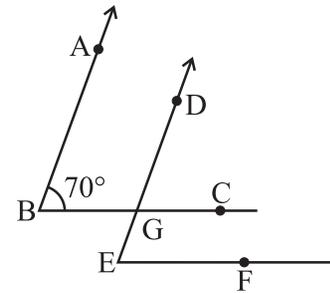
4. Find the value of x in each of the following figures if $l \parallel m$.



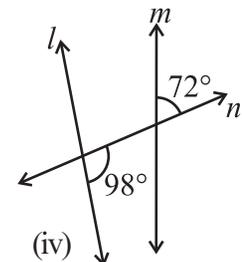
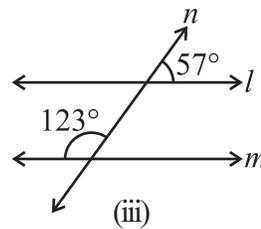
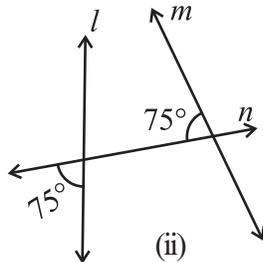
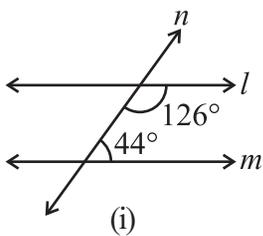
5. In the given figure, the arms of two angles are parallel.

If $\angle ABC = 70^\circ$, then find

- (i) $\angle DGC$
 (ii) $\angle DEF$



6. In the given figures below, decide whether l is parallel to m .

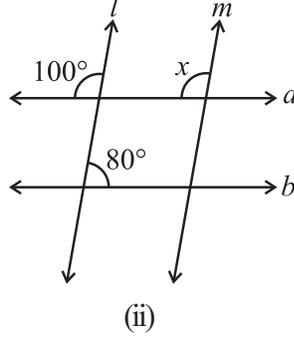
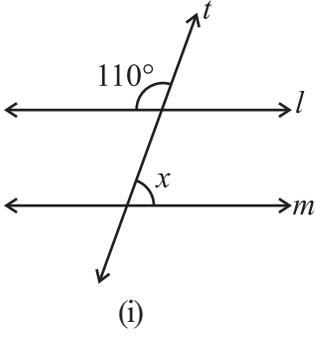


WHAT HAVE WE DISCUSSED?

- We recall that
 - A line-segment has two end points.
 - A ray has only one end point (its initial point); and
 - A line has no end points on either side.
- When two lines l and m meet, we say they *intersect*; the meeting point is called the point of intersection.
 When lines drawn on a sheet of paper do not meet, however far produced, we call them to be *parallel* lines.



4. $l \parallel m$ అయితే క్రింది ప్రతి పటాలలోని x విలువను కనుక్కోండి.

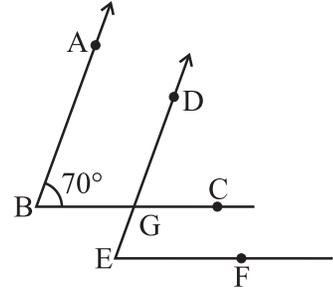


5. ఇచ్చిన పటంలో రెండు కోణాల భుజాలు సమాంతరాలు.

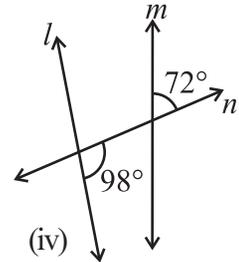
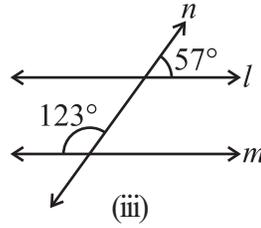
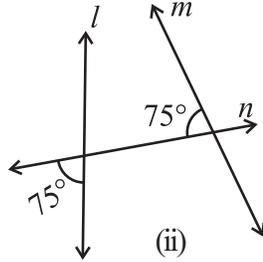
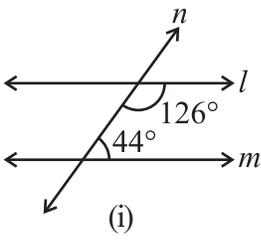
If $\angle ABC = 70^\circ$ అయితే క్రింది వాటిని కనుక్కోండి.

(i) $\angle DGC$

(ii) $\angle DEF$



6. క్రింద ఇచ్చిన పటాలలో l, m కు సమాంతరమా నిర్ణయించండి.



మనం ఏమి చర్చించాం?

- జుప్టికి తెచ్చుకోండి
 - ఒక రేఖా ఖండం రెండు అంత్య బిందువులను కలిగి ఉంటుంది
 - కిరణము ఒకే ఒక అంత్య బిందువును కలిగి ఉంటుంది. (దాని తొలి బిందువు) మరియు
 - ఒక రేఖ రెండు వైపులా అంత్య బిందువులను కలిగి ఉండదు

2. రెండు రేఖలు l మరియు m కలిసినప్పుడు, అవి ఖండించుకున్నాయి అని అంటాము. కలిసినచోట గల బిందువును ఖండన బిందువు అంటారు. కాగితం పై గీచిన రేఖలను చాలా వరకు పొడిగించినప్పటికీ కలవక పోతే, వాటిని మనం సమాంతర రేఖలు అని పిలుస్తాము



The Triangle and its Properties



6.1 INTRODUCTION

A triangle, you have seen, is a simple closed curve made of three line segments. It has three vertices, three sides and three angles.

Here is $\triangle ABC$ (Fig 6.1). It has

Sides: \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CA}

Angles: $\angle BAC$, $\angle ABC$, $\angle BCA$

Vertices: A, B, C

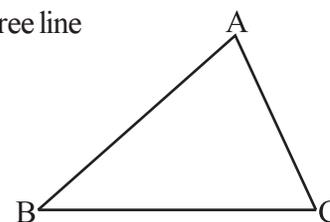


Fig 6.1

The side opposite to the vertex A is BC. Can you name the angle opposite to the side AB? You know how to classify triangles based on the (i) sides (ii) angles.

- (i) Based on Sides: Scalene, Isosceles and Equilateral triangles.
- (ii) Based on Angles: Acute-angled, Obtuse-angled and Right-angled triangles.

Make paper-cut models of the above triangular shapes. Compare your models with those of your friends and discuss about them.

TRY THESE

1. Write the six elements (i.e., the 3 sides and the 3 angles) of $\triangle ABC$.
2. Write the:
 - (i) Side opposite to the vertex Q of $\triangle PQR$
 - (ii) Angle opposite to the side LM of $\triangle LMN$
 - (iii) Vertex opposite to the side RT of $\triangle RST$
3. Look at Fig 6.2 and classify each of the triangles according to its
 - (a) Sides
 - (b) Angles



త్రిభుజము మరియు ధర్మాలు



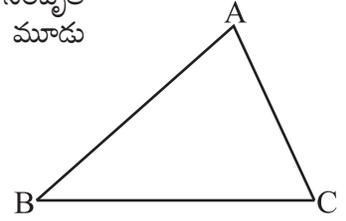
అధ్యాయం - 6

6.1 పరిచయం

పక్క పటంలో చూపిన విధముగా మూడు రేఖా ఖండములచే ఏర్పడిన సరళ సంవృత పటాన్ని త్రిభుజము అంటారు. ఇది మూడు శీర్షాలు, మూడు భుజాలు మరియు మూడు కోణాలను కలిగి వుంటుంది.

ఇక్కడ ΔABC లో (పటం 6.1).

భుజాలు: $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$
 కోణాలు: $\angle BAC, \angle ABC, \angle BCA$
 శీర్షాలు: A, B, C



పటం. 6.1

శీర్షం A కు ఎదుటి భుజం BC. భుజం AB కు ఎదురుగానున్న కోణం పేరు చెప్పగలరా?

(i) భుజాలు (ii) కోణాల ఆధారంగా త్రిభుజాలను ఎలా వర్గీకరించాలో మీకు తెలుసా?

(i) భుజాల ఆధారంగా: సమబాహు, సమద్విబాహు మరియు విషమ బాహు త్రిభుజాలు.

(ii) కోణాల ఆధారంగా: లంబకోణ, అధిక కోణ మరియు అల్పకోణ త్రిభుజాలు.

కాగితం సహాయంతో పైన పేర్కొన్న త్రిభుజాల నమూనాలను తయారు చేయండి. మీ నమూనాలను మీ స్నేహితుల నమూనాలతో పోల్చండి మరియు వాటి గురించి చర్చించండి.

ప్రయత్నించండి

- ΔABC యొక్క 6 అంశాలు రాయండి (3 భుజాలు మరియు 3 కోణాలు).
- రాయండి:
 - ΔPQR లో శీర్షం Q కు ఎదురుగానున్న భుజం ఏది?
 - ΔLMN లో LM భుజానికి ఎదురుగానున్న కోణం ఏది?
 - ΔRST లో RT భుజానికికు ఎదురుగానున్న శీర్షాలను రాయండి?
- పటం 6.2 ను చూడండి మరియు ప్రతి త్రిభుజాన్ని
 - భుజాలు
 - కోణాల ఆధారంగా వర్గీకరించండి?



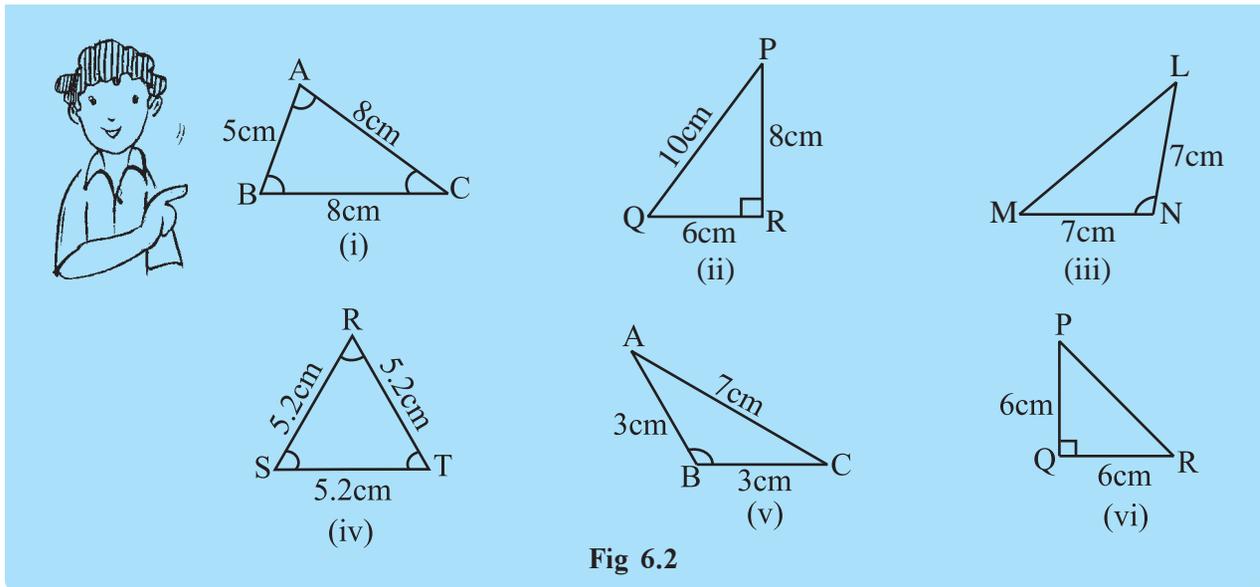


Fig 6.2

Now, let us try to explore something more about triangles.

6.2 MEDIANS OF A TRIANGLE

Given a line segment, you know how to find its perpendicular bisector by paper folding. Cut out a triangle ABC from a piece of paper (Fig 6.3). Consider any one of its sides, say, \overline{BC} . By paper-folding, locate the perpendicular bisector of \overline{BC} . The folded crease meets \overline{BC} at D , its mid-point. Join AD .

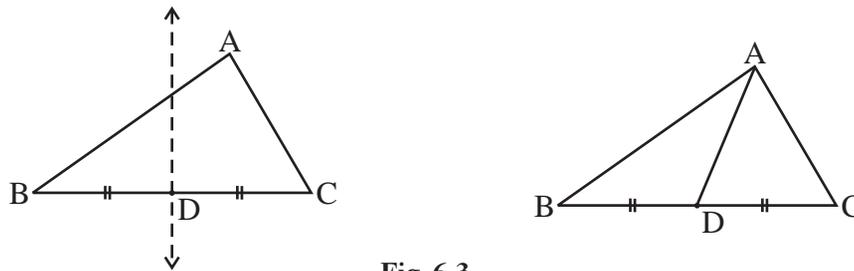


Fig 6.3

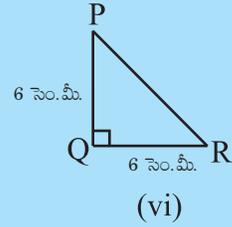
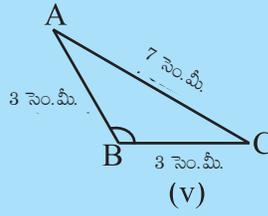
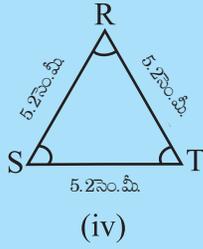
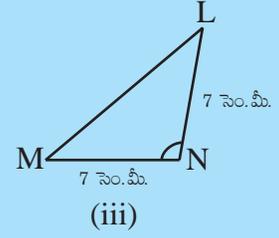
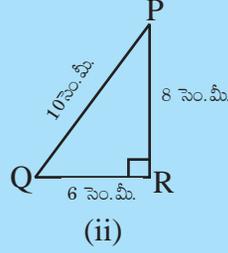
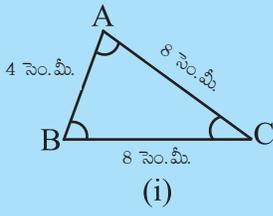
The line segment AD , joining the mid-point of \overline{BC} to its opposite vertex A is called a **median** of the triangle.

Consider the sides \overline{AB} and \overline{CA} and find two more medians of the triangle. A median connects a vertex of a triangle to the mid-point of the opposite side.

THINK, DISCUSS AND WRITE

1. How many medians can a triangle have?
2. Does a median lie wholly in the interior of the triangle? (If you think that this is not true, draw a figure to show such a case).



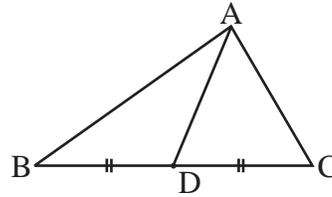
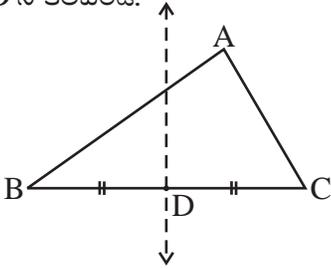


పటం 6.2

త్రిభుజాలు గురించి మరింత అన్వేషించడానికి ప్రయత్నిద్దాం.

6.2 త్రిభుజం యొక్క మధ్యగత రేఖలు

రేఖా ఖండం ఇచ్చినట్లయితే, కాగితం మడత ద్వారా దాని లంబ సమద్విఖండన రేఖ ఎలా కనుగొనాలో మీకు తెలుసు. కాగితం ముక్క నుండి ఒక త్రిభుజం ABC ని కత్తిరించండి (పటం 6.3) అందులో ఏదో ఒక భుజాన్ని పరిగణించండి, \overline{BC} అనుకొనుము. కాగితాన్ని మడత పెట్టుట ద్వారా \overline{BC} యొక్క లంబ సమద్విఖండన రేఖను గుర్తించండి. \overline{BC} యొక్క మడత పెట్టిన భాగం D, వద్ద కలుస్తుంది. ఇది మధ్య బిందువు. AD ని కలపండి.



పటం 6.3

శీర్షం A కు ఎదురుగా \overline{BC} మధ్య బిందువును కలిపే రేఖా ఖండం ADను త్రిభుజం యొక్క మధ్యగత రేఖ అంటారు.

భుజాలు \overline{AB} మరియు \overline{CA} ల ను పరిగణించండి మరియు త్రిభుజం యొక్క మరో రెండు మధ్యగత రేఖలను కనుగొనండి.

త్రిభుజం యొక్క శీర్షాన్ని ఎదురుగా ఉన్న భుజం యొక్క మధ్యబిందువు ను మధ్యగత రేఖ కలుపుతుంది.

ఆలోచించి, చర్చించి రాయండి

1. ఒక త్రిభుజం ఎన్ని మధ్యగత రేఖలను కలిగి వుంటుంది?
2. మధ్యగత రేఖ పూర్తిగా త్రిభుజం అంతరంలో ఉంటుందా? (ఇది నిజం కాదని మీరు భావిస్తే, అటువంటి సందర్భాన్ని చూపించడానికి ఒక పటాన్ని గీయండి).



6.3 ALTITUDES OF A TRIANGLE

Make a triangular shaped cardboard ABC. Place it upright on a table. How 'tall' is the triangle? The **height** is the distance from vertex A (in the Fig 6.4) to the base \overline{BC} .

From A to \overline{BC} , you can think of many line segments (see the next Fig 6.5). Which among them will represent its height?

The **height** is given by the line segment that starts from A, comes straight down to \overline{BC} , and is perpendicular to \overline{BC} .

This line segment \overline{AL} is an **altitude** of the triangle.

An altitude has one end point at a vertex of the triangle and the other on the line containing the opposite side. Through each vertex, an altitude can be drawn.

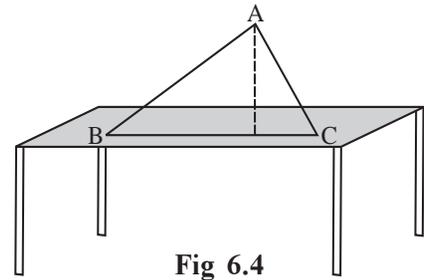


Fig 6.4

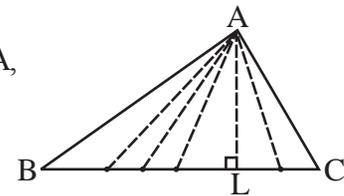


Fig 6.5



THINK, DISCUSS AND WRITE

- How many altitudes can a triangle have?
- Draw rough sketches of altitudes from A to \overline{BC} for the following triangles (Fig 6.6):

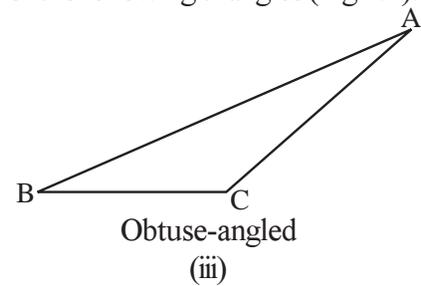
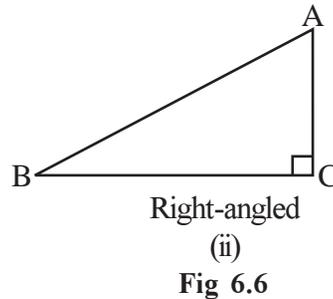
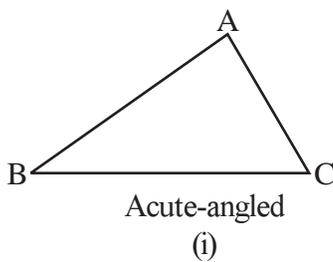


Fig 6.6

- Will an altitude always lie in the interior of a triangle? If you think that this need not be true, draw a rough sketch to show such a case.
- Can you think of a triangle in which two altitudes of the triangle are two of its sides?
- Can the altitude and median be same for a triangle?
(Hint: For Q.No. 4 and 5, investigate by drawing the altitudes for every type of triangle).

Do THIS



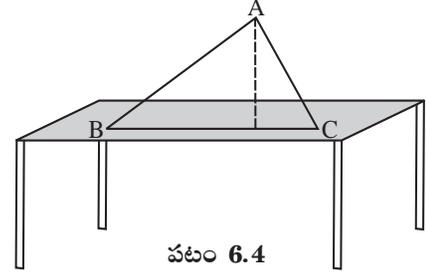
Take several cut-outs of

- an equilateral triangle
- an isosceles triangle and
- a scalene triangle.

Find their altitudes and medians. Do you find anything special about them? Discuss it with your friends.

6.3 త్రిభుజం యొక్క ఉన్నతులు

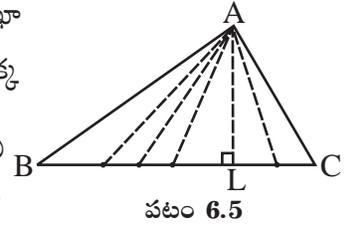
త్రిభుజాకార కార్డు బోర్డు ABC ని తయారు చేయండి. ఒక టేబుల్ మీద నిటారుగా వుంచండి. త్రిభుజం ఎంత 'ఎత్తుగా' వుంది? శీర్షం A (పటం 6.4) నుండి భూమి \overline{BC} కి గల దూరమే ఎత్తు అంటారు.



పటం 6.4

A నుంచి \overline{BC} కి మీరు చాలా రేఖా ఖండాలను ఊహించవచ్చు. (తరువాతి పటం. 6.5 చూడండి). వీనిలో ఎత్తును ఏ రేఖాఖండము తెలియజేస్తుంది?

A నుంచి \overline{BC} కి నిలువుగా మరియు \overline{BC} కి లంబంగా గీసిన రేఖా ఖండము 'ఎత్తు'ని ఇస్తుంది. రేఖాఖండం \overline{AL} ను త్రిభుజం యొక్క ఉన్నతి అంటారు.



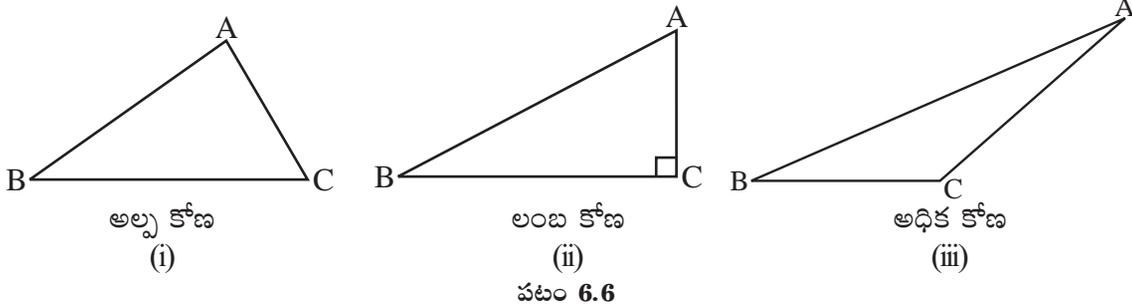
పటం 6.5

ఉన్నతి కి త్రిభుజం యొక్క ఒక శీర్షం లో ఒక చివర అంత్య బిందువు ఉంటుంది మరియు మరొకటి ఎదుటి భుజాన్ని కలిగి ఉన్న రేఖ పై ఉంటుంది. ప్రతీ శీర్షం నుండి ఒక ఉన్నతి ని గీయవచ్చు.



ఆలోచించి, చర్చించి రాయండి

1. ఒక త్రిభుజానికి ఎన్ని ఉన్నతులు ఉంటాయి?



పటం 6.6

2. కింది త్రిభుజాలకు A నుండి \overline{BC} కి ఉన్నతుల చిత్తు పటాలను గీయండి (పటం 6.6):
3. ఉన్నతి ఎల్లప్పుడూ త్రిభుజం అంతరంలో ఉంటుందా? ఇది సత్యంకానవసరం లేదని మీరు అనుకుంటే, అటువంటి సందర్భాన్ని చూపే చిత్తు పటంను గీయండి
4. ఒక త్రిభుజం లోని రెండు ఉన్నతులు దాని భుజాలు అయ్యే త్రిభుజాన్ని మీరు ఊహించగలరా?

ఇవి చేయండి



5. ఒక త్రిభుజానికి ఉన్నతి మరియు మధ్యగత రేఖ ఒకటే అవుతాయా ?
(సూచన: 4, 5 ప్రశ్నలకు ప్రతీ త్రిభుజ రకాలకి ఉన్నతులు గీచి పరిశోధించండి).

మరికొన్ని

- (i) సమబాహు త్రిభుజం
 - (ii) ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజం మరియు
 - (iii) విషమ బహు త్రిభుజం
- వీటి ఉన్నతులు మరియు మధ్యగత రేఖలను కనుగొనండి. వీటి గురించి ఏదైనా ప్రత్యేకత కనుగొన్నారా? మీ మిత్రులతో దీనిని గురించి చర్చించండి.

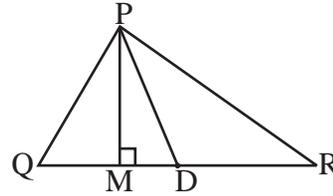
EXERCISE 6.1

1. In $\triangle PQR$, D is the mid-point of \overline{QR} .

\overline{PM} is _____.

PD is _____.

Is $QM = MR$?



2. Draw rough sketches for the following:
- In $\triangle ABC$, BE is a median.
 - In $\triangle PQR$, PQ and PR are altitudes of the triangle.
 - In $\triangle XYZ$, YL is an altitude in the exterior of the triangle.
3. Verify by drawing a diagram if the median and altitude of an isosceles triangle can be same.

6.4 EXTERIOR ANGLE OF A TRIANGLE AND ITS PROPERTY

Do THIS

1. Draw a triangle ABC and produce one of its sides, say BC as shown in Fig 6.7. Observe the angle ACD formed at the point C. This angle lies in the exterior of $\triangle ABC$. We call it an **exterior angle** of the $\triangle ABC$ formed at vertex C.

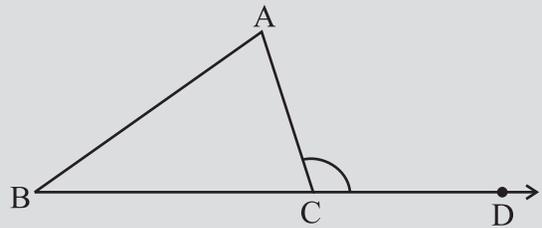


Fig 6.7

Clearly $\angle BCA$ is an adjacent angle to $\angle ACD$. The remaining two angles of the triangle namely $\angle A$ and $\angle B$ are called the two **interior opposite angles** or the two remote interior angles of $\angle ACD$. Now cut out (or make trace copies of) $\angle A$ and $\angle B$ and place them adjacent to each other as shown in Fig 6.8.

Do these two pieces together entirely cover $\angle ACD$?

Can you say that

$$m \angle ACD = m \angle A + m \angle B?$$

2. As done earlier, draw a triangle ABC and form an exterior angle ACD. Now take a protractor and measure $\angle ACD$, $\angle A$ and $\angle B$.

Find the sum $\angle A + \angle B$ and compare it with the measure of $\angle ACD$. Do you observe that $\angle ACD$ is equal (or nearly equal, if there is an error in measurement) to $\angle A + \angle B$?

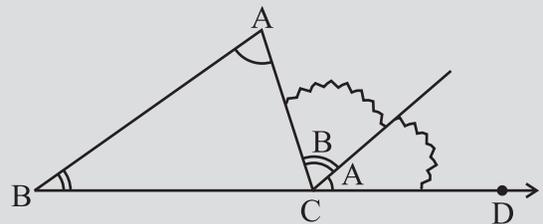


Fig 6.8



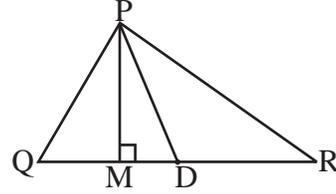
అభ్యాసం 6. 1

1. ΔPQR లో, \overline{QR} యొక్క మధ్య బిందువు D.

\overline{PM} అనేది _____.

PD అనేది _____.

Is $QM = MR$?



2. క్రింది వాటికి చిత్తు పటాలను గీయండి:

(a) ΔABC లో BE మధ్యగత రేఖ .

(b) ΔPQR లో త్రిభుజం యొక్క ఉన్నతులు PQ మరియు PR .

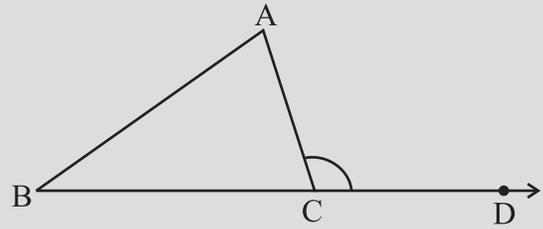
(c) ΔXYZ లో త్రిభుజం యొక్క బాహ్యంలో ఉన్న ఉన్నతి YL

3. సమద్విభాహు త్రిభుజంలో మధ్యగతం మరియు ఉన్నతులు సమానంగా ఉంటాయేమో పటం గీచి సరి చూడండి.

6.4 త్రిభుజము - బాహ్యకోణము మరియు దాని ధర్మాలు

ఇవి చేయండి

1. త్రిభుజం ABC ని గీచి పటం 6. 7 లో చూపిన విధముగా BC భుజాన్ని D వరకు పొడిగించుము. బిందువు C వద్ద ఏర్పడిన $\angle ACD$ కోణాన్ని గమనించండి. ఈ కోణము త్రిభుజం యొక్క బాహ్యంలో గలదు. శీర్షం C వద్ద ఏర్పడిన దానిని $\angle ABC$ యొక్క బాహ్యకోణము అని అంటారు.



పటం 6.7

స్పష్టం గా $\angle ACD$ కి $\angle BCA$ అసన్న కోణము. త్రిభుజం లో మిగిలిన రెండు కోణాలు $\angle A$ మరియు $\angle B$ లను

$\angle ACD$ యొక్క అంతరాభిముఖ కోణాలు అంటాము లేదా $\angle ACD$ యొక్క సదూర అంతర కోణాలు అంటాము. ఇప్పుడు A, B కోణాలను కత్తిరించి నకలును తయారు చేసి పటము 6.8 లో చూపిన విధముగా వానిని C వద్ద ఒక దాని ప్రక్కన ఒకటి ఉంచుము.

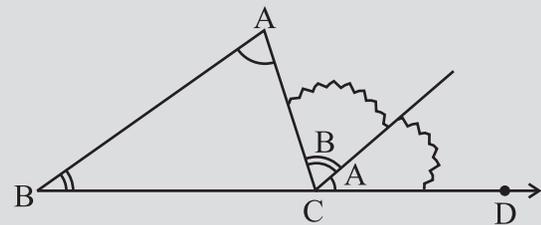
ఈ రెండు కోణాలు కలిసి $\angle ACD$ కోణంతో ఏకీభవించాయా?

$$m \angle ACD = m \angle A + m \angle B?$$

అని నీవు చెప్పగలవా ?

2. పైన చేసిన విధానం లోనే ΔABC త్రిభుజం ను గీచి బాహ్య కోణం $\angle ACD$ ను ఏర్పరుచుము. కోణమానిని సహాయంతో $\angle ACD$, $\angle A$ మరియు $\angle B$ కోణము విలువలను కనుగొనుము.

$\angle A + \angle B$ ల మొత్తమును కనుగొని $\angle ACD$ కొలతతో పోల్చుము. $\angle ACD$ కొలతతో $\angle A + \angle B$ అనేది సమానం గా ఒక వేళ కొలవడం లో తప్పు జరిగితే దాదాపు గా సమానంగా ఉందని మీరు గమనించారా?



పటం 6.8



You may repeat the two activities as mentioned by drawing some more triangles along with their exterior angles. Every time, you will find that the exterior angle of a triangle is equal to the sum of its two interior opposite angles.

A logical step-by-step argument can further confirm this fact.

An exterior angle of a triangle is equal to the sum of its interior opposite angles.

Given: Consider $\triangle ABC$.

$\angle ACD$ is an exterior angle.

To Show: $m\angle ACD = m\angle A + m\angle B$

Through C draw \overline{CE} , parallel to \overline{BA} .

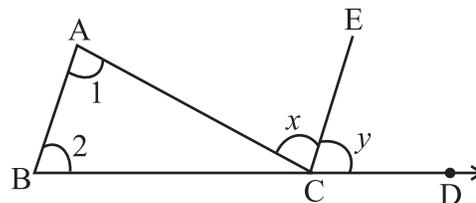


Fig 6.9

Justification

Steps

- $\angle 1 = \angle x$
- $\angle 2 = \angle y$
- $\angle 1 + \angle 2 = \angle x + \angle y$
- Now, $\angle x + \angle y = m\angle ACD$
Hence, $\angle 1 + \angle 2 = \angle ACD$

Reasons

$\overline{BA} \parallel \overline{CE}$ and \overline{AC} is a transversal.
Therefore, alternate angles should be equal.

$\overline{BA} \parallel \overline{CE}$ and \overline{BD} is a transversal.
Therefore, corresponding angles should be equal.

From Fig 6.9

The above relation between an exterior angle and its two interior opposite angles is referred to as the **Exterior Angle Property of a triangle**.



THINK, DISCUSS AND WRITE

- Exterior angles can be formed for a triangle in many ways. Three of them are shown here (Fig 6.10)

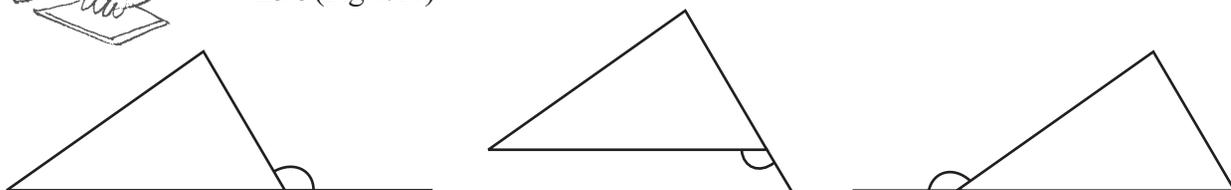


Fig 6.10

There are three more ways of getting exterior angles. Try to produce those rough sketches.

- Are the exterior angles formed at each vertex of a triangle equal?
- What can you say about the sum of an exterior angle of a triangle and its adjacent interior angle?

పైన పేర్కొన్న విధం గా మరికొన్ని త్రిభుజాలను వాటితో పాటు బాహ్యకోణములును గీచి పై రెండు కృత్యాలను పునరావృతం చేయండి. త్రిభుజం యొక్క బాహ్యకోణం అనేది దాని అంతరాభిముఖ కోణాల మొత్తానికి సమానమని కనుగొంటారు.

ఈ దృగ్విషయాన్ని సోపానాల వారీగా తార్కిక పద్ధతి లో నిర్ధారించవచ్చు.

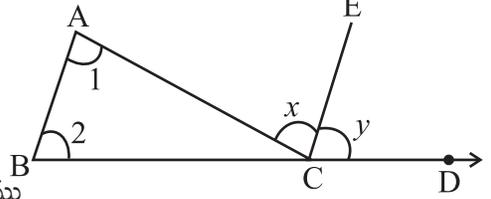
ఒక త్రిభుజం యొక్క బాహ్యకోణము దాని అంతరాభిముఖ కోణాల మొత్తానికి సమానము.

దత్తాంశము: $\triangle ABC$ లో

$\angle ACD$ బాహ్యకోణము.

సారాంశం: $m\angle ACD = m\angle A + m\angle B$

C నుంచి \overline{BA} కు సమాంతరము గా \overline{CE} ని నిర్మించుము



పటం 6.9

ఉపపత్తి

సోపానాలు

కారణాలు

(a) $\angle 1 = \angle x$

$\overline{BA} \parallel \overline{CE}$ మరియు \overline{AC} తిర్యగ్గ్రేఖ.

అందువలన ఏకాంతర కోణాలు సమానము.

(b) $\angle 2 = \angle y$

$\overline{BA} \parallel \overline{CE}$ మరియు \overline{BD} తిర్యగ్గ్రేఖ.

అందువలన సదృశ్య కోణాలు సమానము.

(c) $\angle 1 + \angle 2 = \angle x + \angle y$

(d) ఇప్పుడు, $\angle x + \angle y = m\angle ACD$ పటం 6.9 నుండి

కావున, $\angle 1 + \angle 2 = \angle ACD$

బాహ్యకోణము మరియు దాని రెండు అంతరాభిముఖ కోణాల మధ్య సంబంధాన్ని త్రిభుజం యొక్క బాహ్యకోణ ధర్మం పిలుస్తారు.



ఆలోచించి, చర్చించి రాయండి

1. త్రిభుజానికి అనేక విధాలుగా బాహ్యకోణాలు ఏర్పడతాయి. అందులో మూడు క్రింద చూపబడ్డాయి (పటం 6.10)



పటం 6.10

బాహ్యకోణాలు పొందడానికి మరో మూడు మార్గాలున్నాయి. వాటికి చిత్తు ప్రతులను గీయండి.

2. త్రిభుజం యొక్క ప్రతి శీర్షం వద్ద ఏర్పడిన బాహ్యకోణాలు సమానమా?
3. త్రిభుజం యొక్క బాహ్య కోణం మరియు దాని ఆసన్న అంతర కోణాల మొత్తం గురుంచి నీవు ఏమి చెప్పగలవు?

EXAMPLE 1 Find angle x in Fig 6.11.

SOLUTION Sum of interior opposite angles = Exterior angle

or

$$50^\circ + x = 110^\circ$$

or

$$x = 60^\circ$$

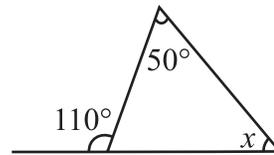


Fig 6.11

THINK, DISCUSS AND WRITE

- What can you say about each of the interior opposite angles, when the exterior angle is
 - a right angle?
 - an obtuse angle?
 - an acute angle?
- Can the exterior angle of a triangle be a straight angle?



TRY THESE

- An exterior angle of a triangle is of measure 70° and one of its interior opposite angles is of measure 25° . Find the measure of the other interior opposite angle.
- The two interior opposite angles of an exterior angle of a triangle are 60° and 80° . Find the measure of the exterior angle.
- Is something wrong in this diagram (Fig 6.12)? Comment.

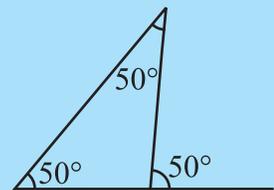
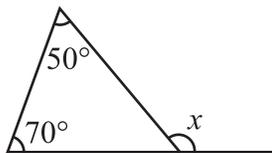


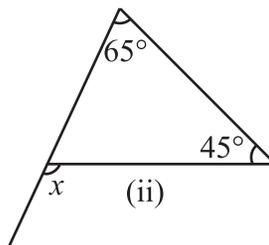
Fig 6.12

EXERCISE 6.2

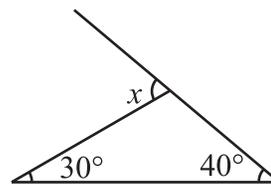
- Find the value of the unknown exterior angle x in the following diagrams:



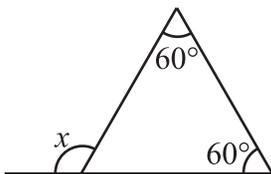
(i)



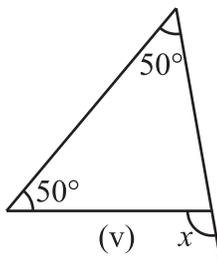
(ii)



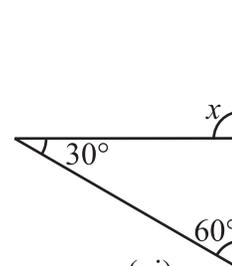
(iii)



(iv)



(v)



(vi)



ఉదాహరణ 1 పటం 6.11 నుండి కోణం x కనుగొనండి.

సాధన

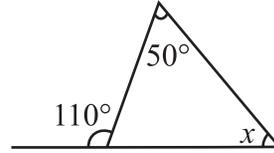
అంతరాభిముఖ కోణాల మొత్తం = బాహ్య కోణం

లేదా

$$50^\circ + x = 110^\circ$$

లేదా

$$x = 60^\circ$$



పటం 6.11

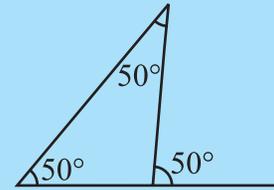


ఆలోచించి, చర్చించి రాయండి

- క్రింది వానిలో ఏదైనా ఒకటి బాహ్యకోణం అయినప్పుడు, ప్రతి ఒక అంతరాభిముఖ కోణాల గురించి ఏమి చెప్పగలవు?
 - ఒక లంబకోణం?
 - ఒక అధిక కోణం?
 - ఒక అల్ప కోణం?
- త్రిభుజం యొక్క బాహ్యకోణం సరళ కోణం కాగలదా?

ప్రయత్నించండి

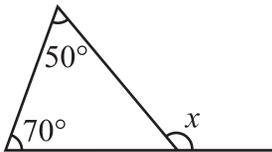
- త్రిభుజం యొక్క బాహ్య కోణం కొలత 70° మరియు దాని అంతరాభిముఖ కోణాలలో ఒక దాని కొలత 25° . అయిన రెండవ అంతరాభిముఖ కోణం విలువ ఎంత?
- ఒక త్రిభుజం బాహ్యకోణం యొక్క రెండు అంతరాభిముఖ కోణాలు 60° మరియు 80° . అయిన బాహ్య కోణం కొలతను కనుగొనుము.
- ప్రక్కన గల పటం 6.12 లో ఏదైనా తప్పు ఉన్నదా? వ్యాఖ్యానించుము.



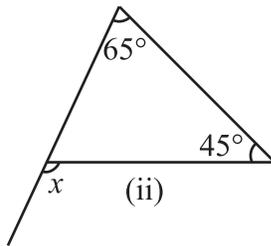
పటం 6.12

అభ్యాసం 6. 2

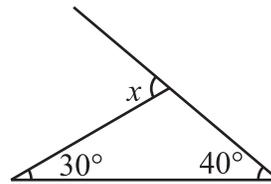
- క్రింది పటాల నుండి తెలియని బాహ్యకోణం x యొక్క విలువను కనుగొనుము :



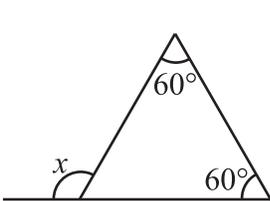
(i)



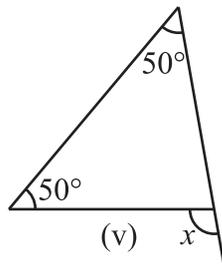
(ii)



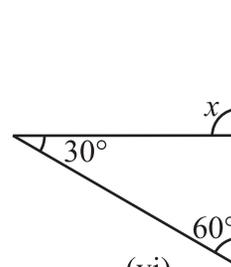
(iii)



(iv)

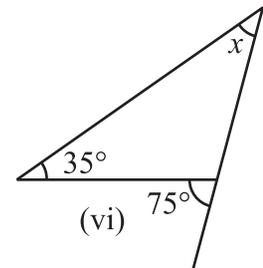
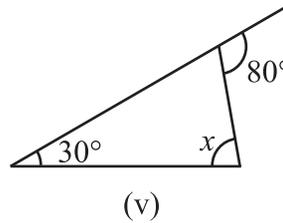
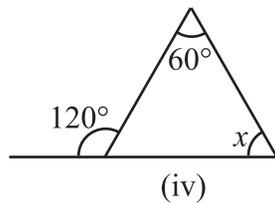
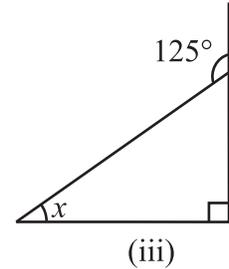
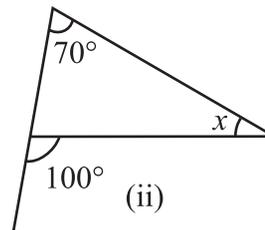
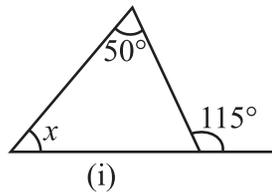


(v)



(vi)

2. Find the value of the unknown interior angle x in the following figures:



6.5 ANGLE SUM PROPERTY OF A TRIANGLE

There is a remarkable property connecting the three angles of a triangle. You are going to see this through the following four activities.

1. Draw a triangle. Cut on the three angles. Rearrange them as shown in Fig 6.13 (i), (ii). The three angles now constitute one angle. This angle is a straight angle and so has measure 180° .

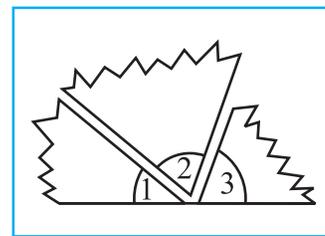
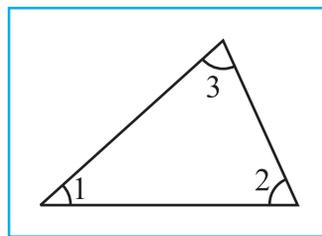


Fig 6.13

Thus, the sum of the measures of the three angles of a triangle is 180° .

2. The same fact you can observe in a different way also. Take three copies of any triangle, say $\triangle ABC$ (Fig 6.14).

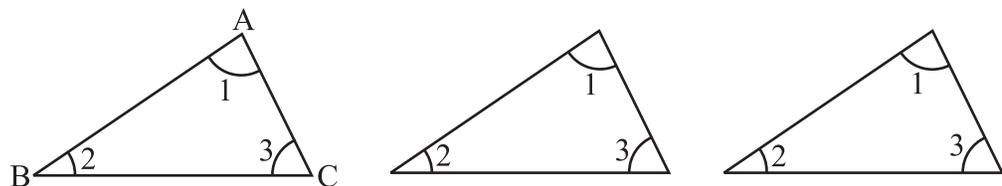
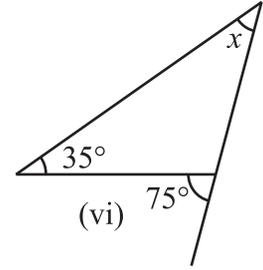
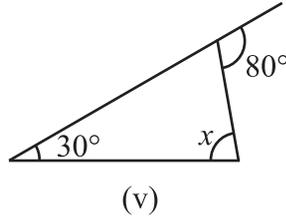
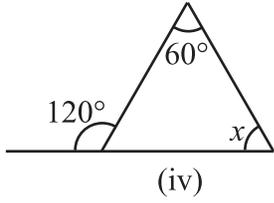
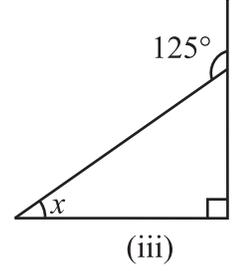
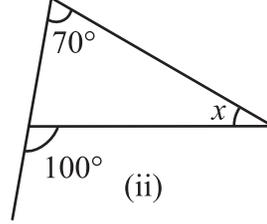
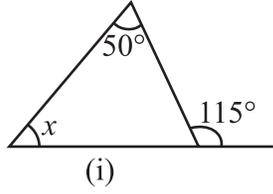


Fig 6.14

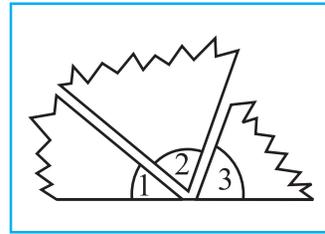
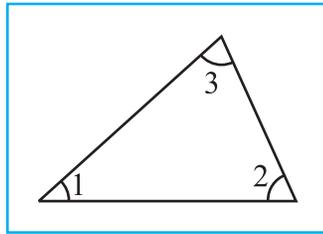
2. క్రింది పటాలలో తెలియని అంతర కోణం x విలువను కనుగొనండి.



6.5 త్రిభుజములోని అంతరకోణాల మొత్తము ధర్మము

త్రిభుజములోని మూడు కోణాలకు సంబంధించిన ఒక ముఖ్య ధర్మం ఉన్నది. దీనిని క్రింది చూపిన నాలుగు కృత్యాల ద్వారా మీరు తెలుసుకుంటారు.

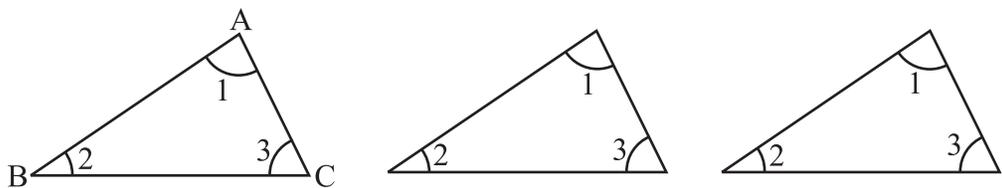
- ఒక త్రిభుజాన్ని గీయండి. దాని మూడు కోణాలను కత్తిరించండి. పటం 6.13 (i), (ii) లో చూపిన విధముగా వాటిని మళ్ళీ అమర్చండి. ఈ మూడు కోణాలు ఇప్పుడు ఒక కోణాన్ని ఏర్పరుస్తాయి. ఈ కోణం ఒక సరళ కోణం మరియు దాని కొలత 180° .



పటం 6.13

ఈ విధముగా త్రిభుజం యొక్క మూడు కోణాల మొత్తం 180° .

- ఇదే వాస్తవాన్ని మీరు వేరే విధముగా కూడా గమనించవచ్చు. ఏదైనా ఒక త్రిభుజం యొక్క మూడు నకలు పటాలను తీసుకొనుము. త్రిభుజాన్ని $\triangle ABC$ అనుకొనుము (పటం. 6.14).



పటం 6.14

Arrange them as in Fig 6.15.

What do you observe about $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$?

(Do you also see the 'exterior angle property'?)

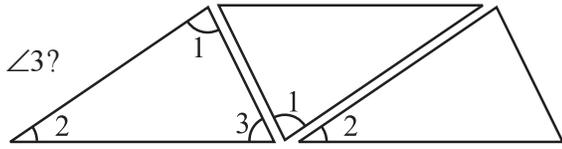


Fig 6.15

- Take a piece of paper and cut out a triangle, say, $\triangle ABC$ (Fig 6.16).
Make the altitude AM by folding $\triangle ABC$ such that it passes through A .
Fold now the three corners such that all the three vertices A , B and C touch at M .

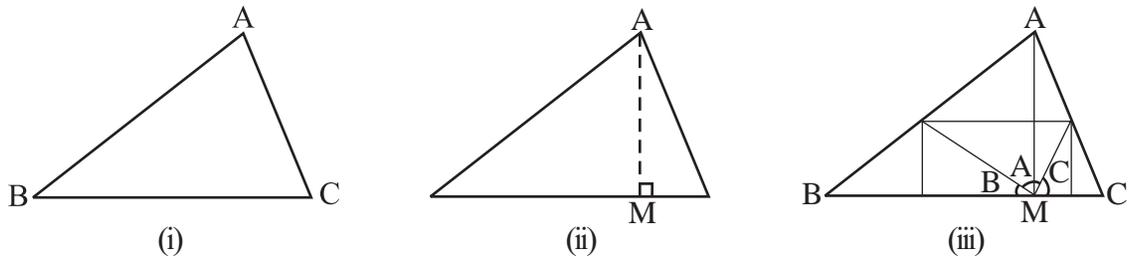


Fig 6.16

You find that all the three angles form together a straight angle. This again shows that the sum of the measures of the three angles of a triangle is 180° .

- Draw any three triangles, say $\triangle ABC$, $\triangle PQR$ and $\triangle XYZ$ in your notebook.
Use your protractor and measure each of the angles of these triangles.
Tabulate your results

Name of Δ	Measures of Angles	Sum of the Measures of the three Angles
$\triangle ABC$	$m\angle A =$ $m\angle B =$ $m\angle C =$	$m\angle A + m\angle B + m\angle C =$
$\triangle PQR$	$m\angle P =$ $m\angle Q =$ $m\angle R =$	$m\angle P + m\angle Q + m\angle R =$
$\triangle XYZ$	$m\angle X =$ $m\angle Y =$ $m\angle Z =$	$m\angle X + m\angle Y + m\angle Z =$

Allowing marginal errors in measurement, you will find that the last column always gives 180° (or nearly 180°).

When perfect precision is possible, this will also show that the sum of the measures of the three angles of a triangle is 180° .

You are now ready to give a formal justification of your assertion through logical argument.

Statement The total measure of the three angles of a triangle is 180° .

To justify this let us use the exterior angle property of a triangle.

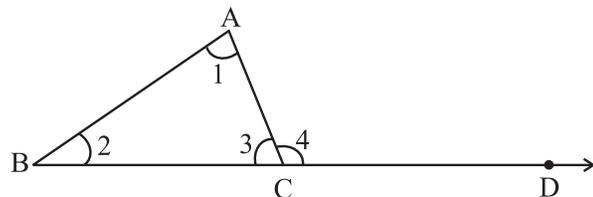
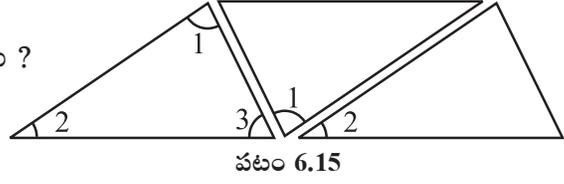
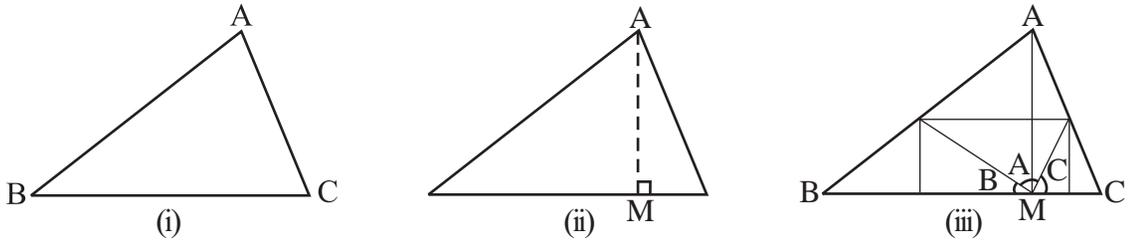


Fig 6.17

పటం 6.15 లో విధము గా అమర్చుము.
 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$? గురించి ఏమి గమనించారు ?
 (ఇక్కడ బాహ్యకోణ ధర్మంను కూడా గమనించవచ్చును.)



3. ఒక పేపర్ ను తీసుకొని దీని నుంచి $\triangle ABC$ ని (పటం 6.16) కత్తిరించుము. $\triangle ABC$ (త్రిభుజాన్ని ఉన్నతి AM , A గుండా పోయే విధంగా మడవండి. ఇప్పుడు మూడు శీర్షాలు A, B మరియు C లు M వద్ద కలిసే విధముగా మడత పెట్టండి.



పటం 6.16

మూడు కోణాలు A, B మరియు C లు కలసిన ఒక సరళ కోణంగా ఏర్పడటం గమనించవచ్చు. త్రిభుజం యొక్క మూడు కోణాల మొత్తం కొలత 180° అని మరలా నిరూపించబడినది.

4. మీ నోట్ బుక్ లో ఏవైనా 3 త్రిభుజాలు $\triangle ABC, \triangle PQR$ మరియు $\triangle XYZ$ గీయుము. ఈ త్రిభుజాల ప్రతి కోణం కొలతను కోణమానిని సహాయంతో కనుగొనుము.

ఫలితాలను పట్టికలో పొందుపరుచుము.

త్రిభుజం పేరు	కోణాల కొలతలు	మూడు కోణాల కొలతల మొత్తం
$\triangle ABC$	$m\angle A =$ $m\angle B =$ $m\angle C =$	$m\angle A + m\angle B + m\angle C =$
$\triangle PQR$	$m\angle P =$ $m\angle Q =$ $m\angle R =$	$m\angle P + m\angle Q + m\angle R =$
$\triangle XYZ$	$m\angle X =$ $m\angle Y =$ $m\angle Z =$	$m\angle X + m\angle Y + m\angle Z =$

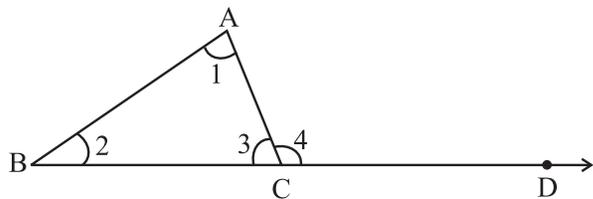
కోణాలను కొలిచేటప్పుడు కొలతలతో ఏర్పడే చిన్న చిన్న దోషాలను పరిగణనలోనికి తీసుకొంటే చివరి నిలువు వరుస ఎల్లప్పుడూ 180° (180° కు దగ్గరగా)ని ఇస్తుందని మీరు కనుగొంటారు.

పరిపూర్ణమైన ఖచ్చితత్వం సాధ్యమైనప్పుడు, త్రిభుజం యొక్క మూడు కోణాల మొత్తం 180° అని చూపబడుతుంది.

తార్కిక వాదన ద్వారా మీరు చెప్పే వాక్యానికి పద్ధతిని కలిగిన సమర్థన ఇవ్వడానికి సిద్ధం గా ఉన్నారు.

ప్రవచనం త్రిభుజం లోని మూడు కోణాల కొలతల మొత్తము 180° .

దీనిని నిరూపణకి మనం త్రిభుజం యొక్క బాహ్యకోణ ధర్మాన్ని ఉపయోగిద్దాం.



పటం 6.17

Given $\angle 1, \angle 2, \angle 3$ are angles of $\triangle ABC$ (Fig 6.17).
 $\angle 4$ is the exterior angle when BC is extended to D .

Justification $\angle 1 + \angle 2 = \angle 4$ (by exterior angle property)
 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \angle 4 + \angle 3$ (adding $\angle 3$ to both the sides)

But $\angle 4$ and $\angle 3$ form a linear pair so it is 180° . Therefore, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$.

Let us see how we can use this property in a number of ways.

EXAMPLE 2 In the given figure (Fig 6.18) find $m\angle P$.

SOLUTION By angle sum property of a triangle,

$$m\angle P + 47^\circ + 52^\circ = 180^\circ$$

$$\begin{aligned} \text{Therefore } m\angle P &= 180^\circ - 47^\circ - 52^\circ \\ &= 180^\circ - 99^\circ = 81^\circ \end{aligned}$$

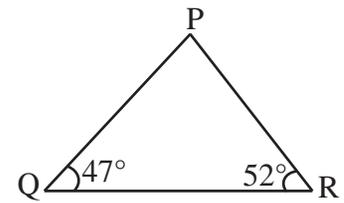
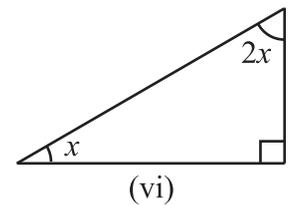
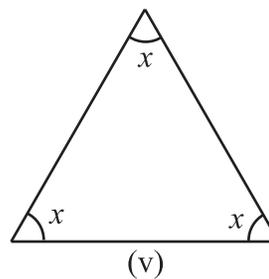
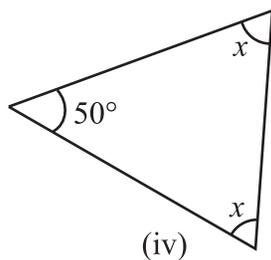
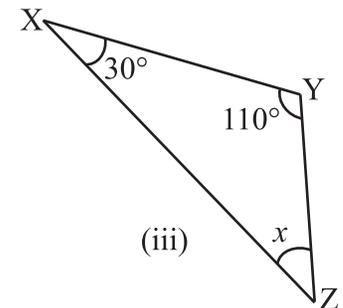
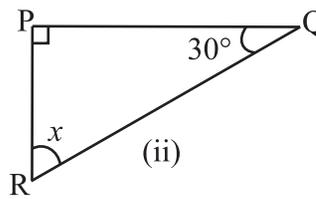
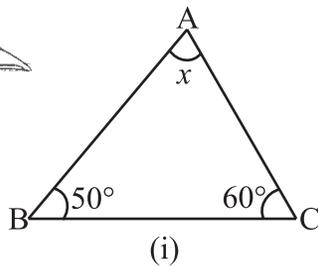


Fig 6.18

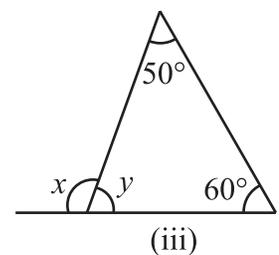
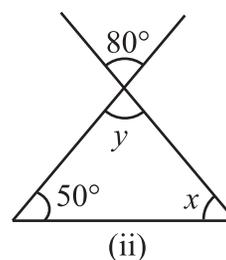
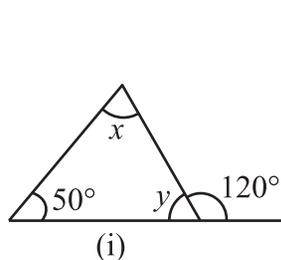
EXERCISE 6.3



1. Find the value of the unknown x in the following diagrams:



2. Find the values of the unknowns x and y in the following diagrams:



దత్తాశం: ΔABC యొక్క కోణాలు $\angle 1, \angle 2, \angle 3$ (పటం 6.17).
 BC భుజాన్ని D వరకు పొడిగించగా ఏర్పడిన బాహ్యకోణం $\angle 4$.
నిరూపణ : $\angle 1 + \angle 2 = \angle 4$ (బాహ్యకోణ ధర్మం ఆధారంగా)
 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \angle 4 + \angle 3$ (ఇరు వైపులా $\angle 3$ ను కలుపగా)

సమర్థన : $\angle 4$ మరియు $\angle 3$ లు రేఖీయ జతను ఏర్పరుస్తున్నాయి కావున ఇది 180° . అందువలన,
 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$. ఇప్పుడు ఈ ధర్మాన్ని ఎన్ని విధాలు గా ఉపయోగించువచ్చోచూద్దాం.

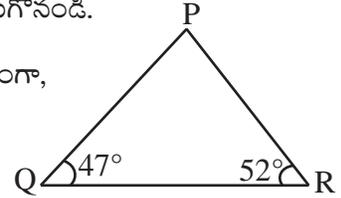
ఉదాహరణ 2 ఇవ్వబడిన పటం (పటం. 6.18) నుండి $m\angle P$ కనుగొనండి.

సాధన త్రిభుజంలోని మూడు కోణాల మొత్తం ధర్మం ఆధారంగా,

$$m\angle P + 47^\circ + 52^\circ = 180^\circ$$

అందువలన,

$$m\angle P = 180^\circ - 47^\circ - 52^\circ \\ = 180^\circ - 99^\circ = 81^\circ$$

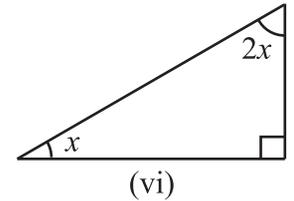
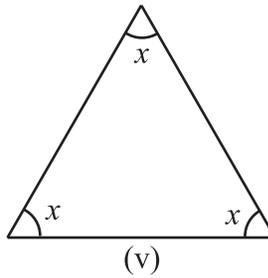
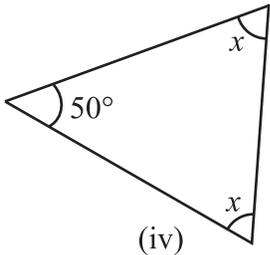
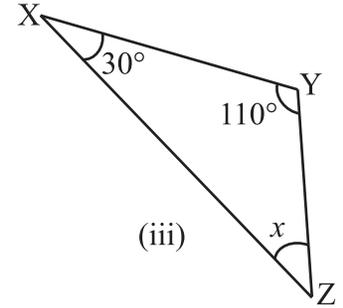
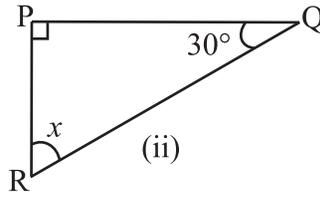
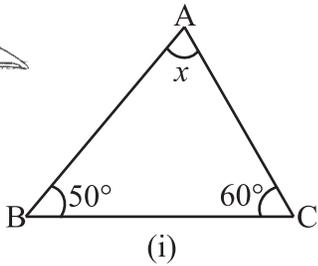


పటం 6.18

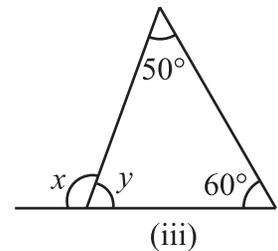
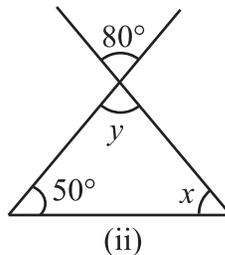
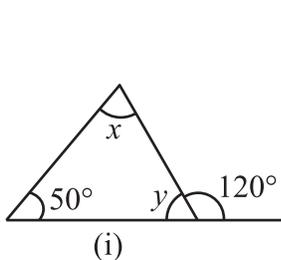
అభ్యాసం 6. 3

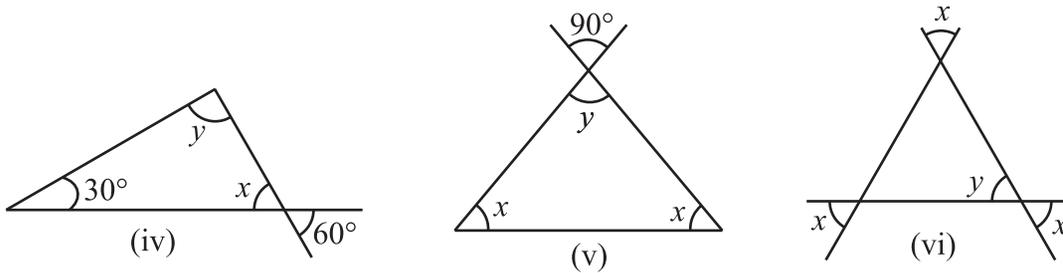


1. క్రింది పటాలలో తెలియని విలువ x ను కనుగొనండి



2. క్రింది పటాలలో తెలియని x మరియు y విలువలను కనుగొనండి:





TRY THESE

- Two angles of a triangle are 30° and 80° . Find the third angle.
- One of the angles of a triangle is 80° and the other two angles are equal. Find the measure of each of the equal angles.
- The three angles of a triangle are in the ratio 1 : 2 : 1. Find all the angles of the triangle. Classify the triangle in two different ways.



THINK, DISCUSS AND WRITE

- Can you have a triangle with two right angles?
- Can you have a triangle with two obtuse angles?
- Can you have a triangle with two acute angles?
- Can you have a triangle with all the three angles greater than 60° ?
- Can you have a triangle with all the three angles equal to 60° ?
- Can you have a triangle with all the three angles less than 60° ?



6.6 TWO SPECIAL TRIANGLES : EQUILATERAL AND ISOSCELES

A triangle in which all the three sides are of equal lengths is called an equilateral triangle.

Take two copies of an equilateral triangle ABC (Fig 6.19). Keep one of them fixed. Place the second triangle on it. It fits exactly into the first. Turn it round in any way and still they fit with one another exactly. Are you able to see that when the three sides of a triangle have equal lengths then the three angles are also of the same size?

We conclude that in an equilateral triangle:

- all sides have same length.
- each angle has measure 60° .

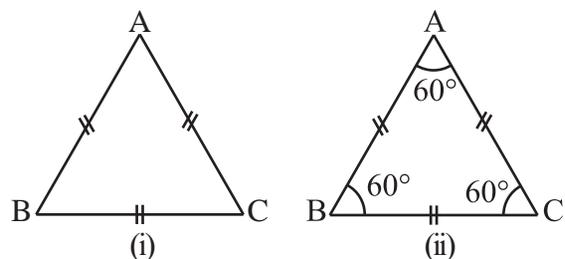
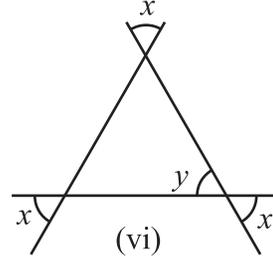
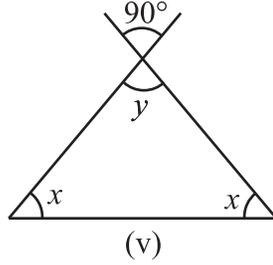
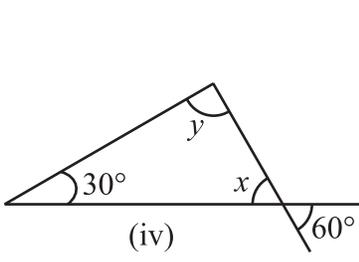


Fig 6.19



ప్రయత్నించండి

1. త్రిభుజం యొక్క రెండు కోణాలు 30° మరియు 80° . మూడవ కోణం కనుగొనండి.
2. త్రిభుజం యొక్క ఒక కోణం 80° మిగిలిన రెండు కోణాలు సమానం ప్రతి సమాన కోణం కొలతను కనుగొనండి.
3. త్రిభుజం యొక్క మూడుకోణాల నిష్పత్తి $1:2:1$ త్రిభుజం యొక్క అన్ని కోణాల విలువను కనుగొనండి. త్రిభుజాన్ని రెండు రకాలు గా వర్గీకరించండి .



ఆలోచించి, చర్చించి రాయండి

1. రెండు లంబ కోణాలను త్రిభుజం కల్గి ఉండగలదా?
2. రెండు అధిక కోణాలను త్రిభుజం కల్గి ఉండగలదా?
3. రెండు అల్ప కోణాలను త్రిభుజం కల్గి ఉండగలదా?
4. మూడుకోణాలు 60° కన్నా ఎక్కువ కలిగిన త్రిభుజం ఉండగలదా?
5. మూడుకోణాలు 60° కు సమానమైన త్రిభుజం ఉండగలదా?
6. మూడుకోణాలు 60° కన్నా తక్కువ కలిగిన త్రిభుజం ఉండగలదా?



6.6 రెండు ప్రత్యేక త్రిభుజాలు : సమబాహు మరియు సమద్విబాహు త్రిభుజాలు

ఒక త్రిభుజం యొక్క మూడు భుజాలు సమానం గా గల త్రిభుజాన్ని సమబాహు త్రిభుజం అంటారు.

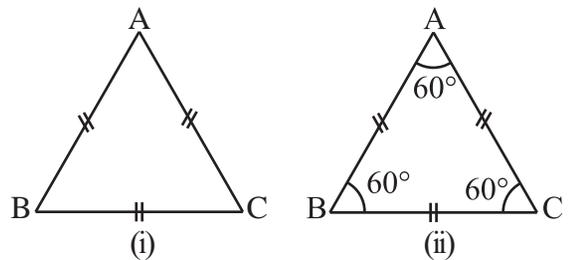
సమబాహు త్రిభుజం $\triangle ABC$ యొక్క (పటం 6.19) రెండు నకలు పటాలను తీసుకొనండి. ఇందులో ఒక దానిని స్థిరము గా ఉంచండి రెండవ త్రిభుజాన్ని దానిపై ఉంచండి. ఇది మొదటి దానిపై సరిగ్గా సరిపోతుంది.. వీటిని ఏ విధముగా నైనా తిప్పినా మరియు అవి ఒక దానితో ఒకటి సరిగ్గా సరిపోతాయి.

త్రిభుజం లో మూడు భుజాలు సమానం గా వున్నప్పుడు కోణాలు

కూడా సమానపరిమాణంలో ఉన్నాయని చూడగల్గు తున్నారా?

కావున సమబాహు త్రిభుజంలో:

- (i) అన్ని భుజాలు ఒకే పొడవును కల్గి ఉన్నాయి.
- (ii) ప్రతీ కోణం విలువ 60° అని నిర్ధారించవచ్చు.



పటం 6.19

A triangle in which two sides are of equal lengths is called an isosceles triangle.

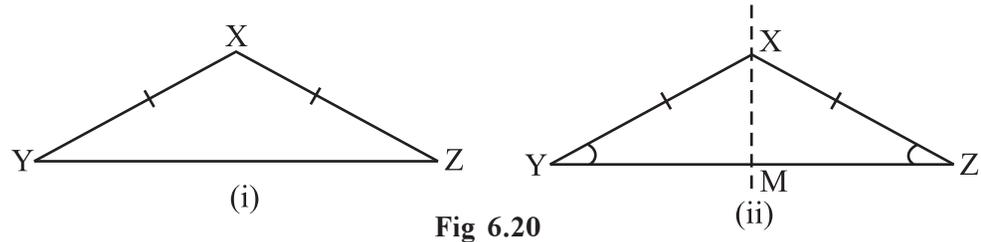


Fig 6.20

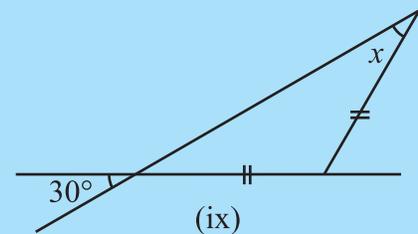
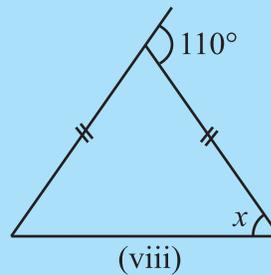
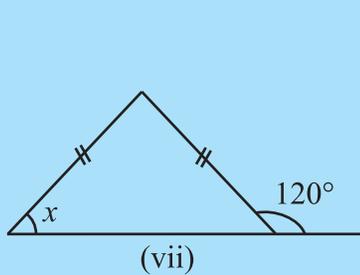
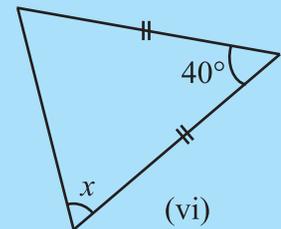
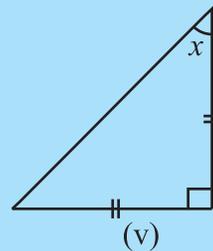
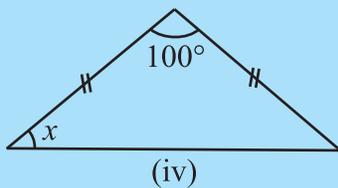
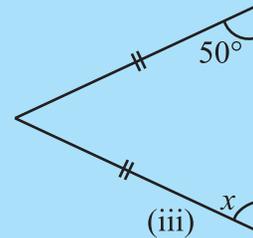
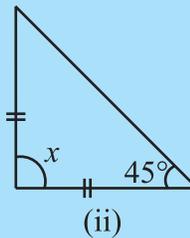
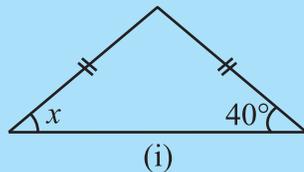
From a piece of paper cut out an isosceles triangle XYZ , with $XY=XZ$ (Fig 6.20). Fold it such that Z lies on Y . The line XM through X is now the axis of symmetry (which you will read in Chapter 14). You find that $\angle Y$ and $\angle Z$ fit on each other exactly. XY and XZ are called equal sides; YZ is called the base; $\angle Y$ and $\angle Z$ are called base angles and these are also equal.

Thus, in an isosceles triangle:

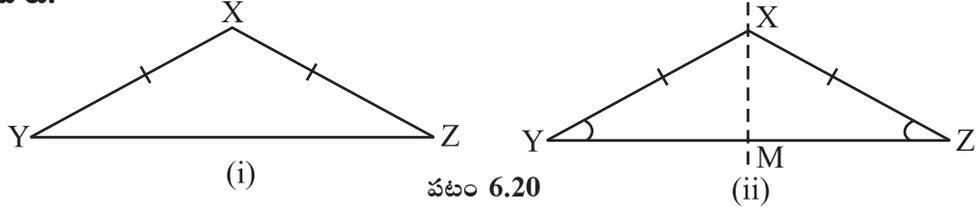
- (i) two sides have same length.
- (ii) base angles opposite to the equal sides are equal.

TRY THESE

1. Find angle x in each figure:



ఒక త్రిభుజం యొక్క రెండు భుజాలు సమాన కొలతలు కలిగి ఆ త్రిభుజాన్ని సమద్విభాహు త్రిభుజం అంటారు.



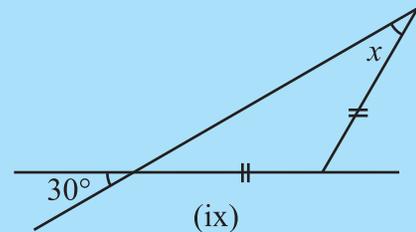
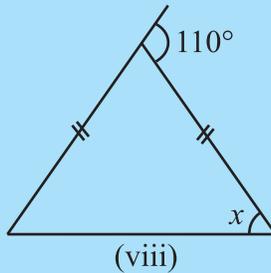
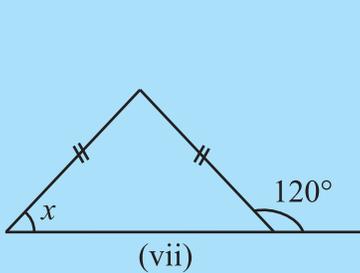
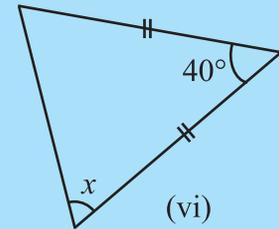
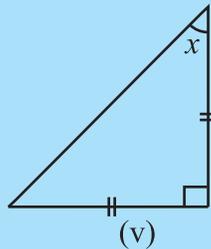
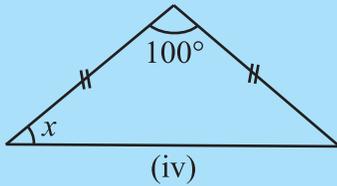
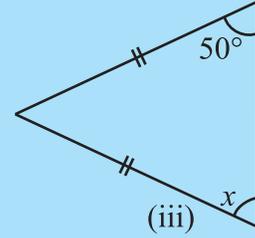
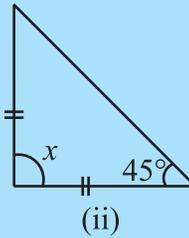
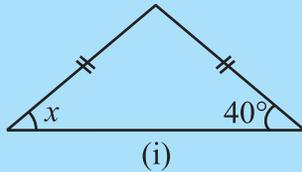
$XY=XZ$ (పటం 6.20) ఉండే విధముగా XYZ సమద్విభాహు త్రిభుజాన్ని కాగితం ముక్క నుండి కత్తిరించండి. Z, Y పై ఉండేలా మడవండి. X గుండా పోవు XM రేఖ ప్రస్తుతం సౌష్ఠవాక్షం (14వ అధ్యాయంలో దీనిని గురించి చదువుతారు). $\angle Y$ మరియు $\angle Z$ లు ఒక దానితో ఒకటి సరిగ్గా సరిపోతాయని మీరు కనుగొంటారు. XY మరియు XZ లు సమాన భుజాలు; YZ ను భూమి అంటారు. $\angle Y$ మరియు $\angle Z$ అనేవి భూకోణాలు మరియు ఇవి కూడా సమానం.

అందువల్ల సమద్విభాహు త్రిభుజం లో:

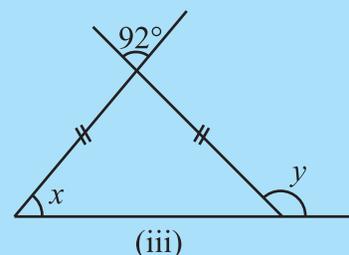
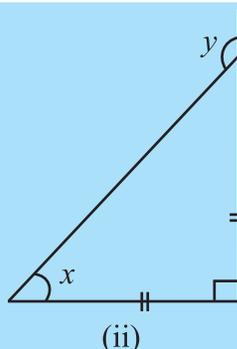
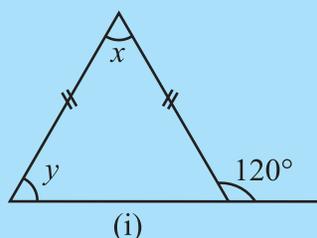
- (i) రెండు భుజాలు ఒకే పొడవును కలిగి ఉన్నాయి.
- (ii) సమాన భుజాలకు ఎదురుగా ఉండే భూకోణాలు సమానం.

ప్రయత్నించండి

1. ప్రతి పటం నుండి x విలువను కనుగొనండి:



2. Find angles x and y in each figure.



6.7 SUM OF THE LENGTHS OF TWO SIDES OF A TRIANGLE

1. Mark three non-collinear spots A, B and C in your playground. Using lime powder mark the paths AB, BC and AC.

Ask your friend to start from A and reach C, walking along one or more of these paths. She can, for example, walk first along \overline{AB} and then along \overline{BC} to reach C; or she can walk straight along \overline{AC} . She will naturally prefer the direct path AC. If she takes the other path (\overline{AB} and then \overline{BC}), she will have to walk more. In other words,

$$AB + BC > AC \quad (\text{i})$$

Similarly, if one were to start from B and go to A, he or she will not take the route \overline{BC} and \overline{CA} but will prefer \overline{BA} . This is because

$$BC + CA > AB \quad (\text{ii})$$

By a similar argument, you find that

$$CA + AB > BC \quad (\text{iii})$$

These observations suggest that **the sum of the lengths of any two sides of a triangle is greater than the third side.**

2. Collect fifteen small sticks (or strips) of different lengths, say, 6 cm, 7 cm, 8 cm, 9 cm, ..., 20 cm.

Take any three of these sticks and try to form a triangle. Repeat this by choosing different combinations of three sticks.

Suppose you first choose two sticks of length 6 cm and 12 cm. Your third stick has to be of length more than $12 - 6 = 6$ cm and less than $12 + 6 = 18$ cm. Try this and find out why it is so.

To form a triangle you will need any three sticks such that the sum of the lengths of any two of them will always be greater than the length of the third stick.

This also suggests that the sum of the lengths of any two sides of a triangle is greater than the third side.

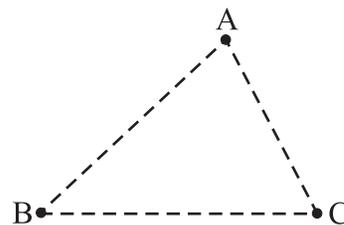
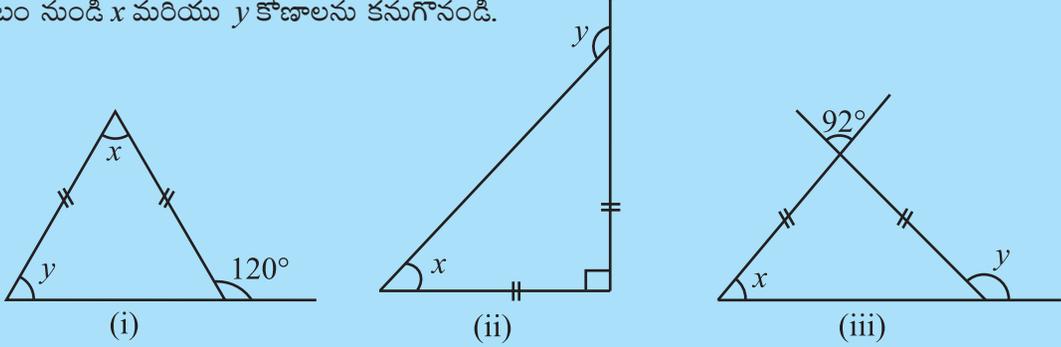


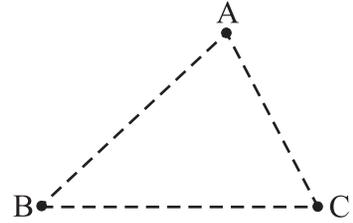
Fig 6.21

2. ప్రతి పటం నుండి x మరియు y కోణాలను కనుగొనండి.



6.7 త్రిభుజం యొక్క రెండు భుజాల పొడవుల మొత్తం

1. సరేఖీయములు కాని మూడు బిందువులు A, B మరియు Cలను మీ ఆటస్థలంలో గుర్తించండి. ముగ్గు పొడి సహాయం తో AB, BC మరియు AC మార్గాలను గీయండి. ఒకటి లేదా అంతకంటే ఎక్కువ ఈ మార్గాలలో నడవడం ద్వారా A, నుండి ప్రారంభించి Cని చేరుకోవడాని మీ స్నేహితురాలిని అడగండి. ఆమె, ఉదాహరణకు, C చేరుకోవడానికి మొదట \overline{AB} వెంట మరియు తర్వాత \overline{BC} వెంట నడవవచ్చు; లేదా ఆమె నేరుగా \overline{AC} వెంట నడవవచ్చు. ఆమె సహజంగా నేరుగా \overline{AC} మార్గాన్ని ఎంచుకొంటుంది. ఒక వేళ ఆమె వేరే మార్గాన్ని ఎంచుకొంటే (\overline{AB} మరియు తర్వాత \overline{BC}) ఆమె మరింత దూరం నడవవలసి ఉంటుంది. వేరొక విధముగా,



పటం. 6.21

$$AB + BC > AC \tag{i}$$

ఇదే విధముగా, ఒకరు B నుండి ప్రారంభించి A, కి వెళ్ళినట్లయితే అతను లేదా ఆమె \overline{BC} మరియు \overline{CA} మార్గాన్ని తీసుకోవడాని అయితే \overline{BA} ని ఎంచుకొంటారు. ఇది ఎందుకంటే

$$BC + CA > AB \tag{ii}$$

ఇదే వాదన ద్వారా, కొనుగొనేది

$$CA + AB > BC \tag{iii}$$

ఈ పరిశీలనల ద్వారా ఒక త్రిభుజం యొక్క ఏవైనా రెండు భుజాల పొడవుల మొత్తం మూడవ భుజం కంటే ఎక్కువని సూచిస్తాయి.

2. వేరు వేరు పొడవులు గల చిన్న కర్రలు(లేదా పట్టీలు) సేకరించండి. 6సెం.మీ, 7సెం.మీ, 8సెం.మీ, 9సెం.మీ, ..., 20సెం.మీ, అనుకొనుము.

వీటిలో ఏవైనా మూడు కర్రలను తీసుకొని త్రిభుజాన్ని ఏర్పరచడానికి ప్రయత్నించండి. మూడు కర్రల విభిన్న కలయికలను తీసుకొని దీనిని పునరావృతం చేయండి.

మీరు మొదట గా 6సెం.మీ, మరియు 12సెం.మీ, పొడవులు గల రెండు కర్రలను తీసుకొన్నారని అనుకొందాము. మీ మూడవ కర్ర పొడవు $12 - 6 = 6$ సెం.మీ కంటే ఎక్కువ మరియు $2 + 6 = 18$ సెం.మీ కంటే తక్కువ ఉండాలి. దీన్ని ప్రయత్నించండి మరియు ఇది ఎందుకు అలా ఊందో కనుక్కోండి.

ఒక త్రిభుజాన్ని ఏర్పరచడానికి మీకు ఏవైనా మూడు కర్రలు అవసరం, వాటిలో ఏవైనా రెండు పొడవుల మొత్తం ఎల్లప్పుడూ మూడవ కర్ర పొడవు కంటే ఎక్కువగా ఉంటుంది.

త్రిభుజంలోని ఏవైనా రెండు భుజాల పొడవుల మొత్తం మూడవ భుజం కంటే ఎక్కువగా ఉంటుందని కూడా ఇది సూచిస్తుంది.

3. Draw any three triangles, say $\triangle ABC$, $\triangle PQR$ and $\triangle XYZ$ in your notebook (Fig 6.22).

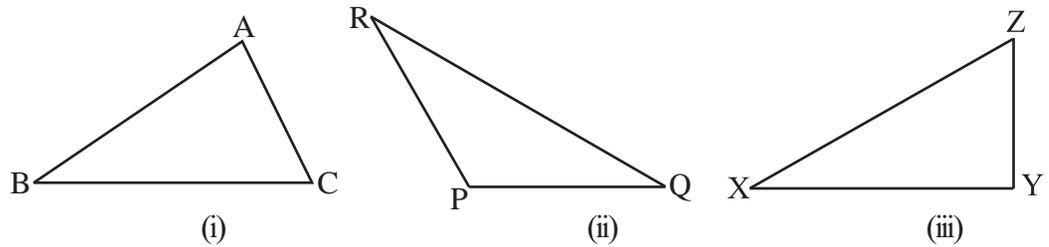


Fig 6.22

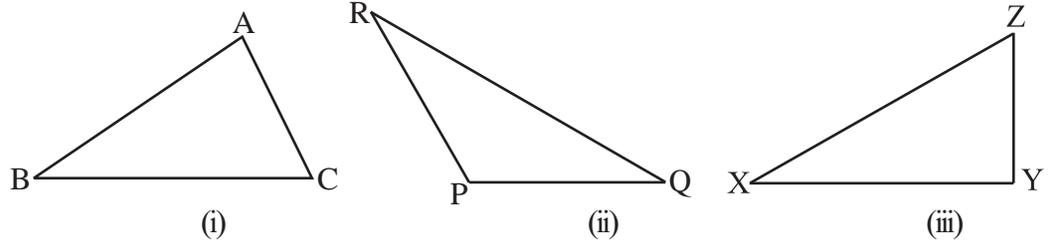
Use your ruler to find the lengths of their sides and then tabulate your results as follows:

Name of Δ	Lengths of Sides	Is this True?	
ΔABC	AB ___	$AB - BC < CA$ ___ + ___ > ___	(Yes/No)
	BC ___	$BC - CA < AB$ ___ + ___ > ___	(Yes/No)
	CA ___	$CA - AB < BC$ ___ + ___ > ___	(Yes/No)
ΔPQR	PQ ___	$PQ - QR < RP$ ___ + ___ > ___	(Yes/No)
	QR ___	$QR - RP < PQ$ ___ + ___ > ___	(Yes/No)
	RP ___	$RP - PQ < QR$ ___ + ___ > ___	(Yes/No)
ΔXYZ	XY ___	$XY - YZ < ZX$ ___ + ___ > ___	(Yes/No)
	YZ ___	$YZ - ZX < XY$ ___ + ___ > ___	(Yes/No)
	ZX ___	$ZX - XY < YZ$ ___ + ___ > ___	(Yes/No)

This also strengthens our earlier guess. Therefore, we conclude that **sum of the lengths of any two sides of a triangle is greater than the length of the third side.**

We also find that the difference between the length of any two sides of a triangle is smaller than the length of the third side.

3. మీ నోట్ పుస్తకములో ఏవైనా మూడు త్రిభుజాలు గీయుము. ΔABC , ΔPQR మరియు ΔXYZ అనుకొనుము. (పటం 6.22).



పటం. 6.22

వాటి భుజాల పొడవులు కనుగొనడానికి మీ స్కేలును ఉపయోగించండి మరియు మీ ఫలితాలను చూపిన విధంగా పట్టికలో పొందుపరచండి:

త్రిభుజం	భుజాల పొడవులు	ఇది నిజమేనా?	
ΔABC	AB ___	$AB - BC < CA$ ___ + ___ > ___	(అవును/కాదు)
	BC ___	$BC - CA < AB$ ___ + ___ > ___	(అవును/కాదు)
	CA ___	$CA - AB < BC$ ___ + ___ > ___	(అవును/కాదు)
ΔPQR	PQ ___	$PQ - QR < RP$ ___ + ___ > ___	(అవును/కాదు)
	QR ___	$QR - RP < PQ$ ___ + ___ > ___	(అవును/కాదు)
	RP ___	$RP - PQ < QR$ ___ + ___ > ___	(అవును/కాదు)
ΔXYZ	XY ___	$XY - YZ < ZX$ ___ + ___ > ___	(అవును/కాదు)
	YZ ___	$YZ - ZX < XY$ ___ + ___ > ___	(అవును/కాదు)
	ZX ___	$ZX - XY < YZ$ ___ + ___ > ___	(అవును/కాదు)

గతం లో మనం ఊహించిన విషయాలకు ఇది కూడా బలం చేకూరుస్తుంది అందువలన ఒక త్రిభుజం యొక్క ఏవైనా రెండు భుజాల పొడవుల మొత్తం మూడవ భుజం పొడవు కంటే ఎక్కువని మనం నిర్ధారించవచ్చు.

అదే విధముగా ఒక త్రిభుజం యొక్క ఏవైనా రెండు భుజాల పొడవుల భేదం మూడవ భుజం యొక్క పొడవు కంటే తక్కువని కూడా మనం కనుగొంటాము.

EXAMPLE 3 Is there a triangle whose sides have lengths 10.2 cm, 5.8 cm and 4.5 cm?

SOLUTION Suppose such a triangle is possible. Then the sum of the lengths of any two sides would be greater than the length of the third side. Let us check this.

$$\text{Is } 4.5 + 5.8 > 10.2? \quad \text{Yes}$$

$$\text{Is } 5.8 + 10.2 > 4.5? \quad \text{Yes}$$

$$\text{Is } 10.2 + 4.5 > 5.8? \quad \text{Yes}$$

Therefore, the triangle is possible.

EXAMPLE 4 The lengths of two sides of a triangle are 6 cm and 8 cm. Between which two numbers can length of the third side fall?

SOLUTION We know that the sum of two sides of a triangle is always greater than the third.

Therefore, third side has to be less than the sum of the two sides. The third side is thus, less than $8 + 6 = 14$ cm.

The side cannot be less than the difference of the two sides. Thus, the third side has to be more than $8 - 6 = 2$ cm.

The length of the third side could be any length greater than 2 and less than 14 cm.

EXERCISE 6.4

1. Is it possible to have a triangle with the following sides?

(i) 2 cm, 3 cm, 5 cm

(ii) 3 cm, 6 cm, 7 cm

(iii) 6 cm, 3 cm, 2 cm

2. Take any point O in the interior of a triangle PQR. Is

(i) $OP + OQ > PQ$?

(ii) $OQ + OR > QR$?

(iii) $OR + OP > RP$?

3. AM is a median of a triangle ABC.

Is $AB + BC + CA > 2 AM$?

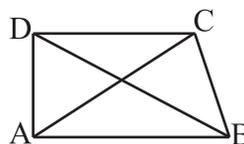
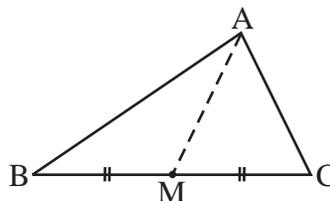
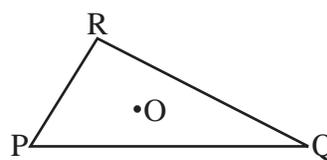
(Consider the sides of triangles $\triangle ABM$ and $\triangle AMC$.)

4. ABCD is a quadrilateral.

Is $AB + BC + CD + DA > AC + BD$?

5. ABCD is quadrilateral. Is

$AB + BC + CD + DA < 2 (AC + BD)$?



ఉదాహరణ 3 భుజాల పొడవులు 10.2సెం.మీ, 5.8సెం.మీ మరియు 4.5సెం.మీ గా గల త్రిభుజం ఉంటుందా?

సాధన

ఒక వేళ త్రిభుజం సాధ్యమని అనుకోండి. అప్పుడు ఏవైనా రెండు భుజాల పొడవుల మొత్తము మూడవ భుజం పొడవు కంటే ఎక్కువగా ఉంటుంది.

$$4.5 + 5.8 > 10.2 \text{ అవుతుందా? అవును}$$

$$5.8 + 10.2 > 4.5 \text{ అవుతుందా? అవును}$$

$$10.2 + 4.5 > 5.8 \text{ అవుతుందా? అవును}$$

అందువలన త్రిభుజం ఏర్పడుతుంది.

ఉదాహరణ 4 ఒక త్రిభుజం యొక్క రెండు భుజాల పొడవులు 6సెం.మీ మరియు 8సెం.మీ మూడవ భుజం యొక్క పొడవు ఏ రెండు సంఖ్యల మధ్య ఉంటుందో చెప్పండి?

సాధన

ఒక త్రిభుజం లో రెండు భుజాల పొడవుల మొత్తము ఎల్లప్పుడూ మూడవ భుజం కంటే ఎక్కువ అని మనకు తెలుసు.

అందువలన మూడవ భుజం మిగిలిన రెండు భుజాల పొడవుల మొత్తానికి కన్నా తక్కువ. ఈ విధంగా మూడవ భుజం $8 + 6 = 14$ సెం.మీ. కన్నా తక్కువగా ఉండాలి.

రెండు భుజాల భేదం కన్నా మూడవ భుజం పొడవు తక్కువగా ఉండకూడదు. ఈ విధముగా మూడవ భుజం $8 - 6 = 2$ సెం.మీ కన్నా ఎక్కువగా ఉండాలి.

మూడవ భుజం యొక్క పొడవు 2సెం.మీ కన్నా ఎక్కువ మరియు 14సెం.మీ కన్నా తక్కువగా ఉంటుంది.

అభ్యాసం 6.4

1. కింది భుజాలతో త్రిభుజం ఏర్పరచడం సాధ్యమేనా?

(i) 2 సెం.మీ., 3 సెం.మీ., 5 సెం.మీ.

(ii) 3 సెం.మీ., 6 సెం.మీ., 7 సెం.మీ.

(iii) 6 సెం.మీ., 3 సెం.మీ., 2 సెం.మీ.

2. త్రిభుజం PQR యొక్క అంతరంలో ఏదైనా బిందువు O ను తీసుకొనుము

(i) $OP + OQ > PQ$ అవుతుందా ?

(ii) $OQ + OR > QR$ అవుతుందా ?

(iii) $OR + OP > RP$ అవుతుందా ?

3. ABC త్రిభుజం యొక్క మధ్య గతరేఖ AM .

$AB + BC + CA > 2 AM$ అవుతుందా ?

(ΔABM మరియు ΔAMC త్రిభుజాలను పరిగణించండి)

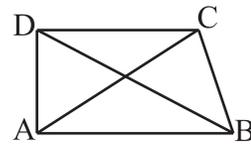
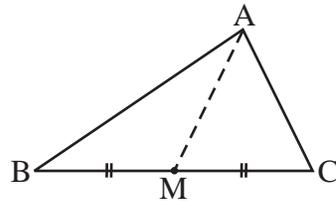
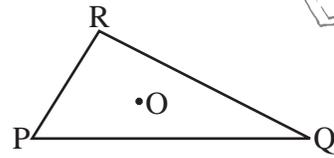
4. ABCD ఒకచతుర్భుజం

$AB + BC + CD + DA > AC + BD$ అవుతుందా ?

5. ABCD ఒకచతుర్భుజం

$AB + BC + CD + DA < 2 (AC + BD)$

అవుతుందా ?



6. The lengths of two sides of a triangle are 12 cm and 15 cm. Between what two measures should the length of the third side fall?

THINK, DISCUSS AND WRITE

1. Is the sum of any two angles of a triangle always greater than the third angle?



6.8 RIGHT-ANGLED TRIANGLES AND PYTHAGORAS PROPERTY

Pythagoras, a Greek philosopher of sixth century B.C. is said to have found a very important and useful property of right-angled triangles given in this section. The property is, hence, named after him. In fact, this property was known to people of many other countries too. The Indian mathematician Baudhayan has also given an equivalent form of this property. We now try to explain the Pythagoras property.

In a right-angled triangle, the sides have some special names. The side opposite to the right angle is called the **hypotenuse**; the other two sides are known as the **legs** of the right-angled triangle.

In $\triangle ABC$ (Fig 6.23), the right-angle is at B. So, \overline{AC} is the hypotenuse. \overline{AB} and \overline{BC} are the legs of $\triangle ABC$.

Make eight identical copies of right angled triangle of any size you prefer. For example, you make a right-angled triangle whose hypotenuse is a units long and the legs are of lengths b units and c units (Fig 6.24).

Draw two identical squares on a sheet with sides of lengths $b + c$.

You are to place four triangles in one square and the remaining four triangles in the other square, as shown in the following diagram (Fig 6.25).

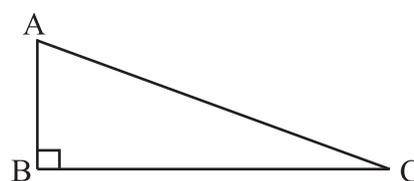


Fig 6.23

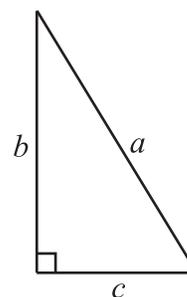
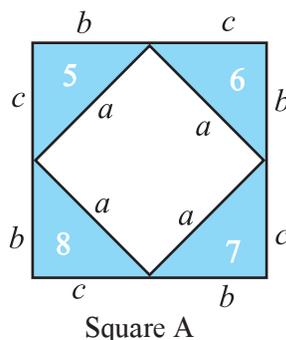
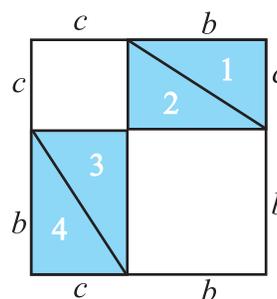


Fig 6.24



Square A



Square B

Fig 6.25

6. ఒక త్రిభుజం యొక్క రెండు భుజాల పొడవులు 12 సెం. మీ మరియు 15 సెం. మీ. ఏ రెండు కొలతల మధ్య మూడవ భుజం కొలత ఉంటుంది?

ఆలోచించి, చర్చించి రాయండి



1. ఒక త్రిభుజం యొక్క ఏ రెండు కోణాల మొత్తమైనా ఎల్లప్పుడూ మూడవ కోణం కంటే ఎక్కువ ఉంటుందా?

6.8 లంబ కోణ త్రిభుజాలు మరియు పైథాగరస్ ధర్మము

పైథాగరస్, క్రీ.పూ 6 వ శతాబ్దానికి చెందిన గ్రీకు తత్వవేత్త. ఈ విభాగము లో ఇవ్వబడిన లంబకోణ త్రిభుజం యొక్క చాలా ముఖ్యమైన మరియు ఉపయోగకరమైన ధర్మాన్ని కనుగొన్నాడు. అందువల్ల ఈ ధర్మానికి తరువాత అతని పేరు పెట్టారు. నిజానికి, ఈ ధర్మం అనేక ఇతర దేశాల ప్రజలకు కూడా తెలుసు. భారతీయ గణిత శాస్త్రజ్ఞులకు బౌద్ధాయనడు కూడా ఈ ధర్మం యొక్క సమాన రూపాన్ని ఇవ్వడం జరిగింది. ఇప్పుడు పైథాగరస్ ధర్మాన్ని వివరించే ప్రయత్నం చేద్దాం.

లంబ కోణ త్రిభుజంలో భుజాలకు కొన్ని ప్రత్యేకమైన పేర్లు ఉన్నాయి. లంబ కోణానికి ఎదురుగా నున్న భుజాన్ని **కర్ణము** అని అంటారు. మిగిలిన రెండు భుజాలను **లంబ కోణం కలిగిన భుజాలు** అని అంటారు.

ΔABC లో (పటం 6.23), లో లంబ కోణం B వద్ద కలదు. కావున, AC అనేది కర్ణము. \overline{AB} మరియు \overline{BC} లు ΔABC కు లంబ పాదాలు..

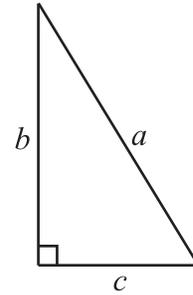
నీకు నచ్చిన ఏ పరిమాణం లో నైనా ఉన్న ఎనిమిది లంబ కోణ త్రిభుజాలను తయారుచేయుము. ఉదాహరణకు కర్ణము పొడవు a యునిట్లు మరియు మిగిలిన రెండు పాదాల పొడవులు b యునిట్లు మరియు c యునిట్లు (పటం 6.24) ఉన్న లంబకోణ త్రిభుజాన్ని తయారు చేయుము.

$b + c$ భుజాల పొడవులు గా గల ఒకే రకమైన రెండు చతురస్రాలను ఒక షీట్ పై గీయండి.

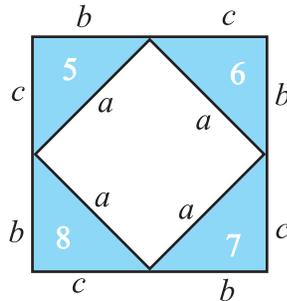
ఒక చతురస్రం లో 4 త్రిభుజాలను మరియు మిగిలిన నాలుగు త్రిభుజాలను రెండవ చతురస్రంలో కింది పటంలో చూపినట్లు అమర్చండి. (పటం 6.25).



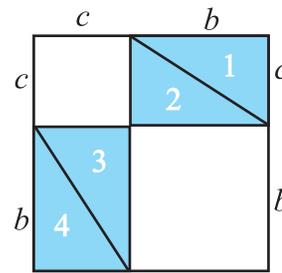
పటం. 6.23



పటం 6.24



చతురస్రం A



చతురస్రం B

పటం 6.25

The squares are identical; the eight triangles inserted are also identical.

Hence the uncovered area of square A = Uncovered area of square B.

i.e., Area of inner square of square A = The total area of two uncovered squares in square B.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

This is Pythagoras property. It may be stated as follows:

In a right-angled triangle,
the square on the hypotenuse = sum of the squares on the legs.

Pythagoras property is a very useful tool in mathematics. It is formally proved as a theorem in later classes. You should be clear about its meaning.

It says that for any right-angled triangle, the area of the square on the hypotenuse is equal to the sum of the areas of the squares on the legs.

Draw a right triangle, preferably on a square sheet, construct squares on its sides, compute the area of these squares and verify the theorem practically (Fig 6.26).

If you have a right-angled triangle, the Pythagoras property holds. If the Pythagoras property holds for some triangle, will the triangle be right-angled? (Such problems are known as converse problems). We will try to answer this. Now, we will show that, if there is a triangle such that sum of the squares on two of its sides is equal to the square of the third side, it must be a right-angled triangle.

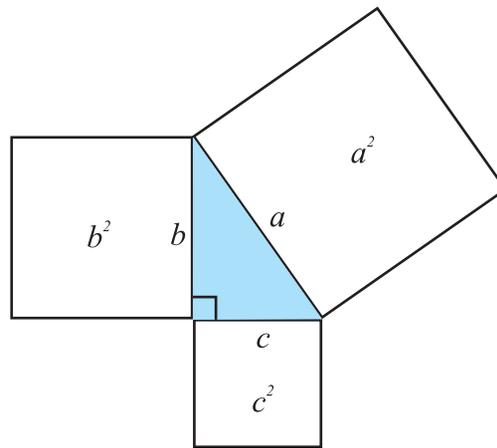
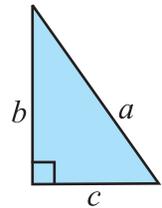


Fig 6.26

Do This



1. Have cut-outs of squares with sides 4 cm, 5 cm, 6 cm long. Arrange to get a triangular shape by placing the corners of the squares suitably as shown in the figure (Fig 6.27). Trace out the triangle formed. Measure each angle of the triangle. You find that there is no right angle at all.

In fact, in this case each angle will be acute! Note that $4^2 + 5^2 \neq 6^2$, $5^2 + 6^2 \neq 4^2$ and $6^2 + 4^2 \neq 5^2$.

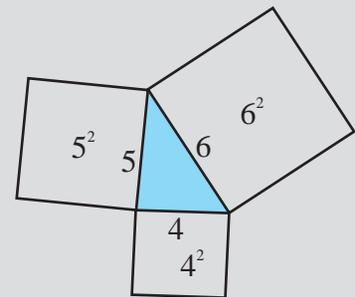


Fig 6.27

చతురస్రాలు ఒకే రకమైనవి; చొప్పించిన 8 త్రిభుజాలు కూడా ఒకే రకమైనవి. అందువలన కప్పబడని చతురస్రం A వైశాల్యం = కప్పబడని చతురస్రం B వైశాల్యం. అంటే అంతరంలో ఉన్న చతురస్రం A వైశాల్యం = చతురస్రం Bలో కప్పబడని రెండు చతురస్రాల వైశాల్యాలు మొత్తము.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

ఇదే పైథాగరస్ ధర్మం. దీనిని కింది విధముగా పేర్కొనవచ్చు:

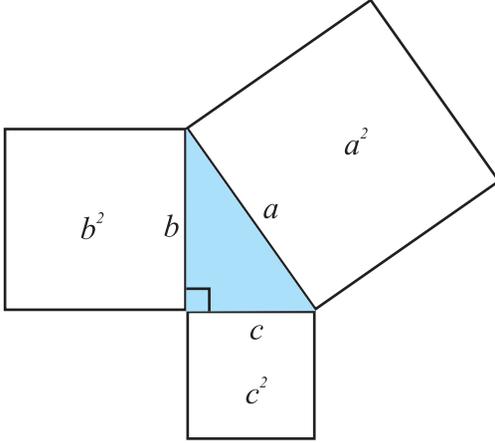
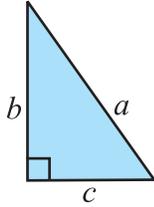
లంబకోణ త్రిభుజంలో,
కర్ణము మీది వర్ణము = రెండు లంబ కోణం కలిగిన భుజాల వర్గాల మొత్తం.

గణితంలో పైథాగరస్ ధర్మం చాలా ఉపయోగకరమైన సాధనం. తరువాతి తరగతులలో ఇది సిద్ధాంతంగా నిరూపించబడినది. మీరు దీని అర్థం గురించి స్పష్టంగా ఉండాలి.

ఏదైనా లంబకోణ త్రిభుజానికి, కర్ణం మీద చతురస్రం వైశాల్యం లంబ భుజాలపై ఉన్న చతురస్రాల వైశాల్యాల మొత్తానికి సమానం అని చెబుతుంది.

ఒక లంబకోణ త్రిభుజాన్ని గీయండి. ప్రధానంగా ఒక చతురస్రాకార షీట్ పై, వీటి భుజాలపై చతురస్రాలను నిర్మించండి. ఈ చతురస్రాల వైశాల్యాన్ని గణించండి. మరియు సిద్ధాంతాన్ని ఆచరణాత్మకంగా ధృవీకరించండి (పటం 6.26).

మీ వద్ద లంబకోణ త్రిభుజం ఉంటే, పైథాగరస్ ధర్మం వర్తిస్తుంది. ఏదైనా ఒక త్రిభుజం పైథాగరస్ ధర్మం కలిగి ఉంటే ఆ త్రిభుజం లంబకోణ త్రిభుజం అవుతుందా? (ఇటువంటి సమస్యలను విపర్యయ సమస్యలు అంటారు). మనము దీనికి సమాధానం ఇవ్వడానికి ప్రయత్నిద్దాము. ఒక వేళ రెండు భుజాల వర్గాల మొత్తము మూడవ భుజం మీది వర్గానికి సమానం అయ్యే విధముగా ఒక త్రిభుజం ఉంటే, అది ఖచ్చితం గా లంబ కోణ త్రిభుజం అని ఇప్పుడు మనం చూపుదాము.

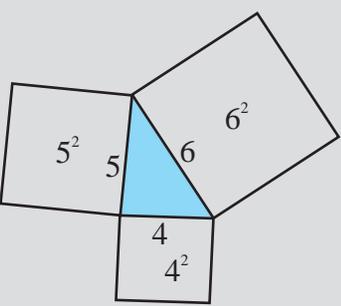


పటం 6.26

ఇవి చేయండి



1. 4 సెం.మీ, 5 సెం.మీ, 6 సెం.మీ పొడవులను కలిగిన చతురస్రాలు కత్తిరించబడినవి. పటంలో చూపినట్లు చతురస్ర భుజాల మూలలను తగిన విధముగా కలుపుతూ ఒక త్రిభుజాన్ని ఏర్పరుచుము (పటం 6.27). ఏర్పడిన త్రిభుజాన్ని ట్రేస్ చేయండి. త్రిభుజం లో ప్రతి కోణం విలువను కనుగొనుము. ఎటువంటి లంబకోణం కనుగొనబడలేదని మీరు కనుగొంటారు. ఈ సందర్భం లో ప్రతి కోణం అల్ప కోణం! నిజానికి $4^2 + 5^2 \neq 6^2$, $5^2 + 6^2 \neq 4^2$ మరియు $6^2 + 4^2 \neq 5^2$ లను గమనించండి.



పటం 6.27

2. Repeat the above activity with squares whose sides have lengths 4 cm, 5 cm and 7 cm. You get an obtuse-angled triangle! Note that

$$4^2 + 5^2 \neq 7^2 \text{ etc.}$$

This shows that Pythagoras property holds if and only if the triangle is right-angled. Hence we get this fact:

If the Pythagoras property holds, the triangle must be right-angled.

EXAMPLE 5 Determine whether the triangle whose lengths of sides are 3 cm, 4 cm, 5 cm is a right-angled triangle.

SOLUTION $3^2 = 3 \times 3 = 9$; $4^2 = 4 \times 4 = 16$; $5^2 = 5 \times 5 = 25$

We find $3^2 + 4^2 = 5^2$.

Therefore, the triangle is right-angled.

Note: In any right-angled triangle, the hypotenuse happens to be the longest side. In this example, the side with length 5 cm is the hypotenuse.

EXAMPLE 6 $\triangle ABC$ is right-angled at C. If $AC = 5$ cm and $BC = 12$ cm find the length of AB.

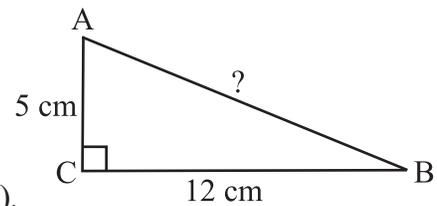


Fig 6.28

SOLUTION A rough figure will help us (Fig 6.28).

By Pythagoras property,

$$\begin{aligned} AB^2 &= AC^2 + BC^2 \\ &= 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2 \end{aligned}$$

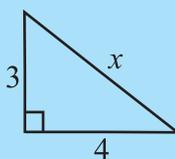
or $AB^2 = 13^2$. So, $AB = 13$

or the length of AB is 13 cm.

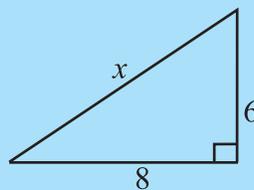
Note: To identify perfect squares, you may use prime factorisation technique.

TRY THESE

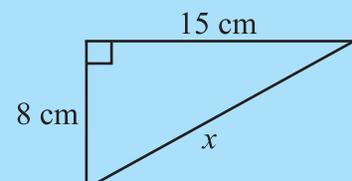
Find the unknown length x in the following figures (Fig 6.29):



(i)



(ii)



(iii)

2. పై కృత్యమును మరలా 4 సెం.మీ, 5 సెం.మీ మరియు 7 సెం.మీ భుజాల కొలతలు గల చతురస్రాలతో పునరావృతం చేయుము. నీవు అధిక కోణ త్రిభుజాన్ని పొందుతావు! అని గమనించండి.
 $4^2 + 5^2 \neq 7^2$ మొదలుగునవి.

కావున పైథాగరస్ ధర్మం అనేది లంబకోణ త్రిభుజం అయినప్పుడూ మాత్రమే వర్తిస్తుంది అని తెలుస్తున్నది. అందువలన మనం ఈ వాస్తవాన్ని పొందుతాం:

పైథాగరస్ ధర్మం వర్తించినట్లైతే, ఆ త్రిభుజం ఖచ్చితంగా లంబకోణ త్రిభుజం.

ఉదాహరణ 5 ఒక త్రిభుజ భుజాల కొలతలు 3సెం.మీ, 4సెం.మీ, 5సెం.మీ అయితే ఆ త్రిభుజం లంబకోణ త్రిభుజమా తెల్పండి.

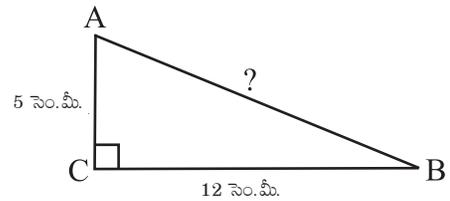
సాధన $3^2 = 3 \times 3 = 9$; $4^2 = 4 \times 4 = 16$; $5^2 = 5 \times 5 = 25$
 $3^2 + 4^2 = 5^2$ అని మనం కనుగొంటాము.

అందువలన, ఆ త్రిభుజం లంబకోణాన్ని కలిగి ఉంటుంది..

సూచన: ఏ లంబ కోణ త్రిభుజంలో నైనా కర్ణము పొడవైన భుజమై ఉంటుంది. ఈ ఉదాహరణ లో కర్ణము 5 సెం.మీ. పొడవు కలిగిన భుజము.

ఉదాహరణ 6 ΔABC త్రిభుజంలో C వద్ద లంబకోణం కలిగిఉంది. $AC = 5$ సెం.మీ మరియు $BC = 12$ సెం.మీ AB భుజం యొక్క పొడవు ఎంత ?.

సాధన ఒకచిత్తు పటం (పటం 6..28) మనకు సహాయం చేస్తుంది.



పైథాగరస్ ధర్మం నుండి,

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$= 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$$

పటం. 6.28

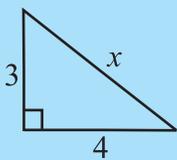
లేదా $AB^2 = 13^2$. కాబట్టి, $AB = 13$

AB భుజం యొక్క పొడవు 13 సెం.మీ.

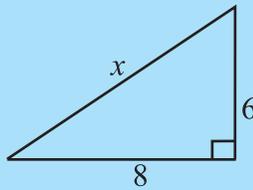
గమనిక: ప్రధాన కారణాంకాల పద్ధతిని ఉపయోగించి ఖచ్చిత వర్గాలను మీరు గుర్తించ వచ్చు.

క్రింది పటాలలో తెలియని పొడవు x ను కనుగొనుము(పటం6.29):

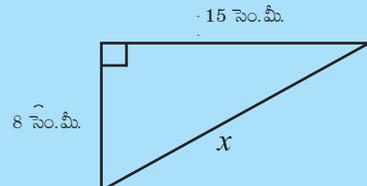
ప్రయత్నించండి



(i)



(ii)



(iii)

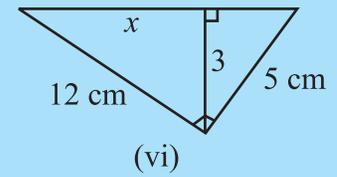
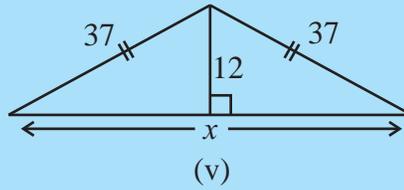
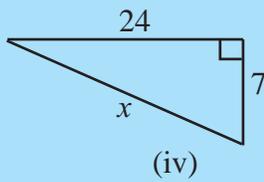


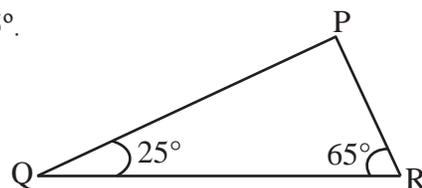
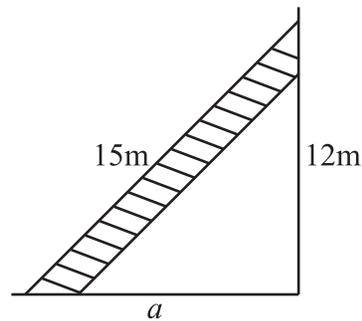
Fig 6.29

EXERCISE 6.5

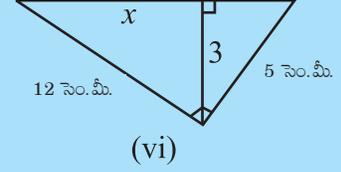
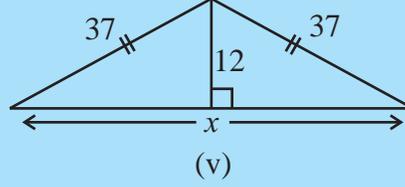
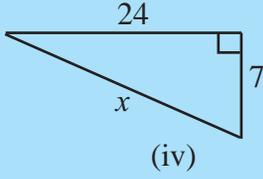
1. PQR is a triangle, right-angled at P. If $PQ = 10$ cm and $PR = 24$ cm, find QR.
2. ABC is a triangle, right-angled at C. If $AB = 25$ cm and $AC = 7$ cm, find BC.
3. A 15 m long ladder reached a window 12 m high from the ground on placing it against a wall at a distance a . Find the distance of the foot of the ladder from the wall.
4. Which of the following can be the sides of a right triangle?
 - (i) 2.5 cm, 6.5 cm, 6 cm.
 - (ii) 2 cm, 2 cm, 5 cm.
 - (iii) 1.5 cm, 2 cm, 2.5 cm.

In the case of right-angled triangles, identify the right angles.

5. A tree is broken at a height of 5 m from the ground and its top touches the ground at a distance of 12 m from the base of the tree. Find the original height of the tree.
6. Angles Q and R of a $\triangle PQR$ are 25° and 65° . Write which of the following is true:
 - (i) $PQ^2 + QR^2 = RP^2$
 - (ii) $PQ^2 + RP^2 = QR^2$
 - (iii) $RP^2 + QR^2 = PQ^2$



7. Find the perimeter of the rectangle whose length is 40 cm and a diagonal is 41 cm.
8. The diagonals of a rhombus measure 16 cm and 30 cm. Find its perimeter.

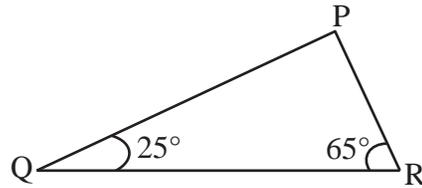
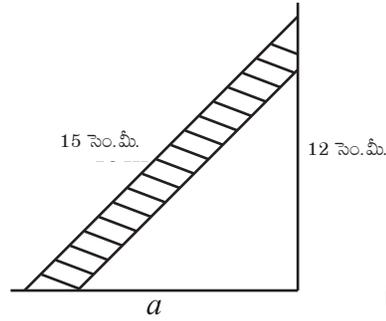


పటం. 6.29

అభ్యాసం 6. 5

1. PQR త్రిభుజం P వద్ద లంబ కోణం కలిగి ఉంది. $PQ = 10$ సెం.మీ మరియు $PR = 24$ సెం.మీ అయితే QR విలువ కనుగొనుము?
2. ABC త్రిభుజము C వద్ద లంబ కోణము కలిగి ఉంది. $AB = 25$ సెం.మీ మరియు $AC = 7$ సెం.మీ అయితే BC కనుగొనుము.
3. 15 మీ. పొడవు గల నిచ్చెన, గోడ మీద 12 మీ. ఎత్తులో ఉన్న కిటికీని చేరుకొంది. గోడ నుండి నిచ్చెన పాదానికి మధ్య గల దూరం a కనుగొనుము?
4. క్రింది వానిలో ఏవి లంబకోణ త్రిభుజ భుజాలు?
 - (i) 2.5 సెం.మీ., 6.5 సెం.మీ., 6 సెం.మీ.
 - (ii) 2 సెం.మీ., 2 సెం.మీ., 5 సెం.మీ.
 - (iii) 1.5 సెం.మీ., 2 సెం.మీ., 2.5 సెం.మీ.

లంబకోణ త్రిభుజాల విషయంలో, లంబకోణాలను గుర్తించండి.
5. నేల నుండి 5 మీ. ఎత్తులో విరిగి పోయిన ఒక చెట్టు కొన భాగం చెట్టు మొదలు నుండి 12 మీ. దూరం లో భూమిని తాకినది. అయిన చెట్టు యొక్క వాస్తవ ఎత్తును కనుగొనండి.
6. ΔPQR యొక్క కోణాలు Q మరియు R విలువలు 25° మరియు 65° . క్రింది వానిలో ఏది నిజమో వ్రాయండి:
 - (i) $PQ^2 + QR^2 = RP^2$
 - (ii) $PQ^2 + RP^2 = QR^2$
 - (iii) $RP^2 + QR^2 = PQ^2$
7. 40 సెం.మీ. పొడవు మరియు 41 సెం.మీ. కర్ణము కలిగిన దీర్ఘ చతురస్రం యొక్క చుట్టుకొలత కనుగొనుము.
8. రాంబస్ యొక్క కర్ణాల కొలతలు 16 సెం.మీ. మరియు 30 సెం.మీ. దీనిని చుట్టుకొలత కనుగొనుము?



THINK, DISCUSS AND WRITE

1. Which is the longest side in the triangle PQR, right-angled at P?
2. Which is the longest side in the triangle ABC, right-angled at B?
3. Which is the longest side of a right triangle?
4. 'The diagonal of a rectangle produce by itself the same area as produced by its length and breadth' – This is Baudhayan Theorem. Compare it with the Pythagoras property.

Do This**Enrichment activity**

There are many proofs for Pythagoras theorem, using 'dissection' and 'rearrangement' procedure. Try to collect a few of them and draw charts explaining them.

WHAT HAVE WE DISCUSSED?

1. The **six elements** of a triangle are its **three angles** and the **three sides**.
2. The line segment joining a vertex of a triangle to the mid point of its opposite side is called a **median** of the triangle. A triangle has 3 medians.
3. The perpendicular line segment from a vertex of a triangle to its opposite side is called an **altitude** of the triangle. A triangle has 3 altitudes.
4. An **exterior angle** of a triangle is formed, when a side of a triangle is produced. At each vertex, you have two ways of forming an exterior angle.
5. A property of exterior angles:
The measure of any exterior angle of a triangle is equal to the sum of the measures of its interior opposite angles.
6. The angle sum property of a triangle:
The total measure of the three angles of a triangle is 180° .
7. A triangle is said to be **equilateral**, if each one of its sides has the same length.
In an equilateral triangle, each angle has measure 60° .
8. A triangle is said to be **isosceles**, if atleast any two of its sides are of same length.
The non-equal side of an isosceles triangle is called its **base**; the base angles of an isosceles triangle have equal measure.
9. Property of the lengths of sides of a triangle:
The sum of the lengths of any two sides of a triangle is greater than the length of the third side.
The difference between the lengths of any two sides is smaller than the length of the third side.

ఆలోచించి, చర్చించి వ్రాయండి



1. P వద్ద లంబ కోణం కలిగిన PQR త్రిభుజంలో పొడవైన భుజం ఏది?
2. B వద్ద లంబ కోణం కలిగిన ABC త్రిభుజంలో పొడవైన భుజం ఏది?
3. లంబ కోణ త్రిభుజంలో పొడవైన భుజం ఏది ?
4. 'ఒక దీర్ఘ చతురస్ర కర్ణము దానితో అది ఏర్పరిచిన వైశాల్యము దాని అనగా పొడవు మరియు వెడల్పులు ఏర్పరిచిన వైశాల్యాలకు సమానము - ఇదే భౌధాయన సిద్ధాతం. దీనిని పైథాగరస్ ధర్మంతో పోల్చండి.

ఇవి చేయండి

పునర్వలన కృత్యం

'విచ్చేదం' మరియు 'పునర్వ్యవస్థీకరణ' విధానాన్ని ఉపయోగించి పైథాగరస్ సిద్ధాంతానికి అనేక నిరూపణలు ఉన్నాయి. వాటిలో కొన్నింటిని సేకరించడానికి ప్రయత్నించండి మరియు వాటిని వివరిస్తూ చార్ట్లను గీయండి.

మనం ఏమి చర్చించాం?

1. త్రిభుజం యొక్క ఆరు అంశాలు - మూడు కోణాలు మరియు మూడు భుజాలు.
2. ఒక త్రిభుజం యొక్క ఒక శీర్షము నుంచి దాని ఎదుటి భుజం యొక్క మధ్య బిందువును కలిపే రేఖా ఖండమునే మధ్యగత రేఖ అంటారు. త్రిభుజానికి 3 మధ్యగత రేఖలు ఉంటాయి.
3. ఒక త్రిభుజం యొక్క శీర్షం నుండి దాని ఎదుటి భుజానికి గీయబడిన లంబరేఖా ఖండమును ఆ త్రిభుజం యొక్క ఉన్నతి అంటారు.
4. త్రిభుజం యొక్క ఒక భుజాన్ని పొడిగించగా త్రిభుజం యొక్క బాహ్య కోణం ఏర్పడుతుంది. ప్రతి శీర్షం నుంచి మీకు బాహ్య కోణంను ఏర్పరచడానికి రెండు మార్గాలు ఉన్నాయి.
5. త్రిభుజ బాహ్యకోణ ధర్మం:
ఒక త్రిభుజం యొక్క బాహ్యకోణం కొలత దాని అంతరాభిముఖ కోణాల మొత్తానికి సమానం.
6. త్రిభుజం యొక్క కోణముల మొత్తము ధర్మము:
త్రిభుజం యొక్క మూడు అంతర కోణముల మొత్తము కొలత 180° .
7. ప్రతి భుజం పొడవు సమానముగా ఉన్న త్రిభుజాన్ని సమబాహు త్రిభుజం అంటారు. సమబాహు త్రిభుజంలో ప్రతికోణం 60° కొలత కలిగి ఉంటుంది.
8. కనీసం ఏవైనా రెండు భుజాల పొడవులు సమానముగా ఉంటే ఆ త్రిభుజాన్ని సమద్విబాహు త్రిభుజం అంటారు. సమద్విబాహు త్రిభుజం లో సమానముగాలేని భుజాన్ని దాని భూమి అంటారు. సమద్విబాహు త్రిభుజంలో భూకోణాలు సమాన కొలత కలిగి ఉంటాయి.
9. త్రిభుజ యొక్క భుజాల పొడవుల ధర్మం :
ఒక త్రిభుజం లో ఏవైనా రెండు భుజాల పొడవుల మొత్తము మూడవ భుజం పొడవు కంటే ఎక్కువ. రెండు భుజాల పొడవుల భేధం మూడవ భుజం పొడవు కంటే తక్కువ.

This property is useful to know if it is possible to draw a triangle when the lengths of the three sides are known.

10. In a right angled triangle, the side opposite to the right angle is called the **hypotenuse** and the other two sides are called its **legs**.
11. **Pythagoras property:**

In a right-angled triangle,

the square on the hypotenuse = the sum of the squares on its legs.

If a triangle is not right-angled, this property does not hold good. This property is useful to decide whether a given triangle is right-angled or not.



మూడు భుజాల పొడవు తెలిసినప్పుడు త్రిభుజాన్ని గీయడం సాధ్యమేనా అని తెలుసుకోవడానికి ఈ ధర్మం ఉపయోగపడుతుంది.

10. లంబ కోణ త్రిభుజంలో లంబ కోణానికి ఎదురుగా వున్న భుజాన్ని కర్ణము అని. మిగిలిన రెండిటినీ లంబకోణాన్ని కలిగిన భుజాలు అని అంటారు.

11. పైథాగరస్ సిద్ధాంతము:

లంబకోణ త్రిభుజములో,

కర్ణము² = మీది వర్గము + లంబకోణాన్ని కలిగిన భుజాలు² = మీది వర్గాల మొత్తానికి సమానము.

ఒకవేళ త్రిభుజం లంబకోణాన్ని కలిగి ఉండకపోతే, ఈ ధర్మం వర్తించదు. ఇచ్చిన త్రిభుజం లంబకోణాన్ని కలిగి ఉందా లేదా అని నిర్ణయించడానికి ఈ ధర్మం ఉపయోగపడుతుంది.



Comparing Quantities



7.1 PERCENTAGE – ANOTHER WAY OF COMPARING QUANTITIES

Anita's Report

Total 320/400

Percentage: 80



Rita's Report

Total 300/360

Percentage: 83.3

Anita said that she has done better as she got 320 marks whereas Rita got only 300. Do you agree with her? Who do you think has done better?

Mansi told them that they cannot decide who has done better by just comparing the total marks obtained because the maximum marks out of which they got the marks are not the same.

She said why don't you see the Percentages given in your report cards?

Anita's Percentage was 80 and Rita's was 83.3. So, this shows Rita has done better.

Do you agree?

Percentages are numerators of fractions with denominator 100 and have been used in comparing results. Let us try to understand in detail about it.

7.1.1 Meaning of Percentage

Per cent is derived from Latin word 'per centum' meaning 'per hundred'.

Per cent is represented by the symbol % and means hundredths too. That is 1% means

1 out of hundred or one hundredth. It can be written as: $1\% = \frac{1}{100} = 0.01$

To understand this, let us consider the following example.

రాశులను పోల్చడం



7.1 శాతము - మరొక పద్ధతిలో రాశులను పోల్చుట

<p>అనిత నివేదిక మొత్తం 320/400 శాతము: 80</p>			<p>రీటా నివేదిక మొత్తం 300/360 శాతము: 83.3</p>
---	--	--	---

తనకు 320 మార్కులు రాగా, రీటాకు 300 మార్కులు మాత్రమే వచ్చాయని తనకు బాగా మార్కులు వచ్చాయి అని అనిత చెప్పింది. మీరు ఆమెతో అంగీకరిస్తారా? ఎవరికి, బాగా వచ్చాయి అని మీరు అనుకుంటున్నారు ?

గరిష్ట మార్కులు సమానం కాదు కాబట్టి కేవలం వారికీ వచ్చిన మార్కులను పోల్చడం ద్వారా ఎవరు బాగా చేశారనేది నిర్ణయించలేము అని మాన్సి చెప్పింది.

నివేదిక పత్రం లోని శాతాలను ఎందుకు పరిశీలించకూడదని ఆమె అడిగింది. అనిత మార్కుల శాతం 80 మరియు రీటా మార్కుల శాతం 83.3. దీనిని బట్టి రీటా మెరుగ్గా చేసిందని చెప్పవచ్చు.

దీనిని మీరు అంగీకరిస్తారా?

శాతాలు అనేవి 100 హారముగా కలిగిన భిన్నాలు మరియు ఫలితాలను పోల్చడానికి వీటిని ఉపయోగిస్తారు. దాని గురించి వివరంగా అర్థం చేసుకోవడానికి ప్రయత్నిద్దాం.

7.1.1 శాతం యొక్క అర్థం

శాతం అనేది వందకి అనే అర్థం వచ్చే “పర్సెంటమ్” అనే లాటిన్ పదం నుండి గ్రహించబడింది.

శాతము అనేది ‘%’ అనే గుర్తు తో సూచిస్తాం మరియు దీని అర్థం శతాంశం అని కూడా అంటారు. 1% అంటే

$$\text{వందలో 1 లేదా వందవ భాగం. దీనిని ఇలా వ్రాయవచ్చు: } 1\% = \frac{1}{100} = 0.01$$

దీనిని అర్థం చేసుకోవడానికి, ఈ క్రింది ఉదాహరణను పరిశీలిద్దాం.

Rina made a table top of 100 different coloured tiles. She counted yellow, green, red and blue tiles separately and filled the table below. Can you help her complete the table?

Colour	Number of Tiles	Rate per Hundred	Fraction	Written as	Read as
Yellow	14	14	$\frac{14}{100}$	14%	14 per cent
Green	26	26	$\frac{26}{100}$	26%	26 per cent
Red	35	35	----	----	----
Blue	25	-----	----	----	----
Total	100				

TRY THESE

1. Find the Percentage of children of different heights for the following data.

Height	Number of Children	In Fraction	In Percentage
110 cm	22		
120 cm	25		
128 cm	32		
130 cm	21		
Total	100		



2. A shop has the following number of shoe pairs of different sizes.

Size 2 : 20 Size 3 : 30 Size 4 : 28

Size 5 : 14 Size 6 : 8

Write this information in tabular form as done earlier and find the Percentage of each shoe size available in the shop.



Percentages when total is not hundred

In all these examples, the total number of items add up to 100. For example, Rina had 100 tiles in all, there were 100 children and 100 shoe pairs. How do we calculate Percentage of an item if the total number of items do not add up to 100? In such cases, we need to convert the fraction to an equivalent fraction with denominator 100. Consider the following example. You have a necklace with twenty beads in two colours.

రీనా 100 వేర్వేరు రంగుల టైల్స్ తో బల్ల పై భాగాన్ని తయారు చేసింది. ఆమె పసుపు, ఆకుపచ్చ, ఎరుపు మరియు నీలం టైల్స్ వేర్వేరుగా లెక్కించి క్రింది పట్టికలో నింపింది. పట్టికను పూర్తి చేయడంలో మీరు ఆమెకు సహాయపడగలరా?

రంగు	టైల్స్ సంఖ్య	ధర (వందకు)	భిన్నం	ఇలా రాస్తాం	ఇలా చదువుతారు
పసుపు	14	14	$\frac{14}{100}$	14%	14 శాతం
ఆకుపచ్చ	26	26	$\frac{26}{100}$	26%	26 శాతం
ఎరుపు	35	35	----	----	----
నీలం	25	-----	----	----	----
మొత్తం	100				

ప్రయత్నించండి

1. క్రింది దత్తాంశానికి వేర్వేరు ఎత్తులున్న పిల్లల శాతంను కనుక్కోండి.

ఎత్తు	పిల్లల సంఖ్య	భిన్నంలో	శాతంలో
110 సెం.మీ.	22		
120 సెం.మీ.	25		
128 సెం.మీ.	32		
130 సెం.మీ.	21		
మొత్తం	100		



2. ఒక షాపులో దిగువ పేర్కొన్న సంఖ్యలో విభిన్న కొలతలు గల బూట్లు ఉన్నాయి.

కొలత 2 : 20 కొలత 3 : 30 కొలత 4 : 28
 కొలత 5 : 14 కొలత 6 : 8

ఇంతకు ముందు చేసినట్లుగా ఈ సమాచారాన్ని పట్టిక రూపంలో రాయండి మరియు షాప్ లో ఉన్న వివిధ కొలతలు గల బూట్ల శాతం కనుగొనుము



మొత్తం వంద కానప్పుడు శాతాలు

పై అన్ని ఉదాహరణలలో, మొత్తం రాశుల సంఖ్య 100 వరకు ఉంటుంది. ఉదాహరణకు, రీనా వద్ద మొత్తం 100 టైల్స్ ఉన్నాయి, 100 పిల్లలు మరియు 100 షూ జతలు ఉన్నాయి. ఒకవేళ మొత్తం రాశుల సంఖ్య 100 కానట్లయితే, ఒక రాశి యొక్క శాతాన్ని మనం ఏవిధంగా లెక్కిస్తాం? అటువంటి సందర్భాల్లో, మనం భిన్నాన్ని హారం 100 గా గల భిన్నంగా మార్చాల్సి ఉంటుంది. ఈ క్రింది ఉదాహరణను పరిశీలించండి. మీకు రెండు రంగులలో ఇరవై షూసలు గల నెక్సెస్ ఉంది.

Colour	Number of Beads	Fraction	Denominator Hundred	In Percentage
Red	8	$\frac{8}{20}$	$\frac{8}{20} \times \frac{100}{100} = \frac{40}{100}$	40%
Blue	12	$\frac{12}{20}$	$\frac{12}{20} \times \frac{100}{100} = \frac{60}{100}$	60%
Total	20			

Anwar found the Percentage of red beads like this

Out of 20 beads, the number of red beads is 8.

Hence, out of 100, the number of red beads is

$$\frac{8}{20} \times 100 = 40 \text{ (out of hundred)} = 40\%$$

Asha does it like this

$$\begin{aligned} \frac{8}{20} &= \frac{8 \times 5}{20 \times 5} \\ &= \frac{40}{100} = 40\% \end{aligned}$$

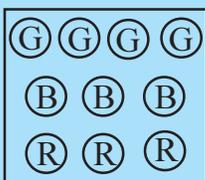
We see that these three methods can be used to find the Percentage when the total does not add to give 100. In the method shown in the table, we multiply the fraction by $\frac{100}{100}$. This does not change the value of the fraction. Subsequently, only 100 remains in the denominator.

Anwar has used the unitary method. Asha has multiplied by $\frac{5}{5}$ to get 100 in the denominator. You can use whichever method you find suitable. May be, you can make your own method too.

The method used by Anwar can work for all ratios. Can the method used by Asha also work for all ratios? Anwar says Asha's method can be used only if you can find a natural number which on multiplication with the denominator gives 100. Since denominator was 20, she could multiply it by 5 to get 100. If the denominator was 6, she would not have been able to use this method. Do you agree?

**TRY THESE**

1. A collection of 10 chips with different colours is given .



Colour	Number	Fraction	Denominator Hundred	In Percentage
Green				
Blue				
Red				
Total				

Fill the table and find the percentage of chips of each colour.

రంగు	పూసల సంఖ్య	భిన్నం	హారము నూటికి	శాతంలో
ఎరుపు	8	$\frac{8}{20}$	$\frac{8}{20} \times \frac{100}{100} = \frac{40}{100}$	40%
నీలం	12	$\frac{12}{20}$	$\frac{12}{20} \times \frac{100}{100} = \frac{60}{100}$	60%
మొత్తం	20			

అస్వర్ ఎరుపు పూసల శాతంను ఈ విధంగా కనుకున్నాడు

20 పూసలలో ఎరుపు పూసల సంఖ్య 8. అందువల్ల, వందకు ఎరుపు పూసల సంఖ్య

$$\frac{8}{20} \times 100 = 40 \text{ (వందకు)} = 40\%$$

అశ ఈ విధంగా చేసింది

$$\frac{8}{20} = \frac{8 \times 5}{20 \times 5}$$

$$= \frac{40}{100} = 40\%$$

మొత్తం 100 కానప్పుడు శాతమును కనుగొనడానికి ఈ మూడు పద్ధతులను ఉపయోగించవచ్చని మనంచూశాము. పట్టికలో చూపించిన పద్ధతిలో, మనం భిన్నాన్ని $\frac{100}{100}$ తో గుణిస్తాము. ఇది భిన్నం యొక్క విలువను మార్చదు. తరువాత, హారంలో 100 మాత్రమే మిగిలి ఉంటుంది.

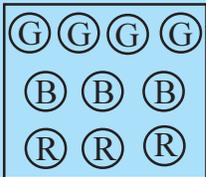
అస్వర్ ఏక వస్తు మార్గ పద్ధతిని ఉపయోగించాడు. హారం 100 రావడానికి అశ $\frac{5}{5}$ తో గుణించింది. మీకు అనుకూలమైన పద్ధతిని ఉపయోగించవచ్చు. మీరు మీ సొంత పద్ధతిని కూడా తయారు చేసుకోవచ్చు

అస్వర్ ఉపయోగించే పద్ధతి అన్ని నిష్పత్తులకు పనిచేస్తుంది. ఆశా ఉపయోగించే పద్ధతి అన్ని నిష్పత్తులకు పని చేస్తుందా? అశ చేసిన పద్ధతి హారంలో ఉన్న సంఖ్య ను ఏదైనా సహజ సంఖ్యతో గుణిస్తే 100 వచ్చినప్పుడు మాత్రమే వర్తిస్తుంది అని అస్వర్ అన్నారు. హారంలో 20 ఉంది కాబట్టి 100 పొందడానికి ఆమె 5 తో గుణించాల్సి వచ్చింది. హారంలో 6 ఉన్నట్లయితే ఆమె ఈ పద్ధతిని ఉపయోగించలేదు మీరు అంగీకరిస్తారా?



ప్రయత్నించండి

- విభిన్న రంగులతో కూడిన 10 చిప్ల యొక్క సేకరణ ఇవ్వబడింది.



రంగు	సంఖ్య	భిన్నం	హారము నూటికి	శాతంలో
ఆకుపచ్చ				
నీలం				
ఎరుపు				
మొత్తం				

పట్టికను నింపండి మరియు ప్రతి రంగు చిప్ల శాతాన్ని కనుగొనండి.

2. Mala has a collection of bangles. She has 20 gold bangles and 10 silver bangles. What is the percentage of bangles of each type? Can you put it in the tabular form as done in the above example?

THINK, DISCUSS AND WRITE

1. Look at the examples below and in each of them, discuss which is better for comparison.

In the atmosphere, 1 g of air contains:

.78 g Nitrogen
.21 g Oxygen
.01 g Other gas

or

78% Nitrogen
21% Oxygen
1% Other gas

2. A shirt has:



$\frac{3}{5}$ Cotton
 $\frac{2}{5}$ Polyester

or

60% Cotton
40% Polyester



7.1.2 Converting Fractional Numbers to Percentage

Fractional numbers can have different denominator. To compare fractional numbers, we need a common denominator and we have seen that it is more convenient to compare if our denominator is 100. That is, we are converting the fractions to Percentages. Let us try converting different fractional numbers to Percentages.

EXAMPLE 1 Write $\frac{1}{3}$ as per cent.

SOLUTION We have, $\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{100}{100} = \frac{1}{3} \times 100\%$
 $= \frac{100}{3}\% = 33\frac{1}{3}\%$

EXAMPLE 2 Out of 25 children in a class, 15 are girls. What is the percentage of girls?

SOLUTION Out of 25 children, there are 15 girls.

Therefore, percentage of girls = $\frac{15}{25} \times 100 = 60$. There are 60% girls in the class.

EXAMPLE 3 Convert $\frac{5}{4}$ to per cent.

SOLUTION We have, $\frac{5}{4} = \frac{5}{4} \times 100\% = 125\%$

2. మాల కొన్ని చేతి గాజులను సేకరించింది. ఆమె వద్ద 20 బంగారు గాజులు మరియు 10 వెండి గాజులు ఉన్నాయి. ప్రతి రకం గాజుల శాతం ఎంత? పై ఉదాహరణలో చేసినట్లుగా మీరు దానిని పట్టిక రూపం లో ఉంచగలరా?

ఆలోచించి, చర్చించి రాయండి

1. క్రింది ఉదాహరణలను చూడండి మరియు ప్రతిదానిలో, పోల్చడానికి ఏది సరైనదో చర్చించండి.

వాతావరణంలో, 1 గ్రా గాలిలో ఇవి ఉంటాయి:

.78 గ్రా. నైట్రోజన్
.21 గ్రా. ఆక్సిజన్
.01 గ్రా. ఇతరాలు

లేదా

78% నైట్రోజన్
21% ఆక్సిజన్
1% ఇతరాలు

2. ఒక చొక్కాలో:



$\frac{3}{5}$ కాటన్
 $\frac{2}{5}$ పాలిస్టర్

or

60% కాటన్
40% పాలిస్టర్



7.1.2 భిన్నాలను శాతాలుగా మార్చడం

భిన్నాలు వేర్వేరు హారాలను కలిగి ఉండవచ్చు. భిన్నాలను పోల్చడానికి, మనకు ఒక ఉమ్మడి హారము అవసరం మరియు హారము 100 అయితే పోల్చడం మరింత సౌకర్యవంతంగా ఉంటుందని మనం చూశాము. అంటే, మనము భిన్నాలను శాతాలుగా మారుస్తున్నాము. విభిన్న భిన్నాలను శాతాలుగా మార్చడానికి మనం ప్రయత్నిద్దాం.

ఉదాహరణ 1 $\frac{1}{3}$ ను శాతం గా రాయండి.

సాధన మనకు, $\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{100}{100} = \frac{1}{3} \times 100\%$
 $= \frac{100}{3} \% = 33\frac{1}{3} \%$

ఉదాహరణ 2 ఒక తరగతిలోని 25 మంది పిల్లల్లో 15 మంది బాలికలు, అయిన బాలికల శాతం ఎంత?

సాధన 25 మంది పిల్లల్లో 15 మంది బాలికలు ఉన్నారు.

అందువల్ల, బాలికల శాతం = $\frac{15}{25} \times 100 = 60$. తరగతిలో 60% మంది బాలికలు ఉన్నారు.

ఉదాహరణ 3 $\frac{5}{4}$ ను శాతానికి మార్చండి.

సాధన మనకు, $\frac{5}{4} = \frac{5}{4} \times 100\% = 125\%$

From these examples, we find that the percentages related to proper fractions are less than 100 whereas percentages related to improper fractions are more than 100.

THINK, DISCUSS AND WRITE



- (i) Can you eat 50% of a cake? Can you eat 100% of a cake?
Can you eat 150% of a cake?
- (ii) Can a price of an item go up by 50%? Can a price of an item go up by 100%?
Can a price of an item go up by 150%?

7.1.3 Converting Decimals to Percentage

We have seen how fractions can be converted to per cents. Let us now find how decimals can be converted to per cents.

EXAMPLE 4 Convert the given decimals to per cents:

(a) 0.75

(b) 0.09

(c) 0.2

SOLUTION

(a) $0.75 = 0.75 \times 100\%$

$$= \frac{75}{100} \times 100\% = 75\%$$

(b) $0.09 = \frac{9}{100} = 9\%$

(c) $0.2 = \frac{2}{10} \times 100\% = 20\%$

TRY THESE



1. Convert the following to per cents:

(a) $\frac{12}{16}$

(b) 3.5

(c) $\frac{49}{50}$

(d) $\frac{2}{2}$

(e) 0.05

2. (i) Out of 32 students, 8 are absent. What per cent of the students are absent?
(ii) There are 25 radios, 16 of them are out of order. What per cent of radios are out of order?
(iii) A shop has 500 items, out of which 5 are defective. What per cent are defective?
(iv) There are 120 voters, 90 of them voted yes. What per cent voted yes?

7.1.4 Converting Percentages to Fractions or Decimals

We have so far converted fractions and decimals to percentages. We can also do the reverse. That is, given per cents, we can convert them to decimals or fractions. Look at the table, observe and complete it:

ఈ ఉదాహరణల నుండి, క్రమ భిన్నాలకు సంబంధించిన శాతాలు 100 కంటే తక్కువ గాను అపక్రమభిన్నాలకు సంబంధించిన శాతాలు 100 కంటే ఎక్కువ గాను ఉన్నాయి అని కనుగొనవచ్చును.

ఆలోచించి, చర్చించి రాయండి



- | | |
|----------------------------------|------------------------------|
| (i) మీరు కేక్‌లో 50% తినగలరా? | మీరు కేక్‌లో 100% తినగలరా? |
| మీరు కేక్‌లో 150% తినగలరా? | |
| (ii) ఒక వస్తువు ధర 50% పెరగగలదా? | ఒక వస్తువు ధర 100% పెరగగలదా? |
| ఒక వస్తువు ధర 150% పెరగగలదా? | |

7.1.3 దశాంశాలను శాతాలుగా మార్చడం

భిన్నాలను శాతాలుగా ఎలా మార్చవచ్చో మనము చూశాము మనం ఇప్పుడు దశాంశాలను శాతాలుగా ఎలా మార్చవచ్చో కనుగొందాం.

ఉదాహరణ 4 ఇవ్వబడ్డ దశాంశాలను శాతాలుగా మార్చండి:

- (a) 0.75 (b) 0.09 (c) 0.2

సాధన

$$(a) 0.75 = 0.75 \times 100 \%$$

$$(b) 0.09 = \frac{9}{100} = 9 \%$$

$$= \frac{75}{100} \times 100 \% = 75\%$$

$$(c) 0.2 = \frac{2}{10} \times 100\% = 20 \%$$

ప్రయత్నించండి



1. ఈ క్రింది వాటిని శాతాలుగా మార్చండి:

- (a) $\frac{12}{16}$ (b) 3.5 (c) $\frac{49}{50}$ (d) $\frac{2}{2}$ (e) 0.05

2. (i) 32 మంది విద్యార్థులకుగాను 8 మంది గైర్వాజరయ్యారు. ఎంత శాతం మంది విద్యార్థులు గైర్వాజరయ్యారు?
(ii) 25 రేడియోలలో 16 సక్రమంగా లేవు. రేడియోలలో ఎంత శాతం సక్రమంగా లేవు?
(iii) ఒక షాపులో 500 వస్తువులు ఉన్నాయి, వీటిలో 5 లోపాలు గలవి. లోపాలు గలవి ఎంత శాతం ఉన్నాయి ?
(iv) 120 మంది ఓటర్లు ఉన్నారు, వారిలో 90 మంది అవును అని ఓటు వేశారు. ఎంత శాతం మంది అవును అని ఓటు వేశారు?

7.1.4 శాతాలను భిన్నాలు లేదా దశాంశాలుగా మార్చడం

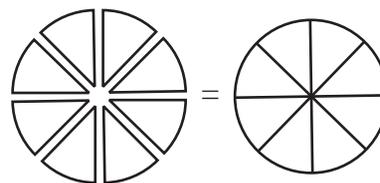
మనము ఇప్పటివరకు భిన్నాలు మరియు దశాంశాలను శాతాలుగా మార్చాము. మనం దీనికి విరుద్ధంగా కూడా చేయవచ్చు. అంటే, శాతాలు ఇచ్చినట్లయితే, మనం వాటిని దశాంశములు లేదా భిన్నాలుగా మార్చవచ్చు. వీటిని చూడండి. పట్టికను పరిశీలించండి మరియు పూర్తి చేయండి:

Per cent	1%	10%	25%	50%	90%	125%	250%
Fraction	$\frac{1}{100}$	$\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$					
Decimal	0.01	0.10					

Make some more such examples and solve them.

Parts always add to give a whole

In the examples for coloured tiles, for the heights of children and for gases in the air, we find that when we add the Percentages we get 100. All the parts that form the whole when added together gives the whole or 100%. So, if we are given one part, we can always find out the other part. Suppose, 30% of a given number of students are boys.



This means that if there were 100 students, 30 out of them would be boys and the remaining would be girls.

Then girls would obviously be $(100 - 30)\% = 70\%$.

TRY THESE

1. $35\% + \underline{\hspace{2cm}}\% = 100\%$, $64\% + 20\% + \underline{\hspace{2cm}}\% = 100\%$

$45\% = 100\% - \underline{\hspace{2cm}}\%$, $70\% = \underline{\hspace{2cm}}\% - 30\%$

2. If 65% of students in a class have a bicycle, what per cent of the student do not have bicycles?



3. We have a basket full of apples, oranges and mangoes. If 50% are apples, 30% are oranges, then what per cent are mangoes?



THINK, DISCUSS AND WRITE

Consider the expenditure made on a dress
20% on embroidery, 50% on cloth, 30% on stitching.
Can you think of more such examples?

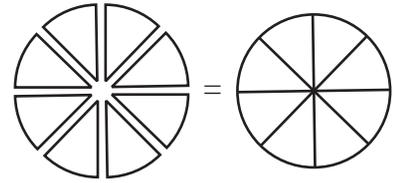


శాతము	1%	10%	25%	50%	90%	125%	250%
భిన్నము	$\frac{1}{100}$	$\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$					
దశాంశము	0.01	0.10					

ఇటువంటి మరికొన్ని ఉదాహరణలు తీసుకొని సాధించండి.

భాగాలు అన్ని కలిపితే మొత్తాన్ని ఇస్తాయి

రంగుల టైల్స్ యొక్క ఉదాహరణలో, పిల్లల విషయంలో ఎత్తుల కొరకు మరియు గాలిలోని వాయువుల విషయంలో శాతాల మొత్తం 100 అవుతుందని మనం కనుగొనవచ్చు. మొత్తాన్ని ఇచ్చే అన్ని భాగాల శాతాలను కూడితే మొత్తం లేదా 100% ను ఇస్తుంది. కాబట్టి, మనకు ఒక భాగం ఇచ్చినట్లయితే, మిగిలిన భాగాన్ని కనుగొనవచ్చు. ఉదాహరణకు, ఒక నిర్దిష్ట సంఖ్య విద్యార్థులలో 30% మంది బాలురు.

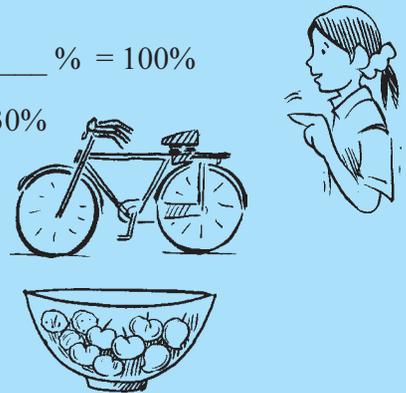


అంటే 100 మంది విద్యార్థులు ఉంటే, వారిలో 30 మంది బాలురు మరియు మిగిలినవారు బాలికలు.

అప్పుడు అమ్మాయిలు స్పష్టంగా $(100 - 30)\% = 70\%$ మంది ఉంటారు.

ప్రయత్నించండి

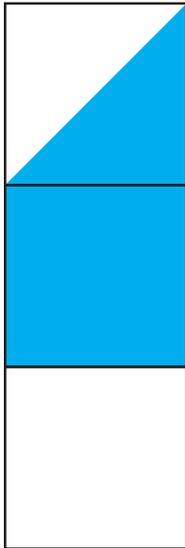
- $35\% + \underline{\hspace{2cm}}\% = 100\%$, $64\% + 20\% + \underline{\hspace{2cm}}\% = 100\%$
 $45\% = 100\% - \underline{\hspace{2cm}}\%$, $70\% = \underline{\hspace{2cm}}\% - 30\%$
- ఒక క్లాసులో 65% మంది విద్యార్థులకు సైకిలు ఉన్నట్లయితే, ఎంత శాతం మంది విద్యార్థులకు సైకిల్స్ లేవు?
- బుట్ట నిండా ఆపిల్, నారింజ మరియు మామిడిపండ్లు ఉన్నాయి. 50% యాపిల్స్, 30% నారింజ పండ్లు అయితే, అప్పుడు మామిడి పండ్లు ఎంత శాతం?



ఆలోచించి, చర్చించి రాయండి

దుస్తుల కొరకు చేసిన ఖర్చును పరిగణనలోకి తీసుకోండి. ఎంబ్రాయిడరీపై 20%, వస్త్రంపై 50%, కుట్టుపై 30% ఇలాంటి మరిన్ని ఉదాహరణల గురించి మీరు ఆలోచించగలరా?





7.1.5 Fun with Estimation

Percentages help us to estimate the parts of an area.

EXAMPLE 5 What per cent of the adjoining figure is shaded?

SOLUTION We first find the fraction of the figure that is shaded. From this fraction, the percentage of the shaded part can be found.

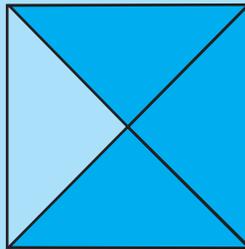
You will find that half of the figure is shaded. And, $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 100\% = 50\%$

Thus, 50% of the figure is shaded.

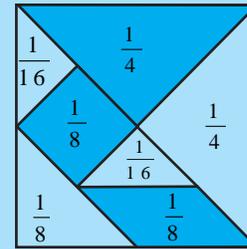
TRY THESE

What per cent of these figures are shaded?

(i)



(ii)



Tangram

You can make some more figures yourself and ask your friends to estimate the shaded parts.

7.2 USE OF PERCENTAGES

7.2.1 Interpreting Percentages

We saw how percentages were helpful in comparison. We have also learnt to convert fractional numbers and decimals to percentages. Now, we shall learn how percentages can be used in real life. For this, we start with interpreting the following statements:

- 5% of the income is saved by Ravi.
- 20% of Meera's dresses are blue in colour.
- Rekha gets 10% on every book sold by her.

What can you infer from each of these statements?

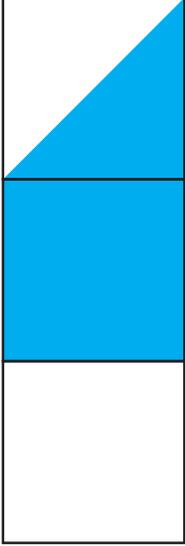
By 5% we mean 5 parts out of 100 or we write it as $\frac{5}{100}$. It means Ravi is saving ₹ 5 out of every ₹ 100 that he earns. In the same way, interpret the rest of the statements given above.

7.2.2 Converting Percentages to "How Many"

Consider the following examples:

EXAMPLE 6 A survey of 40 children showed that 25% liked playing football. How many children liked playing football?

SOLUTION Here, the total number of children are 40. Out of these, 25% like playing football. Meena and Arun used the following methods to find the number. You can choose either method.



7.1.5 అంచనాతో వినోదం

ఒక ప్రాంతం యొక్క భాగాలను అంచనా వేయడానికి శాతాలు మనకు సహాయపడతాయి.

ఉదాహరణ 5 ప్రక్కనే ఉన్న పటంలో ఎంత శాతం షేడ్ చేసినది ఉంది?

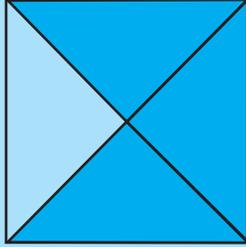
సాధన మనం మొదట పటంలో షేడ్ చేసిన భాగానికి భిన్నాన్ని కనుగొంటాము. ఈ భిన్నం నుండి, షేడ్ చేసిన భాగం శాతాన్ని కనుగొనవచ్చు.

పటంలో సగం షేడ్ చేసి ఉండటాన్ని మనం కనుగొనవచ్చు. మరియు, $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 100\% = 50\%$ అందువలన, పటంలో 50% షేడ్ చేసి ఉంటుంది.

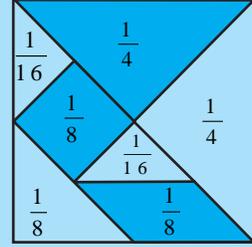
ప్రయత్నించండి

ఇక్కడ ఉన్న పటాలలో షేడ్ చేసిన భాగం యొక్క శాతం ఎంత?

(i)



(ii)



Tangram

ఇలాంటి పటాలను మరికొన్ని తయారుచెయ్యండి. షేడ్ చేసిన ప్రాంతాలను అంచనా వెయ్యమని మీ స్నేహితులను అడగండి.

7.2 శాతాల యొక్క ఉపయోగాలు

7.2.1 శాతాలను విశ్లేషించడం

పోల్చడానికి శాతాలు ఎలా సహాయపడతాయో మనము చూశాము. భిన్న సంఖ్యలు మరియు దశాంశాలను శాతాలుగా మార్చడం కూడా మనము నేర్చుకున్నాము. ఇప్పుడు, నిజజీవితంలో శాతాలను ఎలా ఉపయోగించవచ్చో మనం నేర్చుకుందాం. దీని కోసం, మనం ఈ క్రింది ప్రవచనాలను విశ్లేషించడం ప్రారంభిద్దాం:

— ఆదాయంలో 5% రవి ఆదా చేశాడు. — మీరా దుస్తులు 20% నీలం రంగులో గలవి.

— అమ్మిన ప్రతి పుస్తకంపై రేఖ 10% పొందుతుంది.

ఈ ప్రతి ప్రవచనం నుండి మీరు ఏమి తెలుసుకోగలరు?

5% అంటే 100 లో 5 భాగాలు లేదా మనము దానిని $\frac{5}{100}$ గా రాస్తాము. అంటే రవి, అతను సంపాదించిన ప్రతి ₹100లకు ₹ 5లను ఆదాచేశాడని అర్థం. అదేవిధంగా, పైన ఇవ్వబడ్డ మిగిలిన ప్రవచనాలను విశ్లేషించండి.

7.2.2 శాతాలను “ఎంతకు” అని మార్చడం

ఈ క్రింది ఉదాహరణలను పరిశీలించండి:

ఉదాహరణ 6 60 మంది పిల్లలపై జరిపిన ఒక సర్వేలో 25% మంది ఫుట్ బాల్ ఆడటానికి ఇష్టపడతారని తేలింది. ఎంత మంది పిల్లలు ఫుట్ బాల్ ఆడటానికి ఇష్టపడ్డారు?

సాధన ఇక్కడ, మొత్తం పిల్లల సంఖ్య 60. వీరిలో 25% మంది ఫుట్ బాల్ ఆడటానికి ఇష్టపడతారు. మీనా మరియు అరుణ సంఖ్యను కనుగొనడానికి ఈ క్రింది పద్ధతులను ఉపయోగించారు. మీరు ఏదైనా పద్ధతిని ఎంచుకోవచ్చు.

Arun does it like this

Out of 100, 25 like playing football
 So out of 40, number of children who like
 playing football = $\frac{25}{100} \times 40 = 10$

Meena does it like this

$$25\% \text{ of } 40 = \frac{25}{100} \times 40 \\ = 10$$

Hence, 10 children out of 40 like playing football.

TRY THESE

1. Find:

(a) 50% of 164

(b) 75% of 12

(c) $12\frac{1}{2}\%$ of 64

2. 8% children of a class of 25 like getting wet in the rain. How many children like getting wet in the rain.



EXAMPLE 7 Rahul bought a sweater and saved ₹ 200 when a discount of 25% was given. What was the price of the sweater before the discount?

SOLUTION Rahul has saved ₹ 200 when price of sweater is reduced by 25%. This means that 25% reduction in price is the amount saved by Rahul. Let us see how Mohan and Abdul have found the original cost of the sweater.

Mohan's solution

25% of the original price = ₹ 200

Let the price (in ₹) be P

$$\text{So, } 25\% \text{ of } P = 200 \text{ or } \frac{25}{100} \times P = 200$$

$$\text{or, } \frac{P}{4} = 200 \text{ or } P = 200 \times 4$$

Therefore, $P = 800$

Abdul's solution

₹ 25 is saved for every ₹ 100

Amount for which ₹ 200 is saved

$$= \frac{100}{25} \times 200 = ₹ 800$$

Thus both obtained the original price of sweater as ₹ 800.

TRY THESE

1. 9 is 25% of what number?

2. 75% of what number is 15?

EXERCISE 7.1

1. Convert the given fractional numbers to per cents.

(a) $\frac{1}{8}$

(b) $\frac{5}{4}$

(c) $\frac{3}{40}$

(d) $\frac{2}{7}$



అరుణ్ ఇలా చేశాడు

100 మందిలో 25 మంది ఫుట్ బాల్ ఆడటానికి ఇష్టపడ్డారు. కావున, 40 మందిలో ఫుట్ బాల్ ఆడటానికి ఇష్టపడే

$$\text{పిల్లల సంఖ్య} = \frac{25}{100} \times 40 = 10$$

మీనా ఇలా చేసింది

$$25\% \text{ of } 40 = \frac{25}{100} \times 40 = 10$$

అందువల్ల, 40 మందిలో 10 మంది పిల్లలు ఫుట్ బాల్ ఆడటానికి ఇష్టపడతారు.

ప్రయత్నించండి

1. కనుగొనండి:

- (a) 50% లో 164 (b) 75% లో 12 (c) $12\frac{1}{2}\%$ లో 64

2. 25 మంది గల తరగతిలో 8% మంది పిల్లలు వర్షంలో తడవడాన్ని ఇష్టపడతారు. ఎంత మంది పిల్లలు వర్షంలో తడవడానికి ఇష్టపడతారు.



ఉదాహరణ 7

రాహుల్ ఒక స్వెటర్ కొన్నాడు మరియు 5% డిస్కాంట్ ఇవ్వడం ద్వారా ₹ 200 ఆదా చేశాడు. డిస్కాంట్ కు ముందు స్వెటర్ ధర ఎంత?

సాధన

స్వెటర్ ధర 25% తగ్గించినప్పుడు రాహుల్ ₹ 200 ఆదా చేశాడు. అంటే ధరలో 25% తగ్గింపు రాహుల్ ఆదా చేసిన మొత్తం. స్వెటర్ యొక్క అసలు ధరను మోహన్ మరియు అబ్దుల్ ఎలా కనుగొన్నారు? మనం ఇప్పుడు చూద్దాం.

మోహన్ యొక్క సాధన

అసలు ధర 25% = ₹ 200
కావున, ధర (₹లో) P అని అనుకుందాం.

కావున P లో 25% = 200 లేదా $\frac{25}{100} \times P = 200$

లేదా, $\frac{P}{4} = 200$ లేదా $P = 200 \times 4$

అందువల్ల, $P = 800$

అబ్దుల్ యొక్క సాధన

ప్రతి ₹100 మొత్తానికి ₹25 ఆదా చేయబడుతుంది ₹ 200 ఆదా చేయబడుతుంది.

$$= \frac{100}{25} \times 200 = ₹ 800$$

ఆ విధంగా ఇద్దరూ స్వెటర్ యొక్క అసలు ధరను ₹ 800 గా పొందారు.

ప్రయత్నించండి

1. ఏ సంఖ్యలో 25%, 9 అగును 2. ఏ సంఖ్యలో 75%, 15 అగును

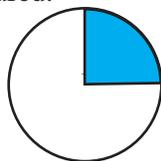
అభ్యాసం 7. 1

1. ఇవ్వబడ్డ భిన్నాలను శాతాలుగా మార్చండి

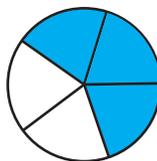
- (a) $\frac{1}{8}$ (b) $\frac{5}{4}$ (c) $\frac{3}{40}$ (d) $\frac{2}{7}$



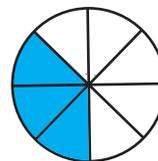
2. Convert the given decimal fractions to per cents.
 (a) 0.65 (b) 2.1 (c) 0.02 (d) 12.35
3. Estimate what part of the figures is coloured and hence find the per cent which is coloured.



(i)



(ii)



(iii)

4. Find:
 (a) 15% of 250 (b) 1% of 1 hour (c) 20% of ₹ 2500 (d) 75% of 1 kg
5. Find the whole quantity if
 (a) 5% of it is 600. (b) 12% of it is ₹ 1080. (c) 40% of it is 500 km.
 (d) 70% of it is 14 minutes. (e) 8% of it is 40 litres.
6. Convert given per cents to decimal fractions and also to fractions in simplest forms:
 (a) 25% (b) 150% (c) 20% (d) 5%
7. In a city, 30% are females, 40% are males and remaining are children. What per cent are children?
8. Out of 15,000 voters in a constituency, 60% voted. Find the percentage of voters who did not vote. Can you now find how many actually did not vote?
9. Meeta saves ₹ 4000 from her salary. If this is 10% of her salary. What is her salary?
10. A local cricket team played 20 matches in one season. It won 25% of them. How many matches did they win?

7.2.3 Ratios to Percents

Sometimes, parts are given to us in the form of ratios and we need to convert those to percentages. Consider the following example:

EXAMPLE 8 Reena's mother said, to make *idlis*, you must take two parts rice and one part *urad dal*. What percentage of such a mixture would be rice and what percentage would be *urad dal*?

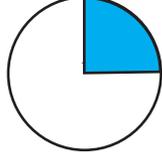
SOLUTION In terms of ratio we would write this as Rice : *Urad dal* = 2 : 1.

Now, $2 + 1 = 3$ is the total of all parts. This means $\frac{2}{3}$ part is rice and $\frac{1}{3}$ part is *urad dal*.

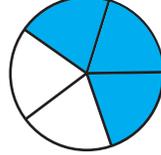
Then, percentage of rice would be $\frac{2}{3} \times 100\% = \frac{200}{3} = 66\frac{2}{3}\%$.

Percentage of *urad dal* would be $\frac{1}{3} \times 100\% = \frac{100}{3} = 33\frac{1}{3}\%$.

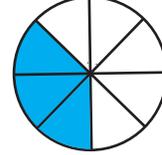
2. ఇవ్వబడ్డ దశాంశ భిన్నాలను శాతాలుగా మార్చండి.
 (a) 0.65 (b) 2.1 (c) 0.02 (d) 12.35
3. బొమ్మలలో ఎంత భాగానికి రంగు వేయబడిందో అంచనా వేయండి, మరియు దాని నుండి ఎంత శాతం రంగు వేయబడిందో కనుక్కోండి.



(i)



(ii)



(iii)

4. కనుగొనండి:
 (a) 250 లో 15% (b) 1 గంటలో 1% (c) ₹ 2500 లో 20% (d) 1 కి.గ్రా.లో 75%
5. క్రింది వాటిలో మొత్తం పరిమాణాన్ని కనుగొనండి.
 (a) 5% విలువ 600 అయితే (b) 12% విలువ ₹1080 అయితే (c) 40% విలువ 500 కి.మీ. అయితే
 (d) 70% విలువ 14 నిమిషాలు అయితే (e) 8% విలువ 40 లీటర్లు అయితే
6. ఇవ్వబడ్డ శాతాలను దశాంశ భిన్నాలుగా మరియు సుక్ష్మ రూపాల్లో భిన్నాలుగా మార్చండి:
 (a) 25% (b) 150% (c) 20% (d) 5%
7. ఒక నగరంలో, 30% మంది మహిళలు, 40% మంది పురుషులు మరియు మిగిలినవారు పిల్లలు. పిల్లలు ఎంత శాతం ఉన్నారు?
8. ఒక నియోజకవర్గంలో 15,000 మంది ఓటర్లలో 60% మంది ఓటు వేశారు. ఓటు వేయని ఓటర్ల శాతాన్ని కనుగొనండి. వాస్తవానికి ఎంతమంది ఓటు వేయలేదో మీరు ఇప్పుడు కనుగొనగలరా?
9. మీటా తన జీతంలో ₹4000 ఆదా చేస్తుంది. ఇది ఆమె జీతంలో 10% అయితే, ఆమె జీతం ఎంత?
10. ఒక స్థానిక క్రికెట్ జట్టు ఒకే సీజన్ లో 20 మ్యాచ్ లు ఆడింది. అందులో 25% గెలిచింది. వారు ఎన్నిమ్యాచ్ లో గెలిచారు?

7.2.3 నిష్పత్తుల నుండి శాతాలు

కొన్నిసార్లు, భాగాలు నిష్పత్తుల రూపంలో మనకు ఇవ్వబడతాయి మరియు మనము వాటిని శాతాలుగా మార్చాలి. ఈ క్రింది ఉదాహరణను పరిశీలించండి:

ఉదాహరణ 8 ఇడ్లీలు తయారు చేయడానికి, రెండు భాగాలు బియ్యం మరియు ఒక భాగం మినపప్పు తీసుకోవాలి అని రీనా తల్లి చెప్పింది, అటువంటి మిశ్రమంలో ఎంత శాతం బియ్యం మరియు ఎంత శాతం మినపప్పు ఉంటుంది?

సాధన నిష్పత్తి పరంగా దీనిని బియ్యం : మినపప్పు = 2 : 1 గా రాస్తాము.

ఇప్పుడు, అన్ని భాగాల మొత్తం $2 + 1 = 3$ దీని అర్థం $\frac{2}{3}$ భాగం బియ్యం మరియు $\frac{1}{3}$ భాగం మినపప్పు.

అప్పుడు, బియ్యం శాతం $\frac{2}{3} \times 100\% = \frac{200}{3} = 66\frac{2}{3}\%$.

మినపప్పు శాతం $\frac{1}{3} \times 100\% = \frac{100}{3} = 33\frac{1}{3}\%$.

EXAMPLE 9 If ₹ 250 is to be divided amongst Ravi, Raju and Roy, so that Ravi gets two parts, Raju three parts and Roy five parts. How much money will each get? What will it be in percentages?

SOLUTION The parts which the three boys are getting can be written in terms of ratios as 2 : 3 : 5. Total of the parts is $2 + 3 + 5 = 10$.

Amounts received by each

Percentages of money for each

$$\frac{2}{10} \times ₹ 250 = ₹ 50$$

$$\text{Ravi gets } \frac{2}{10} \times 100\% = 20\%$$

$$\frac{3}{10} \times ₹ 250 = ₹ 75$$

$$\text{Raju gets } \frac{3}{10} \times 100\% = 30\%$$

$$\frac{5}{10} \times ₹ 250 = ₹ 125$$

$$\text{Roy gets } \frac{5}{10} \times 100\% = 50\%$$

TRY THESE

1. Divide 15 sweets between Manu and Sonu so that they get 20 % and 80 % of them respectively.
2. If angles of a triangle are in the ratio 2 : 3 : 4. Find the value of each angle.



7.2.4 Increase or Decrease as Per Cent

There are times when we need to know the increase or decrease in a certain quantity as percentage. For example, if the population of a state increased from 5,50,000 to 6,05,000. Then the increase in population can be understood better if we say, the population increased by 10 %.

How do we convert the increase or decrease in a quantity as a percentage of the initial amount? Consider the following example.

EXAMPLE 10 A school team won 6 games this year against 4 games won last year. What is the per cent increase?

SOLUTION The increase in the number of wins (or amount of change) = $6 - 4 = 2$.

$$\begin{aligned} \text{Percentage increase} &= \frac{\text{amount of change}}{\text{original amount or base}} \times 100 \\ &= \frac{\text{increase in the number of wins}}{\text{original number of wins}} \times 100 = \frac{2}{4} \times 100 = 50 \end{aligned}$$

EXAMPLE 11 The number of illiterate persons in a country decreased from 150 lakhs to 100 lakhs in 10 years. What is the percentage of decrease?

SOLUTION Original amount = the number of illiterate persons initially = 150 lakhs.

ఉదాహరణ 9 ₹ 250 లను రవి, రాజు, రాయ్ ల మధ్య పంచాల్ని వస్తే, రవికి రెండు భాగాలు, రాజుకు మూడు భాగాలు మరియు రాయ్ కు ఐదు భాగాలు లభిస్తాయి. ప్రతి ఒక్కరికి ఎంత డబ్బు లభిస్తుంది? ఇది శాతాలలో ఎంత ఉంటుంది?

సాధన ముగ్గురు బాలురు పొందుతున్న భాగాలను నిష్పత్తుల పరంగా రాయగా 2 : 3 : 5. భాగాల మొత్తం $2 + 3 + 5 = 10$.

ప్రతి ఒక్కరూ అందుకున్న డబ్బు

ప్రతి ఒక్కరి డబ్బు శాతం

$$\frac{2}{10} \times ₹ 250 = ₹ 50$$

$$\text{రవి } \frac{2}{10} \times 100\% = 20\%$$

$$\frac{3}{10} \times ₹ 250 = ₹ 75$$

$$\text{రాజు } \frac{3}{10} \times 100\% = 30\%$$

$$\frac{5}{10} \times ₹ 250 = ₹ 125$$

$$\text{రాయ్ } \frac{5}{10} \times 100\% = 50\%$$

ప్రయత్నించండి

1. మను మరియు సోను మధ్య 15 స్వీట్లను వరుసగా 20% మరియు 80% పొందేటట్లు విభజించండి.
2. త్రిభుజం యొక్క కోణాలు 2 : 3 : 4 నిష్పత్తిలో ఉంటే, ప్రతి కోణం విలువను కనుగొనండి.



7.2.4 శాతంలో పెరుగుదల మరియు లేదా తగ్గుదల

ఒక నిర్దిష్ట రాశిలో పెరుగుదల లేదా తగ్గుదల శాతాన్ని మనం తెలుసుకోవలసిన సందర్భాలు ఉంటాయి. ఉదాహరణకు, ఒక రాష్ట్ర జనాభా 5,50,000 నుండి 6,05,000 కు పెరిగితే. అప్పుడు జనాభా పెరుగుదల 10% పెరిగిందని మనం చెబితే మరింత మెరుగ్గా అర్థం చేసుకోవచ్చు.

ఒక రాశిలో పెరుగుదల లేదా తగ్గుదలను ప్రారంభ మొత్తంలో ఒక శాతంగా మనం ఎలా మార్చగలం? ఈ క్రింది ఉదాహరణను పరిశీలించండి.

ఉదాహరణ 10 ఒక పాఠశాల జట్టు గత సంవత్సరం 4 ఆటలను గెలవగా ఈ సంవత్సరం 6 ఆటలను గెలుచుకుంది. పెరుగుదల శాతం ఎంత?

సాధన విజయాల సంఖ్యలో పెరుగుదల (లేదా మొత్తం లో మార్పు) = $6 - 4 = 2$.

$$\text{పెరుగుదల శాతం} = \frac{\text{పెరుగుదలలో మార్పు}}{\text{అసలు విలువ}} \times 100$$

$$= \frac{\text{విజయాల సంఖ్యలో పెరుగుదల}}{\text{అసలు విజయాల సంఖ్య}} \times 100 = \frac{2}{4} \times 100 = 50$$

ఉదాహరణ 11 ఒక దేశంలో 10 సంవత్సరాలలో నిరక్షరాస్యుల సంఖ్య 150 లక్షల నుండి 100 లక్షలకు తగ్గిపోయింది. తగ్గుదల శాతం ఎంత?

సాధన అసలు విలువ = ప్రారంభంలో నిరక్షరాస్యుల సంఖ్య = 150 లక్షలు.

Amount of change = decrease in the number of illiterate persons = $150 - 100 = 50$ lakhs
Therefore, the percentage of decrease

$$= \frac{\text{amount of change}}{\text{original amount}} \times 100 = \frac{50}{150} \times 100 = 33\frac{1}{3}$$

TRY THESE



- Find Percentage of increase or decrease:
 - Price of shirt decreased from ₹ 280 to ₹ 210.
 - Marks in a test increased from 20 to 30.
- My mother says, in her childhood petrol was ₹ 1 a litre. It is ₹ 52 per litre today. By what Percentage has the price gone up?

7.3 PRICES RELATED TO AN ITEM OR BUYING AND SELLING

I bought it for ₹ 600



and will sell it for ₹ 610

The buying price of any item is known as its **cost price**. It is written in short as CP.

The price at which you sell is known as the **selling price** or in short SP.

What would you say is better, to you sell the item at a lower price, same price or higher price than your buying price? You can decide whether the sale was profitable or not depending on the CP and SP. If $CP < SP$ then you made a profit = $SP - CP$.

If $CP = SP$ then you are in a no profit no loss situation.

If $CP > SP$ then you have a loss = $CP - SP$.

Let us try to interpret the statements related to prices of items.



- A toy bought for ₹ 72 is sold at ₹ 80.
- A T-shirt bought for ₹ 120 is sold at ₹ 100.
- A cycle bought for ₹ 800 is sold for ₹ 940.



Let us consider the first statement.

The buying price (or CP) is ₹ 72 and the selling price (or SP) is ₹ 80. This means SP is more than CP. Hence profit made = $SP - CP = ₹ 80 - ₹ 72 = ₹ 8$

Now try interpreting the remaining statements in a similar way.

7.3.1 Profit or Loss as a Percentage

The profit or loss can be converted to a percentage. It is always calculated on the CP.

For the above examples, we can find the profit % or loss %.

Let us consider the example related to the toy. We have $CP = ₹ 72$, $SP = ₹ 80$, Profit = ₹ 8. To find the percentage of profit, Neha and Shekhar have used the following methods.

మార్పు విలువ = నిరక్షరాస్యుల సంఖ్యలో తగ్గుదల = $150 - 100 = 50$ లక్షలు
కాబట్టి, తగ్గుదల శాతం

$$= \frac{\text{మార్పు విలువ}}{\text{అసలు విలువ}} \times 100 = \frac{50}{150} \times 100 = 33\frac{1}{3}$$

ప్రయత్నించండి



1. పెరుగుదల లేదా తగ్గుదల శాతాన్ని కనుగొనండి:
 - షర్టు ధర ₹ 280 నుండి ₹ 210కు తగ్గింది.
 - ఒక పరీక్షలో మార్కులు 20 నుంచి 30కి పెరిగాయి.
2. తన చిన్న తనంలో పెట్రోలు లీటరుకు ₹ 1 అని మా అమ్మ చెప్పింది. ఇది ఈ రోజు లీటరుకు ₹ 52 గా ఉంది. ధర ఎంత శాతం పెరిగింది?

7.3 ఒక వస్తువుకు సంబంధించిన ధర లేదా అమ్మకం మరియు కొనుగోలు

నేను దానిని ₹ 600లకు కొనుగోలు చేశాను.



మరియు దానిని ₹ 610కు అమ్ముతాను

ఏదైనా వస్తువు కొనుగోలు ధరను దాని కొన్న వెల అంటారు. దీనిని సంక్షిప్తంగా కొ.వె. గా రాస్తారు.

మీరు విక్రయించే ధరను అమ్మిన వెల లేదా క్లుప్తంగా అ.వె. అంటారు.

మీ కొనుగోలు ధర కంటే తక్కువ ధరకు, అదే ధరకు లేదా ఎక్కువ ధరకు వస్తువును విక్రయించడాన్ని ఎలా చెబితే బాగుంటుంది? కొ.వె. మరియు అ.వె. ని బట్టి అమ్మకం లాభదాయకంగా ఉందా లేదా అని మీరు నిర్ణయించుకోవచ్చు. ఒక వేళ కొ.వె. < అ.వె. అయితే అప్పుడు మీకు లాభం = కొ.వె. - అ.వె.

ఒక వేళ కొ.వె. = అ.వె. అయితే అప్పుడు మీకు లాభనష్టాలు లేని ఉండవు .

ఒకవేళ అ.వె > కొ.వె. అయితే అప్పుడు మీకు నష్టం = అ.వె. - కొ.వె.

మనం మొదటి వాక్యాన్ని పరిశీలిద్దాం.



- ₹ 72కు కొనుగోలు చేసిన ఒక బొమ్మ ₹ 80కు అమ్మబడింది.
- ₹ 120కు కొనుగోలు చేసిన టీ షర్టు ₹ 100కు అమ్మబడింది.
- ₹ 800కు కొనుగోలు చేసిన ఒక సైకిల్ ₹ 940కు అమ్మబడింది.



మనం మొదటి వాక్యాన్ని పరిశీలిద్దాం.

కొన్న వెల (లేదా CP) ₹ 72 మరియు అమ్మిన వెల(లేదా SP) ₹ 80. అంటే కొ.వె. కంటే అ.వె. ఎక్కువ. అందువల్ల చేయబడ్డ లాభం = $SP - CP = ₹ 80 - ₹ 72 = ₹ 8$

ఇప్పుడు మిగిలిన ప్రకటనలను ఇదే విధంగా విశ్లేషించడానికి ప్రయత్నించండి.

7.3.1 లాభశాతం లేదా నష్ట శాతం

లాభనష్టాలను శాతంగా మార్చవచ్చు. ఇది ఎల్లప్పుడూ కొ.వె.పై లెక్కించబడుతుంది. పై ఉదాహరణలలో మనం లాభ శాతం లేదా నష్ట శాతంలను కనుగొనవచ్చు.

బొమ్మకు సంబంధించిన ఉదాహరణను పరిశీలిద్దాం. కొ.వె = ₹ 72, అ.వె. = ₹ 80, లాభం = ₹ 8 ఉన్నాయి. లాభ శాతాన్ని కనుగొనడానికి, నేహ్ మరియు శేఖర్ ఈ క్రింది పద్ధతులను ఉపయోగించారు.

Neha does it this way

$$\text{Profit per cent} = \frac{\text{Profit}}{\text{CP}} \times 100 = \frac{8}{72} \times 100$$



$$= \frac{1}{9} \times 100 = 11\frac{1}{9}$$

Thus, the profit is ₹ 8 and profit Per cent is $11\frac{1}{9}$.

Similarly you can find the loss per cent in the second situation. Here, CP = ₹ 120, SP = ₹ 100.

Therefore, Loss = ₹ 120 – ₹ 100 = ₹ 20

$$\begin{aligned} \text{Loss per cent} &= \frac{\text{Loss}}{\text{CP}} \times 100 \\ &= \frac{20}{120} \times 100 \\ &= \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Shekhar does it this way

On ₹ 72 the profit is ₹ 8

$$\text{On ₹ 100, profit} = \frac{8}{72} \times 100$$

$$= 11\frac{1}{9}. \text{ Thus, profit per cent} = 11\frac{1}{9}$$

On ₹ 120, the loss is ₹ 20
So on ₹ 100, the loss

$$= \frac{20}{120} \times 100 = \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3}$$

Thus, loss per cent is $16\frac{2}{3}$

Try the last case.

Now we see that given any two out of the three quantities related to prices that is, CP, SP, amount of Profit or Loss or their percentage, we can find the rest.

EXAMPLE 12 The cost of a flower vase is ₹ 120. If the shopkeeper sells it at a loss of 10%, find the price at which it is sold.

SOLUTION We are given that CP = ₹ 120 and Loss per cent = 10. We have to find the SP.

Sohan does it like this

Loss of 10% means if CP is ₹ 100,
Loss is ₹ 10

Therefore, SP would be

$$₹ (100 - 10) = ₹ 90$$

When CP is ₹ 100, SP is ₹ 90.

Therefore, if CP were ₹ 120 then

$$\text{SP} = \frac{90}{100} \times 120 = ₹ 108$$

Anandi does it like this

Loss is 10% of the cost price
= 10% of ₹ 120

$$= \frac{10}{100} \times 120 = ₹ 12$$

Therefore

$$\begin{aligned} \text{SP} &= \text{CP} - \text{Loss} \\ &= ₹ 120 - ₹ 12 = ₹ 108 \end{aligned}$$

Thus, by both methods we get the SP as ₹ 108.

నేహా చేసిన పద్ధతి

$$\begin{aligned} \text{లాభం శాతం} &= \frac{\text{లాభం}}{\text{కొ.వె.}} \times 100 = \frac{8}{72} \times 100 \\ &= \frac{1}{9} \times 100 = 11\frac{1}{9} \end{aligned}$$

ఆ విధంగా, లాభం ₹ 8 మరియు లాభశాతం $11\frac{1}{9}$.

శేఖర్ చేసిన పద్ధతి

₹ 72 పై లాభం ₹ 8

$$\text{₹ 100, పై లాభం} = \frac{8}{72} \times 100$$

$$= 11\frac{1}{9}. \text{ ఆ విధంగా లాభశాతం} = 11\frac{1}{9}$$



ఇదే విధంగా మీరు రెండవ సందర్భంలో నష్టశాతం కనుగొనవచ్చు. ఇక్కడ, కొ.వె. = ₹ 120, అ.వె. = ₹ 100.

$$\text{కావున, నష్టం} = ₹ 120 - ₹ 100 = ₹ 20$$

$$\begin{aligned} \text{నష్టశాతం} &= \frac{\text{నష్టం}}{\text{కొ.వె.}} \times 100 \\ &= \frac{20}{120} \times 100 \\ &= \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{₹ 120 పై నష్టం ₹ 20} \\ \text{కావున, ₹ 100 పై నష్టం} \\ &= \frac{20}{120} \times 100 = \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3} \\ \text{ఆ విధంగా, నష్టశాతం } 16\frac{2}{3} \end{aligned}$$

చివరి సందర్భాన్ని ప్రయత్నించండి.

కొన్నవెల, అమ్మినవెల, లాభం లేదా నష్టం లేదా వాటి శాతం వంటి ధరలకు సంబంధించిన మూడు విలువలలో ఏవైనా రెండింటిని మనకు ఇచ్చినప్పుడు, మిగిలినది కనుగొనవచ్చు.

ఉదాహరణ 12 ఒక పూల కుండీ ఖరీదు ₹ 120. ఒకవేళ దుకాణదారుడు దానిని 10% నష్టానికి అమ్మితే, దానిని ఏ ధరకు అమ్మాడో కనుగొనండి.

సాధన కొన్నవెల = ₹ 120 మరియు నష్టం శాతం = 10. అని మనకు ఇవ్వబడింది. మనము అ.వె. కనుగొనాలి.

సోహన్ ఇలా చేశాడు

నష్టం 10% అనగా కొ.వె. ₹ 100 అయిన, నష్టం ₹ 10

అందువల్ల, అమ్మినవెల

$$₹ (100 - 10) = ₹ 90$$

కొ.వె. ₹ 100, అయిన అ.వె ₹ 90.

అందువల్ల, కొ.వె. ₹ 120 అయిన

$$\text{అ.వె.} = \frac{90}{100} \times 120 = ₹ 108$$

ఆనంది ఇలా చేసింది

$$\begin{aligned} \text{కొ.వె. లో నష్టం } 10\% \\ &= ₹ 120 \text{లో } 10\% \end{aligned}$$

$$= \frac{10}{100} \times 120 = ₹ 12$$

అందువల్ల,

$$\begin{aligned} \text{అ.వె.} &= \text{కొ.వె.} - \text{నష్టం} \\ &= ₹ 120 - ₹ 12 = ₹ 108 \end{aligned}$$

అందువల్ల రెండు పద్ధతుల ద్వారా అ.వె. ₹ 108.



EXAMPLE 13 Selling price of a toy car is ₹ 540. If the profit made by shopkeeper is 20%, what is the cost price of this toy?

SOLUTION We are given that $SP = ₹ 540$ and the Profit = 20%. We need to find the CP.

Amina does it like this

20% profit will mean if CP is ₹ 100, profit is ₹ 20

Therefore, $SP = 100 + 20 = 120$

Now, when SP is ₹ 120, then CP is ₹ 100.

Therefore, when SP is ₹ 540,

then $CP = \frac{100}{120} \times 540 = ₹ 450$

Arun does it like this

Profit = 20% of CP and $SP = CP + \text{Profit}$

So, $540 = CP + 20\% \text{ of CP}$

$$= CP + \frac{20}{100} \times CP = \left[1 + \frac{1}{5} \right] CP$$

$$= \frac{6}{5} CP. \text{ Therefore, } 540 \times \frac{5}{6} = CP$$

or ₹ 450 = CP

Thus, by both methods, the cost price is ₹ 450.

TRY THESE



1. A shopkeeper bought a chair for ₹ 375 and sold it for ₹ 400. Find the gain Percentage.
2. Cost of an item is ₹ 50. It was sold with a profit of 12%. Find the selling price.
3. An article was sold for ₹ 250 with a profit of 5%. What was its cost price?
4. An item was sold for ₹ 540 at a loss of 5%. What was its cost price?

7.4 CHARGE GIVEN ON BORROWED MONEY OR SIMPLE INTEREST



Sohini said that they were going to buy a new scooter. Mohan asked her whether they had the money to buy it. Sohini said her father was going to take a loan from a bank. The money you borrow is known as **sum** borrowed or **principal**.

This money would be used by the borrower for some time before it is returned. For keeping this money for some time the borrower has to pay some extra money to the bank. This is known as **Interest**.

You can find the amount you have to pay at the end of the year by adding the sum borrowed and the interest. That is, **Amount = Principal + Interest**.

Interest is generally given in per cent for a period of one year. It is written as say 10% per year or per annum or in short as 10% p.a. (per annum).

10% p.a. means on every ₹ 100 borrowed, ₹ 10 is the interest you have to pay for one year. Let us take an example and see how this works.

EXAMPLE 14 Anita takes a loan of ₹ 5,000 at 15% per year as rate of interest. Find the interest she has to pay at the end of one year.



ఉదాహరణ 13

సాధన

బొమ్మ కారు అమ్మిన వెల ₹ 540. దుకాణదారుడి కి వచ్చిన లాభం 20% అయితే, ఈ బొమ్మ యొక్క కొన్న వెల ఎంత?
 అమ్మిన వెల = ₹ 540 మరియు లాభం = 20%. అని మనకు ఇవ్వబడింది. మనము కొన్న వెలని కనుగొనాలి .

అమీనా ఇలా చేసింది
 20% లాభం అంటే కొ.వె. ₹100 అయితే
 లాభం ₹ 20
 అందువల్ల, అ.వె. = 100 + 20 = 120
 ఇప్పుడు, అ.వె. ₹ 120,
 అప్పుడు కొ.వె. ₹ 100.
 అందువల్ల, అ.వె. ₹ 540,
 అప్పుడు కొ.వె. = $\frac{100}{120} \times 540 = ₹ 450$

అరుణ్ ఇలా చేశాడు
 లాభం = కొ.వె.లో 20% మరియు
 అ.వె. = కొ.వె. + లాభం, 540 = కొ.వె. + కొ.వె.యొక్క 20%

$$= కొ.వె. + \frac{20}{100} \times కొ.వె. = \left[1 + \frac{1}{5} \right] కొ.వె.$$

$$= \frac{6}{5} కొ.వె. అందువలన, 540 \times \frac{5}{6} = కొ.వె.$$

 లేదా ₹ 450 = అ.వె.

అందువల్ల రెండు పద్ధతుల ద్వారా కొన్న వెల ₹ 450.

ప్రయత్నించండి



1. ఒక దుకాణదారుడు ఒక కుర్చీని ₹375కు కొనుగోలు చేశాడు మరియు దానిని ₹400కు విక్రయించాడు. లాభ శాతాన్ని కనుగొనండి.
2. ఒక వస్తువు ఖరీదు ₹50. ఇది 12% లాభానికి అమ్మబడింది. అమ్మిన వెలను కనుగొనండి.
3. ఒక వస్తువు 5% లాభంతో ₹250 అమ్మబడింది. దాని కొన్నవెల ఎంత?
4. ఒక వస్తువు 5% నష్టంతో ₹540 అమ్మబడింది. దాని కొన్నవెల ఎంత?

7.4 తీసుకున్న డబ్బుపై సంకలన లేదా భారువడ్డి

వారు కొత్త స్కూటర్ కొనుగోలు చేయబోతున్నారని సోపాని చెప్పింది. దానిని కొనడానికి వారి వద్ద డబ్బు ఉందా అని మోహన్ ఆమెను అడిగాడు. తన తండ్రి బ్యాంకు నుండి రుణం తీసుకోబోతున్నాడని సోపాని చెప్పింది. మీరు తీసుకునే డబ్బును అప్పు మొత్తం లేదా అసలు అని అంటారు.



ఈ డబ్బును తిరిగి ఇవ్వడానికి ముందు రుణగ్రహీత కొంత కాలం పాటు ఉపయోగించు కుంటాడు. ఈ డబ్బును కొంతకాలం తన వద్ద ఉంచుకొనడానికి రుణగ్రహీత బ్యాంకుకు కొంత అదనపు డబ్బు చెల్లించాలి. దీనిని వడ్డీ అంటారు.

మీరు తీసుకున్న అసలు మరియు వడ్డీని సంకలన చేయడం ద్వారా సంవత్సరం చివరిలో మీరు చెల్లించాల్సిన మొత్తాన్ని కనుగొనవచ్చు. అంటే మొత్తం = అసలు + వడ్డీ.

వడ్డీ సాధారణంగా ఒక సంవత్సరం కాలానికి శాతంలో ఇవ్వబడుతుంది. ఇది సంవత్సరానికి 10% లేదా క్లుప్తంగా సంవత్సరానికి 10%.

సంవత్సరానికి 10% అంటే ప్రతి ₹100 రుణంపై, ₹10 అనేది మీరు ఒక సంవత్సరానికి చెల్లించాల్సిన వడ్డీ. ఇది ఎలా పనిచేస్తుందో ఒక ఉదాహరణ తీసుకుందాం.

ఉదాహరణ 14

అనిత ప్రతి సంవత్సరానికి 15% వడ్డీ రేటు చొప్పున ₹5,000 రుణాన్ని తీసుకుంది. ఒక సంవత్సరం చివరిలో ఆమె చెల్లించాల్సిన వడ్డీని కనుగొనండి.

SOLUTION The sum borrowed = ₹ 5,000, Rate of interest = 15% per year.

This means if ₹ 100 is borrowed, she has to pay ₹ 15 as interest for one year. If she has borrowed ₹ 5,000, then the interest she has to pay for one year

$$= ₹ \frac{15}{100} \times 5000 = ₹ 750$$

So, at the end of the year she has to give an amount of ₹ 5,000 + ₹ 750 = ₹ 5,750.

We can write a general relation to find interest for one year. Take P as the principal or sum and $R\%$ as Rate per cent per annum.

Now on every ₹ 100 borrowed, the interest paid is ₹ R

Therefore, on ₹ P borrowed, the interest paid for one year would be $\frac{R \times P}{100} = \frac{P \times R}{100}$.

7.4.1 Interest for Multiple Years

If the amount is borrowed for more than one year the interest is calculated for the period the money is kept for. For example, if Anita returns the money at the end of two years and the rate of interest is the same then she would have to pay twice the interest i.e., ₹ 750 for the first year and ₹ 750 for the second. This way of calculating interest where principal is not changed is known as **simple interest**. As the number of years increase the interest also increases. For ₹ 100 borrowed for 3 years at 18%, the interest to be paid at the end of 3 years is $18 + 18 + 18 = 3 \times 18 = ₹ 54$.

We can find the general form for simple interest for more than one year.

We know that on a principal of ₹ P at $R\%$ rate of interest per year, the interest paid for one year is $\frac{R \times P}{100}$. Therefore, interest I paid for T years would be

$$\frac{T \times R \times P}{100} = \frac{P \times R \times T}{100} \text{ or } \frac{PRT}{100}$$

And amount you have to pay at the end of T years is $A = P + I$

TRY THESE

1. ₹ 10,000 is invested at 5% interest rate p.a. Find the interest at the end of one year.
2. ₹ 3,500 is given at 7% p.a. rate of interest. Find the interest which will be received at the end of two years.
3. ₹ 6,050 is borrowed at 6.5% rate of interest p.a.. Find the interest and the amount to be paid at the end of 3 years.
4. ₹ 7,000 is borrowed at 3.5% rate of interest p.a. borrowed for 2 years. Find the amount to be paid at the end of the second year.



Just as in the case of prices related to items, if you are given any two of the three quantities in the relation $I = \frac{P \times T \times R}{100}$, you could find the remaining quantity.

సాధన

తీసుకున్న రుణం = ₹ 5,000, వడ్డీ రేటు = 15% సంవత్సరానికి

అంటే ₹100 రుణం తీసుకున్నట్లయితే, ఆమె ఒక సంవత్సరానికి ₹15 వడ్డీ చెల్లించాల్సి ఉంటుంది. ఒక వేళ ఆమె ₹ 5,000 రుణం తీసుకున్నట్లయితే, అప్పుడు ఆమె ఒక సంవత్సరానికి చెల్లించాల్సిన వడ్డీ

$$= ₹ \frac{15}{100} \times 5000 = ₹ 750$$

కాబట్టి, సంవత్సరం చివరిలో ఆమె ₹ 5,000 + ₹ 750 = ₹ 5,750 మొత్తాన్ని ఇవ్వాలి.

ఒక సంవత్సరానికి వడ్డీని కనుగొనడానికి మనం సాధారణ సంబంధాన్ని రాయవచ్చు. P ని అసలు లేదా మొత్తంగా మరియు $R\%$ ను సంవత్సరానికి రేటు శాతంగా తీసుకోండి.

ఇప్పుడు ప్రతి ₹ 100 రుణంపై, చెల్లించిన వడ్డీ ₹ R

అందువల్ల, ₹ P రుణంపై, ఒక సంవత్సరానికి చెల్లించబడిన వడ్డీ $\frac{R \times P}{100} = \frac{P \times R}{100}$.

7.4.1 బహుళ సంవత్సరాలకు వడ్డీ

ఒక వేళ ఒక సంవత్సరం కంటే ఎక్కువ కాలం రుణం తీసుకున్నట్లయితే, డబ్బు ఉంచిన కాలానికి వడ్డీ లెక్కించబడుతుంది. ఉదాహరణకు, అనిత రెండు సంవత్సరాల తరువాత డబ్బును తిరిగి ఇచ్చి, వడ్డీ రేటు ఒకే విధంగా ఉంటే అప్పుడు ఆమె రెట్టింపు వడ్డీ చెల్లించాల్సి ఉంటుంది. అనగా మొదటి సంవత్సరానికి ₹ 750 మరియు రెండవ సంవత్సరానికి ₹ 750. అసలు మారని చోట వడ్డీని లెక్కించే ఈ పద్ధతిని బారు వడ్డీ అంటారు. సంవత్సరాల సంఖ్య పెరిగేకొద్దీ వడ్డీ కూడా పెరుగుతుంది. సంవత్సరానికి 18% వడ్డీతో ₹100 రుణం తీసుకున్న, 3 సంవత్సరాల చివరల్లో చెల్లించాల్సిన వడ్డీ $18 + 18 + 18 = 3 \times 18 = ₹ 54$.

ఒక సంవత్సరం కంటే ఎక్కువ కాలం సాధారణ వడ్డీ కోసం సాధారణ రూపాన్ని మనం కనుగొనవచ్చు.

సంవత్సరానికి $R\%$ వడ్డీరేటు తో ₹ P యొక్క అసలుపై, వడ్డీ చెల్లించబడుతుందని మనకు తెలుసు. ఒక

సంవత్సరానికి చెల్లించవలసిన వడ్డీ $\frac{R \times P}{100}$. అందువల్ల, T సంవత్సరాల కొరకు చెల్లించాల్సిన వడ్డీ I

మరియు T సంవత్సరాల చివర మీరు చెల్లించాల్సిన మొత్తం $A = P + I$

$$\frac{T \times R \times P}{100} = \frac{P \times R \times T}{100} \text{ or } \frac{PRT}{100}$$

ప్రయత్నించండి

1. సంవత్సరానికి 5% వడ్డీ రేటుతో ₹10,000 పెట్టుబడి పెట్టబడింది. ఒక సంవత్సరం చివరిలో వడ్డీని కనుగొనండి.
2. సంవత్సరానికి 7% వడ్డీ రేటుతో ₹3,500 ఇవ్వబడింది. రెండు సంవత్సరాల తరువాత పొందే వడ్డీని కనుక్కోండి.
3. సంవత్సరానికి 6.5% వడ్డీ రేటుతో ₹6,050 రుణం తీసుకోబడింది. 3 సంవత్సరాల తరువాత చెల్లించాల్సిన వడ్డీ మరియు మొత్తాన్ని కనుగొనండి.
4. సంవత్సరానికి 3.5% వడ్డీ రేటుతో ₹ 7,000 రుణం తీసుకోబడింది. రెండవ సంవత్సరం చివరలో చెల్లించాల్సిన మొత్తాన్ని కనుగొనండి.



మస్తువులకు సంబంధించిన ధరల విషయంలో మాదిరిగానే $I = \frac{P \times T \times R}{100}$, సంబంధంలోని

రాశులు మూడింటిలో ఏవైనా రెండు ఇస్తే మిగిలిన రాశిని మీరు కనుగొనవచ్చు.

EXAMPLE 15 If Manohar pays an interest of ₹ 750 for 2 years on a sum of ₹ 4,500, find the rate of interest.

Solution 1	Solution 2
$I = \frac{P \times T \times R}{100}$ <p>Therefore, $750 = \frac{4500 \times 2 \times R}{100}$</p> <p>or $\frac{750}{45 \times 2} = R$</p> <p>Therefore, Rate = $8\frac{1}{3}\%$</p>	<p>For 2 years, interest paid is ₹ 750</p> <p>Therefore, for 1 year, interest paid ₹ $\frac{750}{2} = ₹ 375$</p> <p>On ₹ 4,500, interest paid is ₹ 375</p> <p>Therefore, on ₹ 100, rate of interest paid</p> $= \frac{375 \times 100}{4500} = 8\frac{1}{3}\%$

TRY THESE



- You have ₹ 2,400 in your account and the interest rate is 5%. After how many years would you earn ₹ 240 as interest.
- On a certain sum the interest paid after 3 years is ₹ 450 at 5% rate of interest per annum. Find the sum.

EXERCISE 7.2



- Tell what is the profit or loss in the following transactions. Also find profit per cent or loss per cent in each case.
 - Gardening shears bought for ₹ 250 and sold for ₹ 325.
 - A refrigerator bought for ₹ 12,000 and sold at ₹ 13,500.
 - A cupboard bought for ₹ 2,500 and sold at ₹ 3,000.
 - A skirt bought for ₹ 250 and sold at ₹ 150.
- Convert each part of the ratio to percentage:
 - 3 : 1
 - 2 : 3 : 5
 - 1 : 4
 - 1 : 2 : 5
- The population of a city decreased from 25,000 to 24,500. Find the percentage decrease.
- Arun bought a car for ₹ 3,50,000. The next year, the price went upto ₹ 3,70,000. What was the Percentage of price increase?
- I buy a T.V. for ₹ 10,000 and sell it at a profit of 20%. How much money do I get for it?
- Juhi sells a washing machine for ₹ 13,500. She loses 20% in the bargain. What was the price at which she bought it?
- Chalk contains calcium, carbon and oxygen in the ratio 10:3:12. Find the percentage of carbon in chalk.
 - If in a stick of chalk, carbon is 3g, what is the weight of the chalk stick?

ఉదాహరణ 15 మనోహర్ ₹4,500, మొత్తంపై 2 సంవత్సరాలకు ₹750 వడ్డీని చెల్లిస్తే వడ్డీరేటును కనుగొనండి.

సాధన 1	సాధన 2
$I = \frac{P \times T \times R}{100}$ $750 = \frac{4500 \times 2 \times R}{100}$ $\text{లేదా } \frac{100}{750} = R$ $\text{వడ్డీ రేటు} = 8\frac{1}{3}\%$	<p>2 సం॥కు చెల్లించిన వడ్డీ ₹ 750</p> <p>కావున, 1సం॥ చెల్లించిన వడ్డీ $\frac{750}{2} = ₹ 375$</p> <p>₹ 4,500, చెల్లించిన వడ్డీ ₹ 375</p> <p>అందువల్ల, ₹ 100, పై చెల్లించిన వడ్డీ రేటు</p> $= \frac{375 \times 100}{4500} = 8\frac{1}{3}\%$

ప్రయత్నించండి



1. మీ ఖాతాలో ₹2,400 ఉంది మరియు వడ్డీరేటు 5%. ఎన్ని సంవత్సరాలకి మీరు ₹240 వడ్డీని పొందుతారు.
2. కొంత మొత్తంపై 5% వడ్డీ రేటుతో 3 సంవత్సరాల తర్వాత చెల్లించిన వడ్డీ ₹450 అయితే అసలు కనుక్కోండి?

అభ్యాసం 7. 2



1. దిగువ లావాదేవీల్లో లాభము లేదా నష్టము ఎంతో చెప్పండి. ప్రతి సందర్భంలో లాభం శాతం లేదా నష్టం శాతం కూడా కనుగొనండి.
 - (a) గార్డెనింగ్ షియర్ లు ₹250 కు కొనుగోలు చేయబడ్డాయి మరియు ₹325 కు విక్రయించబడ్డాయి.
 - (b) ఒక రిఫ్రిజిరేటర్ ₹12,000కు కొనుగోలు చేశాడు మరియు ₹13,500కు విక్రయించాడు.
 - (c) ఒక అల్మారా ₹ 2,500కు కొనుగోలు చేయబడింది మరియు ₹ 3,000కు విక్రయించబడింది.
 - (d) ఒక స్పర్ట్ ₹250కు కొనుగోలు చేయబడింది మరియు ₹150కు విక్రయించబడింది.
2. క్రింది నిష్పత్తులను శాతాలలోకి మార్చండి:
 - (a) 3 : 1
 - (b) 2 : 3 : 5
 - (c) 1:4
 - (d) 1 : 2 : 5
3. ఒక నగర జనాభా 25,000 నుండి 24,500 కు తగ్గింది. తగ్గుదల శాతాన్ని కనుగొనండి.
4. అరుణ్ ₹ 3,50,000లకు ఒక కారును కొనుగోలు చేశాడు. ఆ మరుసటి ఏడాది ధర ₹ 3,70,000 పెరిగింది. ధరలో పెరుగుదల శాతం ఎంత?
5. నేను ఒక టి.వి ₹10,000కు కొనుగోలు చేశాను. ₹10,000కు మరియు దానిని 20% లాభానికి విక్రయించాను. దీనితో నేను ఎంత డబ్బును పొందుతాను?
6. జూహీ ఒక వాషింగ్ మెషీన్ ని ₹ 13,500లకు విక్రయిస్తుంది. బేరంలో ఆమె 20% కోల్పోతుంది. ఆమె దానిని ఎంత ధరకు కొనుగోలు చేసింది?
7. (i) సుద్ధ ముక్కలో కాల్షియం, కార్బన్ మరియు ఆక్సిజన్ 10:3:12 నిష్పత్తిలో ఉంటాయి. సుద్ధ ముక్కలో కార్బన్ శాతాన్ని కనుగొనండి.
(ii) సుద్ధ ముక్కలో కార్బన్ 3 గ్రాములు అయితే, సుద్ధ ముక్క యొక్క బరువు ఎంత?

8. Amina buys a book for ₹ 275 and sells it at a loss of 15%. How much does she sell it for?
9. Find the amount to be paid at the end of 3 years in each case:
(a) Principal = ₹ 1,200 at 12% p.a. (b) Principal = ₹ 7,500 at 5% p.a.
10. What rate gives ₹ 280 as interest on a sum of ₹ 56,000 in 2 years?
11. If Meena gives an interest of ₹ 45 for one year at 9% rate p.a.. What is the sum she has borrowed?

WHAT HAVE WE DISCUSSED?

1. A way of comparing quantities is percentage. Percentages are numerators of fractions with denominator 100. Per cent means per hundred.
For example 82% marks means 82 marks out of hundred.
2. Fractions can be converted to percentages and vice-versa.
For example, $\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \times 100\%$ whereas, $75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$
3. Decimals too can be converted to percentages and vice-versa.
For example, $0.25 = 0.25 \times 100\% = 25\%$
4. Percentages are widely used in our daily life,
 - (a) We have learnt to find exact number when a certain per cent of the total quantity is given.
 - (b) When parts of a quantity are given to us as ratios, we have seen how to convert them to percentages.
 - (c) The increase or decrease in a certain quantity can also be expressed as percentage.
 - (d) The profit or loss incurred in a certain transaction can be expressed in terms of percentages.
 - (e) While computing interest on an amount borrowed, the rate of interest is given in terms of per cents. For example, ₹ 800 borrowed for 3 years at 12% per annum.



8. అమీనా ఒక వుస్తకాన్ని ₹ 275కు కొనుగోలు చేసింది మరియు దానిని 15% నష్టంతో విక్రయించింది. ఆమె దానిని ఎంతకు విక్రయించింది.
9. ప్రతి సందర్భంలోనూ 3 సంవత్సరాల తరువాత చెల్లించాల్సిన మొత్తాన్ని కనుగొనండి:
(a) అసలు = ₹1,200 సంవత్సరానికి 12% వడ్డీ. (b) అసలు = ₹7,500 సంవత్సరానికి 5% వడ్డీ
10. 2 సంవత్సరాలలో ₹56,000 మొత్తంపై ఏ రేటున ₹280 వడ్డీని ఇస్తుంది?
11. సంవత్సరానికి 9% వడ్డీరేటుతో ₹45 వడ్డీ చెల్లిస్తే ఆమె తీసుకున్న మొత్తం రుణం ఎంత?

మనం ఏమి చర్చించాం?

1. రాశులను పోల్చడానికి ఒక పద్ధతి శాతం. శాతాలు అనేవి 100 హారంగా కలిగిన భిన్నాలు. శాతం అంటే వందకు అని అర్థం.
ఉదాహరణకు 82% మార్కులు అంటే వందకు 82 మార్కులు.
2. భిన్నాలను శాతాలుగా మార్చవచ్చు మరియు దీనికి విపర్యయంగా మార్చవచ్చు. విపర్యయము కూడా సత్యము.

$$\text{ఉదాహరణకు, } \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \times 100\% \text{ అలాగే, } 75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$$

3. దశాంశాలను కూడా శాతాలుగా మార్చవచ్చు మరియు దీనికి విపర్యయం కూడా నిజం.
ఉదాహరణకు, $0.25 = 0.25 \times 100\% = 25\%$
4. శాతాలను మన దైనందిన జీవితంలో విస్తృతంగా ఉపయోగిస్తారు,
(a) మొత్తం పరిమాణంలో ఒక నిర్దిష్ట శాతం ఇచ్చినప్పుడు ఖచ్చితమైన సంఖ్యను కనుగొనడం మనము నేర్చుకున్నాము.
(b) ఒక పరిమాణం యొక్క భాగాలను మనకు నిష్పత్తులుగా ఇచ్చినప్పుడు, వాటిని శాతాలుగా ఎలా మార్చాలో మనం చూశాము.
(c) ఒక నిర్దిష్ట పరిమాణంలో పెరుగుదల లేదా తగ్గుదలను శాతంలాగా కూడా వ్యక్తీకరించవచ్చు.
(d) ఒక నిర్దిష్ట లావాదేవీలో కలిగే లాభం లేదా నష్టాన్ని శాతాల పరంగా వ్యక్తీకరించవచ్చు.
(e) రుణం తీసుకున్న మొత్తంపై వడ్డీని లెక్కించేటప్పుడు, వడ్డీ రేటు శాతపరంగా ఇవ్వబడుతుంది. ఉదాహరణకు, ₹ 800లు సంవత్సరానికి 12% చొప్పున 3 సంవత్సరాలపాటు రుణం తీసుకున్నారు.

ANSWERS



EXERCISE 1.1

- One such pair could be:
 (a) $-10, 3$ (b) $-6, 4; (-6 - 4 = -10)$ (c) $-3, 3$
- One such pair could be:
 (a) $-2, -10; [-2 - (-10) = 8]$ (b) $-6, 1$
 (c) $-1, 2; (-1 - 2 = -3)$
- Scores of both the teams are same, i.e., -30 ; Yes
- (i) -5 (ii) 0 (iii) -17 (iv) -7
 (v) -3

EXERCISE 1.2

- (a) -3 (b) -225 (c) 630 (d) 316 (e) 0
 (f) 1320 (g) 162 (h) -360 (i) -24 (j) 36
- (i) $-a$ (ii) (a) 22 (b) -37 (c) 0
- $-1 \times 5 = -5, -1 \times 4 = -4 = -5 + 1, -1 \times 3 = -3 = -4 + 1,$
 $-1 \times 2 = -2 = -3 + 1, -1 \times 1 = -1 = -2 + 1, -1 \times 0 = 0 = -1 + 1$ so, $-1 \times (-1) = 0 + 1 = 1.$

EXERCISE 1.3

- (a) -3 (b) -10 (c) 4 (d) -1
 (e) -13 (f) 0 (g) 1 (h) -1 (i) 1
- (a) 1 (b) 75 (c) -206 (d) -1
 (e) -87 (f) -48 (g) -10 (h) -12
- $(-6, 2), (-12, 4), (12, -4), (9, -3), (-9, 3)$ (There could be many such pairs)
- 9 p.m.; -14°C 6. (i) 8 (ii) 13 7. 1 hour

EXERCISE 2.1

- (i) (d) (ii) (b) (iii) (a) (iv) (c)
- (i) (c) (ii) (a) (iii) (b)

జవాబులు



అభ్యాసం 1.1

- అటువంటి జత ఒకటి ఉండవచ్చు
(a) $-10, 3$ (b) $-6, 4; (-6 - 4 = -10)$ (c) $-3, 3$
- అటువంటి జత ఒకటి ఉండవచ్చు
(a) $-2, -10; [-2 - (-10) = 8]$ (b) $-6, 1$
(c) $-1, 2; (-1 - 2 = -3)$
- రెండు టీముల యొక్క స్కోర్లు సమానము, అనగా -30 ; అవును
- (i) -5 (ii) 0 (iii) -17 (iv) -7
(v) -3

అభ్యాసం 1.2

- (a) -3 (b) -225 (c) 630 (d) 316 (e) 0
(f) 1320 (g) 162 (h) -360 (i) -24 (j) 36
- (i) $-a$ (ii) (a) 22 (b) -37 (c) 0
- $-1 \times 5 = -5, -1 \times 4 = -4 = -5 + 1, -1 \times 3 = -3 = -4 + 1,$
 $-1 \times 2 = -2 = -3 + 1, -1 \times 1 = -1 = -2 + 1, -1 \times 0 = 0 = -1 + 1$ so, $-1 \times (-1) = 0 + 1 = 1.$

అభ్యాసం 1.3

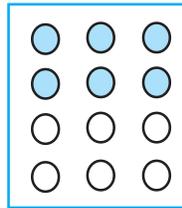
- (a) -3 (b) -10 (c) 4 (d) -1
(e) -13 (f) 0 (g) 1 (h) -1 (i) 1
- (a) 1 (b) 75 (c) -206 (d) -1
(e) -87 (f) -48 (g) -10 (h) -12
- $(-6, 2), (-12, 4), (12, -4), (9, -3), (-9, 3)$ (అటువంటివి చాలా జతలు ఉండవచ్చును)
- రాత్రి 9 కి.; -14°C 6. (i) 8 (ii) 13 7. 1 గంట

అభ్యాసం 2.1

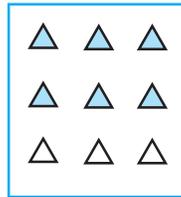
- (i) (d) (ii) (b) (iii) (a) (iv) (c)
- (i) (c) (ii) (a) (iii) (b)

3. (i) $4\frac{1}{5}$ (ii) $1\frac{1}{3}$ (iii) $1\frac{5}{7}$ (iv) $1\frac{1}{9}$ (v) $2\frac{2}{3}$
 (vi) 15 (vii) $6\frac{2}{7}$ (viii) 16 (ix) $4\frac{1}{3}$ (x) 9

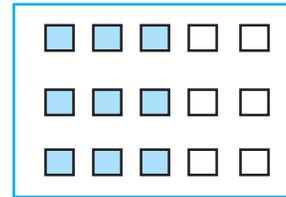
4. One way of doing this is:



(i)



(ii)



(iii)

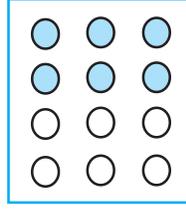
5. (a) (i) 12 (ii) 23 (b) (i) 12 (ii) 18 (c) (i) 12 (ii) 27 (d)(i) 16 (ii) 28
 6. (a) $15\frac{3}{5}$ (b) $33\frac{3}{4}$ (c) $15\frac{3}{4}$ (d) $25\frac{1}{3}$
 (e) $19\frac{1}{2}$ (f) $27\frac{1}{5}$
 7. (a) (i) $1\frac{3}{8}$ (ii) $2\frac{1}{9}$ (b) (i) $2\frac{19}{48}$ (ii) $6\frac{1}{24}$ 8. (i) 2 litres (ii) $\frac{3}{5}$

EXERCISE 2.2

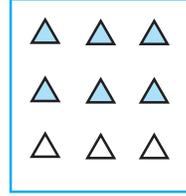
1. (i) (a) $\frac{1}{16}$ (b) $\frac{3}{20}$ (c) $\frac{1}{3}$ (ii) (a) $\frac{2}{63}$ (b) $\frac{6}{35}$ (c) $\frac{3}{70}$
 2. (i) $1\frac{7}{9}$ (ii) $\frac{2}{9}$ (iii) $\frac{9}{16}$ (iv) $1\frac{2}{25}$
 (v) $\frac{5}{8}$ (vi) $1\frac{13}{20}$ (vii) $1\frac{13}{35}$
 3. (i) $2\frac{1}{10}$ (ii) $4\frac{44}{45}$ (iii) 8 (iv) $2\frac{1}{42}$ (v) $1\frac{33}{35}$ (vi) $7\frac{4}{5}$ (vii) $2\frac{1}{7}$
 4. (i) $\frac{3}{5}$ of $\frac{5}{8}$ (ii) $\frac{1}{2}$ of $\frac{6}{7}$ 5. $2\frac{1}{4}$ m 6. $10\frac{1}{2}$ hours 7. 44 km
 8. (a) (i) $\frac{5}{10}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (b) (i) $\frac{8}{15}$ (ii) $\frac{8}{15}$

3. (i) $4\frac{1}{5}$ (ii) $1\frac{1}{3}$ (iii) $1\frac{5}{7}$ (iv) $1\frac{1}{9}$ (v) $2\frac{2}{3}$
 (vi) 15 (vii) $6\frac{2}{7}$ (viii) 16 (ix) $4\frac{1}{3}$ (x) 9

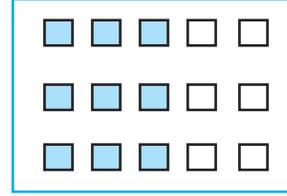
4. ఇది చేయడానికి ఒక పద్ధతి:



(i)



(ii)



(iii)

5. (a) (i) 12 (ii) 23 (b) (i) 12 (ii) 18 (c) (i) 12 (ii) 27 (d)(i) 16 (ii) 28
 6. (a) $15\frac{3}{5}$ (b) $33\frac{3}{4}$ (c) $15\frac{3}{4}$ (d) $25\frac{1}{3}$
 (e) $19\frac{1}{2}$ (f) $27\frac{1}{5}$
 7. (a) (i) $1\frac{3}{8}$ (ii) $2\frac{1}{9}$ (b) (i) $2\frac{19}{48}$ (ii) $6\frac{1}{24}$ 8. (i) 2 లీటర్లు (ii) $\frac{3}{5}$

అభ్యాసం 2.2

1. (i) (a) $\frac{1}{16}$ (b) $\frac{3}{20}$ (c) $\frac{1}{3}$ (ii) (a) $\frac{2}{63}$ (b) $\frac{6}{35}$ (c) $\frac{3}{70}$
 2. (i) $1\frac{7}{9}$ (ii) $\frac{2}{9}$ (iii) $\frac{9}{16}$ (iv) $1\frac{2}{25}$
 (v) $\frac{5}{8}$ (vi) $1\frac{13}{20}$ (vii) $1\frac{13}{35}$
 3. (i) $2\frac{1}{10}$ (ii) $4\frac{44}{45}$ (iii) 8 (iv) $2\frac{1}{42}$ (v) $1\frac{33}{35}$ (vi) $7\frac{4}{5}$ (vii) $2\frac{1}{7}$
 4. (i) $\frac{5}{8}$ లో $\frac{3}{5}$ (ii) $\frac{6}{7}$ లో $\frac{1}{2}$ 5. $2\frac{1}{4}$ మీ. 6. $10\frac{1}{2}$ గం|| 7. 44 కిలోమీటర్లు
 8. (a) (i) $\frac{5}{10}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (b) (i) $\frac{8}{15}$ (ii) $\frac{8}{15}$

EXERCISE 2.3

1. (i) 16 (ii) $\frac{84}{5}$ (iii) $\frac{24}{7}$ (iv) $\frac{3}{2}$ (v) $\frac{9}{7}$ (vi) $\frac{7}{5}$
2. (i) $\frac{7}{3}$ (improper fraction) (ii) $\frac{8}{5}$ (improper fraction) (iii) $\frac{7}{9}$ (proper fraction)
 (iv) $\frac{5}{6}$ (proper fraction) (v) $\frac{7}{12}$ (proper fraction) (vi) 8 (whole number)
 (vii) 11 (whole number)
3. (i) $\frac{7}{6}$ (ii) $\frac{4}{45}$ (iii) $\frac{6}{91}$ (iv) $\frac{13}{9}$ (v) $\frac{7}{8}$ (vi) $\frac{31}{49}$
4. (i) $\frac{4}{5}$ (ii) $\frac{2}{3}$ (iii) $\frac{3}{8}$ (iv) $\frac{35}{9}$ (v) $\frac{21}{16}$ (vi) $\frac{4}{15}$
 (vii) $\frac{48}{25}$ (viii) $\frac{11}{6}$

EXERCISE 2.4

1. (i) 1.2 (ii) 36.8 (iii) 13.55 (iv) 80.4 (v) 0.35 (vi) 844.08
 (vii) 1.72
2. 17.1 cm²
3. (i) 13 (ii) 368 (iii) 1537 (iv) 1680.7 (v) 3110 (vi) 15610
 (vii) 362 (viii) 4307 (ix) 5 (x) 0.8 (xi) 90 (xii) 30
4. 553 km 5. (i) 0.75 (ii) 5.17 (iii) 63.36 (iv) 4.03 (v) 0.025
 (vi) 1.68 (vii) 0.0214 (viii) 10.5525 (ix) 1.0101 (x) 110.011

EXERCISE 2.5

1. (i) 0.2 (ii) 0.07 (iii) 0.62 (iv) 10.9 (v) 162.8 (vi) 2.07
 (vii) 0.99 (viii) 0.16
2. (i) 0.48 (ii) 5.25 (iii) 0.07 (iv) 3.31 (v) 27.223 (vi) 0.056
 (vii) 0.397
3. (i) 0.027 (ii) 0.003 (iii) 0.0078 (iv) 4.326 (v) 0.236 (vi) 0.9853
4. (i) 0.0079 (ii) 0.0263 (iii) 0.03853 (iv) 0.1289 (v) 0.0005
5. (i) 2 (ii) 180 (iii) 6.5 (iv) 44.2 (v) 2 (vi) 31
 (vii) 510 (viii) 27 (ix) 2.1 6. 18 km

అభ్యాసం 2.3

1. (i) 16 (ii) $\frac{84}{5}$ (iii) $\frac{24}{7}$ (iv) $\frac{3}{2}$ (v) $\frac{9}{7}$ (vi) $\frac{7}{5}$
2. (i) $\frac{7}{3}$ (అపక్రమ భిన్నము) (ii) $\frac{8}{5}$ (అపక్రమ భిన్నము) (iii) $\frac{7}{9}$ (క్రమ భిన్నము)
- (iv) $\frac{5}{6}$ (క్రమ భిన్నము) (v) $\frac{7}{12}$ (క్రమ భిన్నము) (vi) 8(పూర్ణాంకము)
- (vii) 11 (పూర్ణాంకము)
3. (i) $\frac{7}{6}$ (ii) $\frac{4}{45}$ (iii) $\frac{6}{91}$ (iv) $\frac{13}{9}$ (v) $\frac{7}{8}$ (vi) $\frac{31}{49}$
4. (i) $\frac{4}{5}$ (ii) $\frac{2}{3}$ (iii) $\frac{3}{8}$ (iv) $\frac{35}{9}$ (v) $\frac{21}{16}$ (vi) $\frac{4}{15}$
- (vii) $\frac{48}{25}$ (viii) $\frac{11}{6}$

అభ్యాసం 2.4

1. (i) 1.2 (ii) 36.8 (iii) 13.55 (iv) 80.4 (v) 0.35 (vi) 844.08
- (vii) 1.72
2. 17.1 సెం.మీ²
3. (i) 13 (ii) 368 (iii) 1537 (iv) 1680.7 (v) 3110 (vi) 15610
- (vii) 362 (viii) 4307 (ix) 5 (x) 0.8 (xi) 90 (xii) 30
4. 553కిలోమీటర్లు 5. (i) 0.75 (ii) 5.17 (iii) 63.36 (iv) 4.03 (v) 0.025
- (vi) 1.68 (vii) 0.0214 (viii) 10.5525 (ix) 1.0101 (x) 110.011

అభ్యాసం 2.5

1. (i) 0.2 (ii) 0.07 (iii) 0.62 (iv) 10.9 (v) 162.8 (vi) 2.07
- (vii) 0.99 (viii) 0.16
2. (i) 0.48 (ii) 5.25 (iii) 0.07 (iv) 3.31 (v) 27.223 (vi) 0.056
- (vii) 0.397
3. (i) 0.027 (ii) 0.003 (iii) 0.0078 (iv) 4.326 (v) 0.236 (vi) 0.9853
4. (i) 0.0079 (ii) 0.0263 (iii) 0.03853 (iv) 0.1289 (v) 0.0005
5. (i) 2 (ii) 180 (iii) 6.5 (iv) 44.2 (v) 2 (vi) 31
- (vii) 510 (viii) 27 (ix) 2.1 6. 18 కిలోమీటర్లు

EXERCISE 3.1

2.

Marks	Tally Marks	Frequency
1		1
2		2
3		1
4		3
5		5
6		4
7		2
8		1
9		1

(i) 9

(ii) 1

(iii) 8

(iv) 5

3. 2

4. 50

5. (i) 12.5 (ii) 3 (iii) $\frac{0+8+6+4}{4} = \frac{18}{4}$ or $\frac{9}{2}$ (iv) A

6. (i) Highest marks = 95, Lowest marks = 39 (ii) 56 (iii) 73 7. 2058

8. (i) 20.5 (ii) 5.9 (iii) 5 9. (i) 151 cm (ii) 128 cm (iii) 23 cm (iv) 141.4 cm (v) 5

EXERCISE 3.2

1. Mode = 20, Median = 20, Yes.

2. Mean = 39, Mode = 15, Median = 15, No.

3. (i) Mode = 38, 43; Median = 40

(ii) Yes, there are 2 modes.

4. Mode = 14, Median = 14

5. (i) T

(ii) F

(iii) T

(iv) F

EXERCISE 3.3

1. (a) Cat (b) 8

4. (i) Maths (ii) S. Science (iii) Hindi

5. (ii) Cricket (iii) Watching sports

6. (i) Jammu (ii) Jammu, Bangalore

(iii) Bangalore and Jaipur or Bangalore and Ahmedabad

(iv) Mumbai

EXERCISE 4.1

1. (i) No. (ii) No (iii) Yes (iv) No (v) Yes (vi) No

(vii) Yes (viii) No (ix) No (x) No (xi) Yes

అభ్యాసం 3.1

2.

మార్కులు	గణన చిహ్నాలు	పానః పుస్తకము
1		1
2		2
3		1
4		3
5		5
6		4
7		2
8		1
9		1

(i) 9

(ii) 1

(iii) 8

(iv) 5

3. 2

4. 50

5. (i) 12.5 (ii) 3 (iii) $\frac{0+8+6+4}{4} = \frac{18}{4}$ లేదా $\frac{9}{2}$ (iv) A

6. (i) గరిష్ట మార్కులు = 95, కనిష్ట మార్కులు = 39

(ii) 56 (iii) 73

7. 2058

8. (i) 20.5 (ii) 5.9 (iii) 5

9. (i) 151 సెం.మీ (ii) 128 సెం.మీ (iii) 23 సెం.మీ (iv) 141.4 సెం.మీ

(v) 5

అభ్యాసం 3.2

1. బాహుళకము = 20, మధ్యగతము = 20, అవును.

2. సగటు = 39, బాహుళకము = 15, మధ్యగతము = 15, లేదు

3. (i) బాహుళకము = 38, 43; మధ్యగతము = 40

(ii) అవును 2 బహుళకాలు ఉన్నాయి

4. బాహుళకము = 14, మధ్యగతము = 14

5. (i) T

(ii) F

(iii) T

(iv) F

అభ్యాసం 3.3

1. (a) పిల్లి (b) 8

4. (i) గణిత శాస్త్రము (ii) సాంఘిక శాస్త్రము (iii) హిందీ

5. (ii) క్రికెట్ (iii) ఆటలను చూడడం

6. (i) జమ్మూ (ii) జమ్మూ, బెంగుళూరు

(iii) బెంగుళూరు మరియు జైపూర్ లేదా బెంగుళూరు మరియు అహ్మదాబాద్ (iv) ముంబై

అభ్యాసం 4.1

1. (i) కాదు

(ii) కాదు

(iii) అవును

(iv) కాదు

(v) అవును

(vi) కాదు

(vii) అవును (viii) కాదు

(ix) కాదు

(x) కాదు

(xi) అవును

2. (a) No (b) No (c) Yes (d) No (e) No (f) No
3. (i) $p = 3$ (ii) $m = 6$
4. (i) $x + 4 = 9$ (ii) $y - 2 = 8$ (iii) $10a = 70$ (iv) $\frac{b}{5} = 6$
- (v) $\frac{3t}{4} = 15$ (vi) $7m + 7 = 77$ (vii) $\frac{x}{4} - 4 = 4$ (viii) $6y - 6 = 60$
- (ix) $\frac{z}{3} + 3 = 30$
5. (i) The sum of p and 4 is 15 (ii) 7 subtracted from m is 3
 (iii) Twice a number m is 7 (iv) One-fifth of a number m is 3
 (v) Three-fifth of a number m is 6 (vi) Three times a number p when added to 4 gives 25
 (vii) 2 subtracted from four times a number p is 18
 (viii) Add 2 to half of a number p to get 8
6. (i) $5m + 7 = 37$ (ii) $3y + 4 = 49$ (iii) $2l + 7 = 87$ (iv) $4b = 180^\circ$

EXERCISE 4.2

1. (a) Add 1 to both sides; $x = 1$ (b) Subtract 1 from both sides; $x = -1$
 (c) Add 1 to both sides; $x = 6$ (d) Subtract 6 from both sides; $x = -4$
 (e) Add 4 to both sides; $y = -3$ (f) Add 4 to both sides; $y = 8$
 (g) Subtract 4 from both sides; $y = 0$ (h) Subtract 4 from both sides; $y = -8$
2. (a) Divide both sides by 3; $l = 14$ (b) Multiply both sides by 2; $b = 12$
- (c) Multiply both sides by 7; $p = 28$ (d) Divide both sides by 4; $x = \frac{25}{4}$
- (e) Divide both sides by 8; $y = \frac{36}{8}$ (f) Multiply both sides by 3; $z = \frac{15}{4}$
- (g) Multiply both sides by 5; $a = \frac{7}{3}$ (h) Divide both sides by 20; $t = -\frac{1}{2}$
3. (a) Step 1: Add 2 to both sides (b) Step 1: Subtract 7 from both sides
 Step 2: Divide both sides by 3; $n = 16$ Step 2: Divide both sides by 5; $m = 2$
- (c) Step 1: Multiply both sides by 3 (d) Step 1: Multiply both sides 10
 Step 2: Divide both sides by 20; $p = 6$ Step 2: Divide both sides by 3; $p = 20$
4. (a) $p = 10$ (b) $p = 9$ (c) $p = 20$ (d) $p = -15$ (e) $p = 8$ (f) $s = -3$
 (g) $s = -4$ (h) $s = 0$ (i) $q = 3$ (j) $q = 3$ (k) $q = -3$ (l) $q = 3$

2. (a) కాదు (b) కాదు (c) అవును (d) కాదు (e) కాదు (f) కాదు

3. (i) $p = 3$ (ii) $m = 6$

4. (i) $x + 4 = 9$ (ii) $y - 2 = 8$ (iii) $10a = 70$ (iv) $\frac{b}{5} = 6$

(v) $\frac{3t}{4} = 15$ (vi) $7m + 7 = 77$ (vii) $\frac{x}{4} - 4 = 4$ (viii) $6y - 6 = 60$

(ix) $\frac{z}{3} + 3 = 30$

5. (i) p మరియు 4 ల యొక్క మొత్తము 15 (ii) m నుండి 7 తీసివేస్తే 3 వస్తుంది
 (iii) 7కు రెట్టింపు ఏడు అవుతుంది (iv) m సంఖ్యలో ఐదవ భాగము 3
 (v) m సంఖ్య యొక్క మూడులో ఐదవ వంతు 6 (vi) p సంఖ్య మూడు రెట్లకు 4 కలిపినప్పుడు 25 వస్తుంది
 (vii) p సంఖ్య నాలుగు రెట్ల నుండి 2 తీసివేసినప్పుడు 18 వస్తుంది.
 (viii) 8ను పొందటానికి p సంఖ్య యొక్క సగానికి 2 కలపండి.

6. (i) $5m + 7 = 37$ (ii) $3y + 4 = 49$ (iii) $2l + 7 = 87$ (iv) $4b = 180^\circ$

అభ్యాసం 4.2

1. (a) ఇరువైపులా 1 ని కూడండి; $x = 1$ (b) ఇరువైపులా 1 ని తీసివేయండి; $x = -1$
 (c) ఇరువైపులా 1 ని కూడండి; $x = 6$ (d) ఇరువైపులా 6 ని తీసివేయండి; $x = -4$
 (e) ఇరువైపులా 4 ని కూడండి; $y = -3$ (f) ఇరువైపులా 4 ని కూడండి; $y = 8$
 (g) ఇరువైపులా 4 ని తీసివేయండి; $y = 0$ (h) ఇరువైపులా 4 ని తీసివేయండి; $y = -8$
2. (a) ఇరువైపులా 3 చే భాగించండి; $l = 14$ (b) ఇరువైపులా 2 చే గుణించండి; $b = 12$

(c) ఇరువైపులా 7 చే గుణించండి; $p = 28$ (d) ఇరువైపులా 4 చే భాగించండి; $x = \frac{25}{4}$

(e) ఇరువైపులా 8 చే భాగించండి; $y = \frac{36}{8}$ (f) ఇరువైపులా 3 చే గుణించండి; $z = \frac{15}{4}$

(g) ఇరువైపులా 5 చే గుణించండి; $a = \frac{7}{3}$ (h) ఇరువైపులా 20 చే భాగించండి; $t = -\frac{1}{2}$

3. (a) సోపానము 1: ఇరువైపులా 2 ని కూడండి (b) సోపానము 1: ఇరువైపులా 7 ని తీసివేయండి
 సోపానము 2: ఇరువైపులా 3 చే భాగించండి; $n = 16$ సోపానము 2: ఇరువైపులా 5 చే భాగించండి; $m = 2$
 (c) సోపానము 1: ఇరువైపులా 3 చే గుణించండి (d) సోపానము 1: ఇరువైపులా 10 చే గుణించండి
 సోపానము 2: ఇరువైపులా 20 చే భాగించండి; $p = 6$ సోపానము 2: ఇరువైపులా 3 చే భాగించండి; $p = 20$

4. (a) $p = 10$ (b) $p = 9$ (c) $p = 20$ (d) $p = -15$ (e) $p = 8$ (f) $s = -3$
 (g) $s = -4$ (h) $s = 0$ (i) $q = 3$ (j) $q = 3$ (k) $q = -3$ (l) $q = 3$

EXERCISE 4.3

1. (a) $8x + 4 = 60; x = 7$ (b) $\frac{x}{5} - 4 = 3; x = 35$ (c) $\frac{3}{4}y + 3 = 21; y = 24$
- (d) $2m - 11 = 15; m = 13$ (e) $50 - 3x = 8; x = 14$ (f) $\frac{x+19}{5} = 8; x = 21$
- (g) $\frac{5n}{2} - 7 = 23; n = 12$
2. (a) Lowest score = 40 (b) 70° each (c) Sachin: 132 runs, Rahul: 66 runs
3. (i) 6 (ii) 15 years (iii) 25 4. 30

EXERCISE 5.1

1. (i) 70° (ii) 27° (iii) 33°
2. (i) 75° (ii) 93° (iii) 26°
3. (i) supplementary (ii) complementary (iii) supplementary
- (iv) supplementary (v) complementary (vi) complementary
4. 45° 5. 90° 6. $\angle 2$ will increase with the same measure as the decrease in $\angle 1$.
7. (i) No (ii) No (iii) Yes 8. Less than 45°
9. (i) 90° (ii) 180° (iii) linear pair
10. (i) $\angle AOD, \angle BOC$ (ii) $\angle EOA, \angle AOB$ (iii) $\angle EOB, \angle EOD$
- (iv) $\angle EOA, \angle EOC$ (v) $\angle AOB, \angle AOE; \angle AOE, \angle EOD; \angle EOD, \angle COD$

EXERCISE 5.2

1. (i) Corresponding angle property (ii) Alternate interior angle property
- (iii) Interior angles on the same side of the transversal are supplementary
2. (i) $\angle 1, \angle 5; \angle 2, \angle 6; \angle 3, \angle 7; \angle 4, \angle 8$ (ii) $\angle 2, \angle 8; \angle 3, \angle 5$
- (iii) $\angle 2, \angle 5; \angle 3, \angle 8$ (iv) $\angle 1, \angle 3; \angle 2, \angle 4; \angle 5, \angle 7; \angle 6, \angle 8$
3. $a = 55^\circ; b = 125^\circ; c = 55^\circ; d = 125^\circ; e = 55^\circ; f = 55^\circ$
4. (i) $x = 70^\circ$ (ii) $x = 100^\circ$
5. (i) $\angle DGC = 70^\circ$ (ii) $\angle DEF = 70^\circ$
6. (i) l is not parallel to m (ii) l is not parallel to m
- (iii) l is parallel to m (iv) l is not parallel to m

EXERCISE 6.1

1. Altitude, Median, No.

EXERCISE 6.2

1. (i) 120° (ii) 110° (iii) 70° (iv) 120° (v) 100° (vi) 90°
2. (i) 65° (ii) 30° (iii) 35° (iv) 60° (v) 50° (vi) 40°

అభ్యాసం 4.3

1. (a) $8x + 4 = 60; x = 7$ (b) $\frac{x}{5} - 4 = 3; x = 35$ (c) $\frac{3}{4}y + 3 = 21; y = 24$
 (d) $2m - 11 = 15; m = 13$ (e) $50 - 3x = 8; x = 14$ (f) $\frac{x+19}{5} = 8; x = 21$
 (g) $\frac{5n}{2} - 7 = 23; n = 12$
2. (a) అత్యల్ప స్కోరు = 40 (b) ఒక్కొక్కటి 70° (c) సచిన్ : 132 పరుగులు, రాహుల్ : 66 పరుగులు
 3. (i) 6 (ii) 15 సంవత్సరాలు (iii) 25 4. 30

అభ్యాసం 5.1

1. (i) 70° (ii) 27° (iii) 33°
 2. (i) 75° (ii) 93° (iii) 26°
 3. (i) సంపూరకాలు (ii) పూరకాలు (iii) సంపూరకాలు
 (iv) సంపూరకాలు (v) పూరకాలు (vi) పూరకాలు
 4. 45° 5. 90° 6. $\angle 1$ లో తగ్గుదల అదే కొలతతో $\angle 2$ పెరుగుతుంది
 7. (i) కాదు (ii) కాదు (iii) అవును 8. 45° కంటే తక్కువ
 9. (i) 90° (ii) 180° (iii) రేఖీయ ద్వయం
 10. (i) $\angle AOD, \angle BOC$ (ii) $\angle EOA, \angle AOB$ (iii) $\angle EOB, \angle EOD$
 (iv) $\angle EOA, \angle EOC$ (v) $\angle AOB, \angle AOE; \angle AOE, \angle EOD; \angle EOD, \angle COD$

అభ్యాసం 5.2

1. (i) సదృశ కోణాల ధర్మము (ii) అంతరాభిముఖ కోణాల ధర్మము
 (iii) తిర్యగ్రేఖకు ఒకే వైపున ఉన్న అంతర కోణాలు సంపూరకాలు
 2. (i) $\angle 1, \angle 5; \angle 2, \angle 6; \angle 3, \angle 7; \angle 4, \angle 8$ (ii) $\angle 2, \angle 8; \angle 3, \angle 5$
 (iii) $\angle 2, \angle 5; \angle 3, \angle 8$ (iv) $\angle 1, \angle 3; \angle 2, \angle 4; \angle 5, \angle 7; \angle 6, \angle 8$
 3. $a = 55^\circ; b = 125^\circ; c = 55^\circ; d = 125^\circ; e = 55^\circ; f = 55^\circ$
 4. (i) $x = 70^\circ$ (ii) $x = 100^\circ$
 5. (i) $\angle DGC = 70^\circ$ (ii) $\angle DEF = 70^\circ$
 6. (i) l అనేది m కు సమాంతరంగా లేదు (ii) l అనేది m కు సమాంతరంగా లేదు
 (iii) l అనేది m కు సమాంతరం (iv) l అనేది m కు సమాంతరంగా లేదు

అభ్యాసం 6.1

1. ఉన్నతి, మధ్యగతం, కాదు

అభ్యాసం 6.2

1. (i) 120° (ii) 110° (iii) 70° (iv) 120° (v) 100° (vi) 90°
 2. (i) 65° (ii) 30° (iii) 35° (iv) 60° (v) 50° (vi) 40°

EXERCISE 6.3

1. (i) 70° (ii) 60° (iii) 40° (iv) 65° (v) 60° (vi) 30°
 2. (i) $x = 70^\circ, y = 60^\circ$ (ii) $x = 50^\circ, y = 80^\circ$ (iii) $x = 110^\circ, y = 70^\circ$
 (iv) $x = 60^\circ, y = 90^\circ$ (v) $x = 45^\circ, y = 90^\circ$ (vi) $x = 60^\circ, y = 60^\circ$

EXERCISE 6.4

1. (i) Not possible (ii) Possible (iii) Not possible
 2. (i) Yes (ii) Yes (iii) Yes 3. Yes 4. Yes 5. Yes
 6. Between 3 and 27

EXERCISE 6.5

1. 26 cm 2. 24 cm 3. 9 m 4. (i) and (iii) 5. 18m 6. (ii)
 7. 98 cm 8. 68 cm

EXERCISE 7.1

1. (a) 12.5% (b) 125% (c) 7.5% (d) $28\frac{4}{7}\%$
 2. (a) 65% (b) 210% (c) 2% (d) 1235%
 3. (i) $\frac{1}{4}, 25\%$ (ii) $\frac{3}{5}; 60\%$ (iii) $\frac{3}{8}; 37.5\%$
 4. (a) 37.5 (b) $\frac{3}{5}$ minute or 36 seconds (c) ₹ 500
 (d) 0.75 kg or 750 g
 5. (a) 12000 (b) ₹ 9,000 (c) 1250 km (d) 20 minutes (e) 500 litres
 6. (a) 0.25; $\frac{1}{4}$ (b) 1.5; $\frac{3}{2}$ (c) 0.2; $\frac{1}{5}$ (d) 0.05; $\frac{1}{20}$ 7. 30%
 8. 40%; 6000 9. ₹ 40,000 10. 5 matches

EXERCISE 7.2

1. (a) Profit = ₹ 75; Profit % = 30 (b) Profit = ₹ 1500; Profit % = 12.5
 (c) Profit = ₹ 500; Profit % = 20 (d) Loss = ₹ 100; Loss % = 40
 2. (a) 75%; 25% (b) 20%, 30%, 50% (c) 20%; 80% (d) 12.5%; 25%; 62.5%
 3. 2% 4. $5\frac{5}{7}\%$ 5. ₹ 12,000 6. ₹ 16,875
 7. (i) 12% (ii) 25 g 8. ₹ 233.75 9. (a) ₹ 1,632 (b) ₹ 8,625
 10. 0.25% 11. ₹ 500

అభ్యాసం 6.3

1. (i) 70° (ii) 60° (iii) 40° (iv) 65° (v) 60° (vi) 30°
 2. (i) $x = 70^\circ, y = 60^\circ$ (ii) $x = 50^\circ, y = 80^\circ$ (iii) $x = 110^\circ, y = 70^\circ$
 (iv) $x = 60^\circ, y = 90^\circ$ (v) $x = 45^\circ, y = 90^\circ$ (vi) $x = 60^\circ, y = 60^\circ$

అభ్యాసం 6.4

1. (i) సాధ్యం కాదు (ii) సాధ్యం (iii) సాధ్యం కాదు
 2. (i) అవును (ii) అవును (iii) అవును 3. అవును 4. అవును 5. అవును
 6. 3 మరియు 27 ల మధ్యలో వుంది

అభ్యాసం 6.5

1. 26 సెం.మీ 2. 24 సెం.మీ 3. 9 మీ 4. (i) మరియు (iii) 5. 18మీ 6. (ii)
 7. 98 సెం.మీ 8. 68 సెం.మీ

అభ్యాసం 7.1

1. (a) 12.5% (b) 125% (c) 7.5% (d) $28\frac{4}{7}\%$
 2. (a) 65% (b) 210% (c) 2% (d) 1235%
 3. (i) $\frac{1}{4}, 25\%$ (ii) $\frac{3}{5}; 60\%$ (iii) $\frac{3}{8}; 37.5\%$
 4. (a) 37.5 (b) $\frac{3}{5}$ నిముషాలు లేదా 36 సెకన్లు (c) ₹ 500
 (d) 0.75 కిలో గ్రాము లేదా 750 గ్రాములు
 5. (a) 12000 (b) ₹ 9,000 (c) 1250 కిలో గ్రాము (d) 20 నిముషాలు (e) 500 లీటర్లు
 6. (a) $0.25; \frac{1}{4}$ (b) $1.5; \frac{3}{2}$ (c) $0.2; \frac{1}{5}$ (d) $0.05; \frac{1}{20}$ 7. 30%
 8. 40%; 6000 9. ₹ 40,000 10. 5 మ్యాచ్లు

అభ్యాసం 7.2

1. (a) లాభం = ₹ 75; లాభం % = 30 (b) లాభం = ₹ 1500; లాభం % = 12.5
 (c) లాభం = ₹ 500; లాభం % = 20 (d) నష్టం = ₹ 100; నష్టం % = 40
 2. (a) 75%; 25% (b) 20%, 30%, 50% (c) 20%; 80% (d) 12.5%; 25%; 62.5%
 3. 2% 4. $5\frac{5}{7}\%$ 5. ₹ 12,000 6. ₹ 16,875
 7. (i) 12% (ii) 25 గ్రాములు 8. ₹ 233.75 9. (a) ₹ 1,632 (b) ₹ 8,625
 10. 0.25% 11. ₹ 500



FUNDAMENTAL DUTIES

Fundamental duties: It shall be the duty of every citizen of India-

- (a) to abide by the Constitution and respect its ideals and institutions, the National Flag and the National Anthem;
- (b) to cherish and follow the noble ideals which inspired our national struggle for freedom;
- (c) to uphold and protect the sovereignty, unity and integrity of India;
- (d) to defend the country and render national service when called upon to do so;
- (e) to promote harmony and the spirit of common brotherhood amongst all the people of India transcending religious, linguistic and regional or sectional diversities; to renounce practices derogatory to the dignity of women;
- (f) to value and preserve the rich heritage of our composite culture;
- (g) to protect and improve the natural environment including forests, lakes, rivers and wild life, and to have compassion for living creatures;
- (h) to develop the scientific temper, humanism and the spirit of inquiry and reform;
- (i) to safeguard public property and to abjure violence.
- (j) to strive towards excellence in all spheres of individual and collective activity so that the nation constantly rises to higher levels of endeavour and achievement;
- (k) who is a parent or guardian, to provide opportunities for education to his child or, as the case may be ward between the age of six and fourteen years;

- **Constitution of India,**
Part IV A (Article 51 A)

Right of Children to Free and Compulsory Education (RTE) Act, 2009

The RTE Act provides for the right of children to free and Compulsory Education to every child in the age group of 6 – 14 years which came into force from 1st April 2010 in Andhra Pradesh.

Important provisions of RTE Act

- Ensure availability of schools within the reach of the children.
- Improve School infrastructure facilities.
- Enroll children in the class appropriate to his / her age.
- Children have a right to receive special training in order to be at par with other children.
- Providing appropriate facilities for the education of children with special needs on par with other children.
- No child shall be liable to pay any kind of fee or charges or expenses which may prevent him or her from pursuing and completing the elementary education. No test for admitting the children in schools.
- No removal of name and repetition of the child in the same class.
- No child admitted in a school shall be held back in any class or expelled from school till the completion of elementary education.
- No child shall be subjected to physical punishment or mental harassment.
- Admission shall not be denied or delayed on the ground that the transfer and other certificates have not been provided on time.
- Eligible candidates alone shall be appointed as teachers.
- The teaching learning process and evaluation procedures shall promote achievement of appropriate competencies.
- No board examinations shall be conducted to the children till the completion of elementary education.
- Children can continue in the schools even after 14 years until completion of elementary education.
- No discrimination and related practices towards children belonging to backward and marginalized communities.
- The curriculum and evaluation procedures must be in conformity with the values enshrined in the constitution and make the child free of fear and anxiety and help the child to express views freely.