State Council of Educational Research & Training
Andhra Pradesh

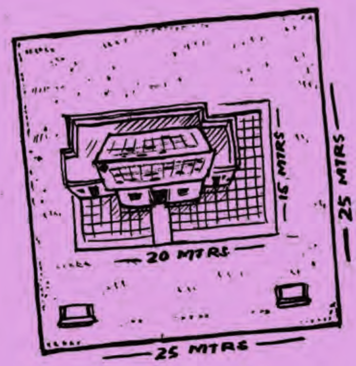
Mathematics 8th Class Semester - 1

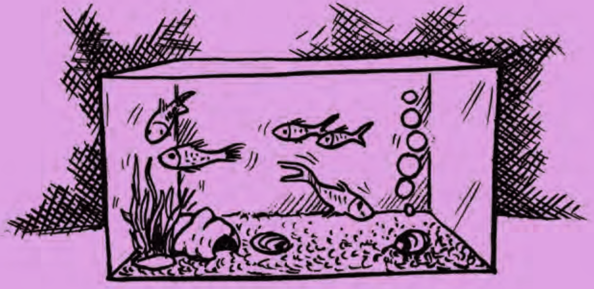
Mathematics
గణితశాస్త్రం

Free distribution by Samagra Shiksha, Government of Andhra Pradesh

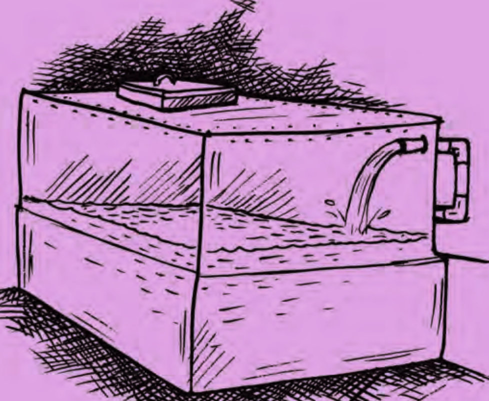
Semester - 1

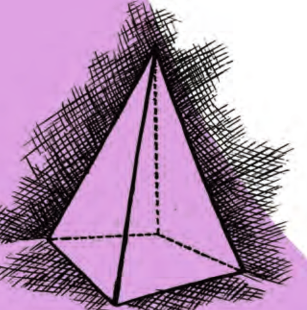
8





विद्यया ऽमृतमश्नुते
एन सी ई आर टी
NCERT





सत्यमेव जयते

CONSTITUTION OF INDIA

Preamble

WE, THE PEOPLE OF INDIA, having
solemnly resolved to constitute India into a
SOVEREIGN SOCIALIST SECULAR DEMOCRATIC REPUBLIC
and to secure to all its citizens:

JUSTICE
Social, economic and political;

LIBERTY
of thought, expression, belief, faith and worship;

EQUALITY
of status and of opportunity; and to
promote among them all

FRATERNITY
assuring the dignity of the individual and the unity and
integrity of the Nation;

IN OUR CONSTITUENT ASSEMBLY
this twenty-sixth day of November, 1949, do
HEREBY ADOPT, ENACT AND GIVE TO
OURSELVES THIS CONSTITUTION

భారత రాజ్యాంగం - పౌర విధులు

1. రాజ్యాంగమునకు బద్ధుడై వుండుట, దాని ఆదర్శాలను, సంస్థలను, జాతీయ పతాకమును,జాతీయ గీతమును గౌరవించుట;
2. జాతీయ స్వాతంత్ర్య పోరాటమునకు స్ఫూర్తినిచ్చిన ఉన్నతాదర్శములను మనస్సుయందు ఉంచుకొని వాటిని అనుసరించుట;
3. భారత సార్వభౌమత్వం, ఐక్యత, అఖండతను సమర్థించుట మరియు సంరక్షించుట.
4. దేశమును రక్షించుట మరియు కోరినపుడు జాతికి సేవ చేయుట;
5. భారత ప్రజల మధ్య మత, భాష, ప్రాంతీయ, వర్గ వైవిధ్యములను అధిగమించి, సామరస్యమును, సోదర భావమును పెంపొందించుట, స్త్రీల గౌరవం తగ్గించు ఆచారములను విడనాడుట;
6. మన ఉమ్మడి సంస్కృతినీ, సుసంపన్న సంప్రదాయాలను గౌరవించి రక్షించుట;
7. అడవులు, సరస్సులు, నదులు, అడవి జంతువులతో సహా ప్రాకృతిక పరిసరాలను కాపాడి అభివృద్ధి చేయుట మరియు సమస్త జీవుల యెడల కరుణార్ద్రత కలిగి వుండుట.
8. శాస్త్రీయ దృక్పథాన్ని, మానవతావాదాన్ని, జిజ్ఞాసను, సంస్కరణ తత్వాన్ని పెంపొందించుకొనటం;
9. ప్రజల ఆస్తిని సంరక్షించుట, హింసను విడనాడుట;
10. ప్రయత్నాలు, సాధనల ఉన్నతస్థాయిలను నిరంతరం అందుకొనునట్లుగా వైయక్తిక, సమిష్టి కార్య రంగాలన్నింటిలో శ్రేష్ఠత కోసం, కృషి చేయుట ప్రాథమిక కర్తవ్యమై వుండవలెను.
11. ఆరు నుండి పద్నాలుగు సంవత్సరముల వయస్సు కలిగిన బాలునికి లేదా బాలికకు తల్లి తండ్రి లేదా సంరక్షకునిగావున్న వ్యక్తి తనబిడ్డ లేదా సందర్భానుసారము తన సంరక్షితునికి విద్యార్జనకు అవకాశములు కల్పించవలెను.

(అధికరణం 51 A)

విద్యాహక్కు చట్టం

6 నుండి 14 సంవత్సరముల పిల్లలందరికి ఉచిత నిర్భంద ఎలిమెంటరీ విద్యనందించడానికి ఉద్దేశించబడినవి. ఇది ఏప్రిల్ 1, 2010 నుండి అమల్లోకి వచ్చింది.

చట్టంలోని ముఖ్యాంశాలు:

- పిల్లలందరికి అందుబాటులో పాఠశాలలను ఏర్పాటుచేయాలి.
- పాఠశాలలకు మౌలిక వసతులను కల్పించాలి.
- పిల్లలందరిని వయస్సుకు తగిన తరగతిలో చేర్పించాలి.
- వయస్సుకు తగ్గ తరగతిలో చేర్చిన తర్వాత తోటి వారితో సమానంగా ఉండటానికి ప్రత్యేకశిక్షణ ఇప్పించాలి.
- ప్రత్యేక అవసరాలు కల్గిన పిల్లలకు సాధారణ పిల్లలతోపాటు విద్యకొనసాగించడానికి తగువసతులు ఏర్పాట్లు చేయాలి.
- బడిలో చేర్చుకోడానికి ఎలాంటి పరీక్షలు నిర్వహించరాదు. ఎటువంటి రుసుము, చార్జీలు వసూలు చేయరాదు.
- బడిలో చేరిన పిల్లల పేరు తీసివేయడం, అదే తరగతిలో కొనసాగించడం చేయరాదు.
- పిల్లల్ని శారీరకంగా, మానసికంగా హింసించరాదు.
- వయస్సు నిర్ధారణ పత్రం, ఇతర ధృవీకరణ పత్రాలు లేవనే కారణం చేత పిల్లలకు బడిలో ప్రవేశాన్ని నిరాకరించరాదు.
- తగిన అర్హతలున్న వారిని మాత్రమే ఉపాధ్యాయులుగా నియమించాలి.
- పిల్లలు నిర్దేశించిన సామర్థ్యాలు సాధించేలా బోధనాభ్యసనం, మూల్యాంకనం ఉండాలి.
- ఎలిమెంటరీ విద్య పూర్తయ్యేవరకు పిల్లలకు ఎలాంటి బోర్డు పరీక్షలు నిర్వహించరాదు.
- పద్నాలుగు సంవత్సరాలు పూర్తయినప్పటికినీ, ఎలిమెంటరీ విద్య పూర్తయ్యేవరకు పాఠశాలలో పిల్లలు కొనసాగవచ్చును.
- బలహీన వర్గాలకు, ప్రతికూల పరిస్థితులను ఎదుర్కొంటున్న బృందాలకు చెందిన పిల్లలు ఏ విధమైన వివక్షతకు గురికాకుండా చూడాలి.
- రాజ్యాంగంలో పొందుపరిచిన విలువలకు అనుగుణంగా, విద్యార్థులను భయం, ఆందోళనకు గురిచేయని రీతిలో వారి సర్వతోముఖాభివృద్ధికి తోడ్పడే పాఠ్యప్రణాళిక రూపొందించాలి.

MATHEMATICS
Class VIII

Text Book Development Committee

Sri. **S. Suresh Kumar** IAS
Commissioner of School Education & State Project Director, SS, AP, Amaravati.

Smt. **Vetriselvi. K** IAS
Special Officer, English Medium Project, O/o CSE-AP, Amaravati.

Dr. **B. Pratap Reddy** MA., B.Ed., Ph.D.
Director, SCERT, AP, Amaravati.

Sri **K. Ravindranath Reddy** MA., B.Ed.
Director, Govt. Textbook Press, AP, Amaravati.

Programme Co-ordinators

Dr. **G. Kesava Reddy**
Prof. C&T, SCERT, AP

Smt. **V. Swarnalatha**
Lecturer, C&T, SCERT, AP

Subject Co-ordinators

Sri **S. Satish**
Lecturer in Mathematics, SCERT, AP

Dr. **SK. Kalesha Begum**
Lecturer, SCERT, AP

Sri **K. Satish Babu**
Professor, SCERT, AP

Technical Co-ordinator

Dr. **Ch.V.S. Ramesh Kumar**
Lecturer, SCERT, AP

Published by Samagra Shiksha, Government of Andhra Pradesh, Amaravati.

© Government of Andhra Pradesh, Amaravati

First Published 2022
New Impression - 2023

All rights reserved

No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means without the prior permission in writing of the publisher, nor be otherwise circulated in any form of binding or cover other than that in which it is published and without a similar condition including this condition being imposed on the subsequent purchaser.

The copy right holder of this book is the Commissioner of School Education, Amaravati, Andhra Pradesh.

This book has been printed on 70 G.S.M. SS Maplitho
Title Page 200 G.S.M. White Art Card

Free distribution by Samagra Shiksha, Government of Andhra Pradesh

Printed in India
at the A.P. Govt. Textbook Press
Amaravati
Andhra Pradesh

Translators

Sri **G. Bhaskar Reddy,** SA (Maths), ZPHS, Venkatagiri, Tirupati

Sri **Jayaraj Sekhar,** SA (Maths), ZPHS, Katherapalle, Chittoor

Sri **G V S Sastry,** SA (Maths), ZPHS, Kollipadu, Srikakulam

Sri **Komanapalli Nagendra Rao,** SA (Maths), ZPHS, Gandepalli, Kakinada

Sri **T. Venkat,** SA (Maths), ZPHS, (Pathapeta) Uravakonda, Ananthapuram

Sri **A. Audinarayana Sarma,** SA (Maths), ZPHS Valamedu, Tirupati

Sri **M. A. Nabi,** SA (Maths), ZPHS (B), Jangareddy Gudem, Eluru

Smt. **T. Jayasatya,** SA (Maths), GTWAGH, Haddubangi, Manyam

Smt. **G. Jyothi Lakshmi,** SA (Maths), MPUS, Sunkarametta, Alluri Seetha Rama Raju

Smt. **K. Sree Vijaya,** SA (Maths), ZPHS, Veerapaneni Gudem, Krishna

Smt. **Ch. Hemalatha,** PGT (Maths), APRS (Girls), Venkatagiri, Tirupati

Sri **Kottakota Krishnam Raju,** SA (Maths), ZPHS, Laxmipuram, Vizianagaram

Sri **PVLN Sri Ram,** SA (Maths), JNMHS, Amalapuram, Konaseema

Sri **S. Ramesh,** SA (Maths), ZPHS Bayyavaram, Anakapalli

Sri **T. Murali,** SA (Maths), ZPHS, Karakambadi, Tirupati

Sri **DVVSRA Sarma,** SA (Maths) MPUPS, Yenudu Tuni, Anakapalli

Sri **T. Eswara Rao,** SA (Maths), ZPHS, Vadada, Vizianagaram

Sri **R. Raja Sekhar,** SA (Maths), ZPHS, Satrampadu, Eluru

Smt. **Ch. Jhansi Rani,** PGT (Maths) APTW&URJC, Pedda Dornala, Prakasam

Smt. **B. Nirmala Devi,** PGT (Maths), APSWRS Vinukonda, Palnadu

Sri **B. V. Malleswara Rao,** PGT (Maths), APSWRS, Tadikonda, Guntur

Editors for Translation

Dr. **D.S.N. Sastry,** Rtd. Principal, AJ College of Education, Machilipatnam

Dr. **P. Satyanarayana Sarma,** Rtd. Lecturer, Montessori College of Education, Vijayawada

Sri **B.V.L. Narasimha Rao,** Rtd. Lecturer, SRSV.College of Education, Vijayawada

Dr. **D. Bhaskara Rao,** Rtd. Principal, CRR College of Education, Eluru

Sri **S. Mahesh,** PGT (Maths), JNV.Visakhapatnam (CBSE)

Smt. **G. Sudha Lakshmi,** Lecturer, SCERT, A.P

Sri **K Murali Srinivas,** Principal, APTWRS, Stuvartpuram, Bapatla

Sri **G.S.S. Bhavanarayana,** TGT (Maths), JNV, Ongole, (CBSE)

Sri **M. Anjani Kumar,** TGT (Maths), Atkinson Sr. Sec. School, Vijayawada(CBSE)

Sri **A. Sivaji Rao,** TGT Maths, JNV, Kurnool (CBSE)

Sri **RHV. Kishore,** SA, ZPHS Penamaluru, Krishna

Sri. **A.S.V. Prabhakar,** Lecturer, SCERT, A.P

Designing & Page Layout : Stock Assortment, Bapatla.

Foreword

The National Curriculum Framework, 2005, recommends that children's life at school must be linked to their life outside the school. This principle marks a departure from the legacy of bookish learning which continues to shape our system and causes a gap between the school, home and community. The syllabi and textbooks developed on the basis of NCF signify an attempt to implement this basic idea. They also attempt to discourage rote learning and the maintenance of sharp boundaries between different subject areas. We hope these measures will take us significantly further in the direction of a child-centred system of education outlined in the National Policy on Education (1986).

The success of this effort depends on the steps that school principals and teachers will take to encourage children to reflect on their own learning and to pursue imaginative activities and questions. We must recognise that, given space, time and freedom, children generate new knowledge by engaging with the information passed on to them by adults. Treating the prescribed textbook as the sole basis of examination is one of the key reasons why other resources and sites of learning are ignored. Inculcating creativity and initiative is possible if we perceive and treat children as participants in learning, not as receivers of a fixed body of knowledge.

These aims imply considerable change in school routines and mode of functioning. Flexibility in the daily time-table is as necessary as rigour in implementing the annual calendar so that the required number of teaching days are actually devoted to teaching. The methods used for teaching and evaluation will also determine how effective this textbook proves for making children's life at school a happy experience, rather than a source of stress or boredom. Syllabus designers have tried to address the problem of curricular burden by restructuring and reorienting knowledge at different stages with greater consideration for child psychology and the time available for teaching. The textbook attempts to enhance this endeavour by giving higher priority and space to opportunities for contemplation and wondering, discussion in small groups, and activities requiring hands-on experience.

NCERT appreciates the hard work done by the textbook development committee responsible for this book. We wish to thank the Chairperson of the advisory group in science and mathematics, Professor J.V. Narlikar and the Chief Advisor for this book, Dr H.K. Dewan for guiding the work of this committee. Several teachers contributed to the development of this textbook; we are grateful to their principals for making this possible. We are indebted to the institutions and organisations which have generously permitted us to draw upon their resources, material and personnel. As an organisation committed to systemic reform and continuous improvement in the quality of its products, NCERT welcomes comments and suggestions which will enable us to undertake further revision and refinement.

Director
National Council of Educational
Research and Training

Foreword

The Government of Andhra Pradesh has unleashed a new era in school education by introducing extensive curricular reforms from the academic year 2020-21. The Government has taken up curricular reforms intending to enhance the learning outcomes of the children with focus on building solid foundational learning and to build up an environment; conducive for an effective teaching-learning process. To achieve this objective, special care has been taken in designing the textbooks to achieve global standards. The Government of Andhra Pradesh has decided to introduce NCERT Textbooks from class VIII onwards.

As a part of the curricularm reform, an effort was made to ensure quality transaction of textbooks, bilingual method was used. The mathematical concepts in the text book are developed based on themes like Number System, Arithmetic, Algebra, Mensuration, Geometry and Statistics. In this text book, concepts are introduced through activities related to daily life situations and conversations. To strengthen these concepts, individual activities, group activities and whole class activities are designed. The textbook attempted to enhance this endeavor through incorporating QR codes in each chapter to enable efficient learning outside the class room.

We are grateful to our Honourable Chief Minister, Sri Y.S. Jagan Mohan Reddy, Andhra Pradesh for being our source of inspiration to carry out this extensive reform in the Education Department. We extend our gratitude to our Honourable Minister of Education, Sri B. Satyanarayana, Andhra Pradesh for striving towards qualitative education. Our special thanks to Sri B. Rajasekhar, IAS, Special Chief Secretary, School Education, Andhra Pradesh. Sri S. Suresh Kumar IAS, Commissioner of School Education and State Project Director, Samagra Shiksha, Andhra Pradesh. Smt. K. Vetriselvi. IAS, Special Officer, English Medium Project, Andhra Pradesh for their constant motivation and guidance.

We convey our sincere thanks to the text book writers, who studied curriculum and best practices across the globe to reach global standards. Our heartful thanks to Director NCERT in designing the text book and for issuing copyrights to print the textbooks by the State Government. We also thank our Coordinators, Editors, Subject Coordinators, Technical team members, Artists, DTP and Layout designers for their contribution in the development of this text book. We invite constructive feedback from the teachers, parents and Educationalists for the further refinement of the text book.

Dr. B. Pratap Reddy
Director
SCERT – Andhra Pradesh

Preface

This is the final book of the upper primary series. It has been an interesting journey to define mathematics learning in a different way. The attempt has been to retain the nature of mathematics, engage with the question why learn mathematics while making an attempt to create materials that would address the interest of the learners at this stage and provide sufficient and approachable challenge to them. There have been many views on the purpose of school mathematics. These range from the fully utilitarian to the entirely aesthetic perceptions. Both these end up not engaging with the concepts and enriching the apparatus available to the learner for participating in life. The NCF emphasises the need for developing the ability to mathematise ideas and perhaps experiences as well. An ability to explore the ideas and framework given by mathematics in the struggle to find a richer life and a more meaningful relationship with the world around.

This is not even easy to comprehend, far more difficult to operationalise. But NCF adds to this an even more difficult goal. The task is to involve everyone of that age group in the classroom or outside in doing mathematics. This is the aim we have been attempting to make in the series.

We have, therefore, provided space for children to engage in reflection, creating their own rules and definitions based on problems/tasks solved and following their ideas logically. The emphasis is not on remembering algorithms, doing complicated arithmetical problems or remembering proofs, but understanding how mathematics works and being able to identify the way of moving towards solving problems.

The important concern for us has also been to ensure that all students at this stage learn mathematics and begin to feel confident in relating mathematics. We have attempted to help children read the book and to stop and reflect at each step where a new idea has been presented. In order to make the book less formidable we have included illustrations and diagrams. These combined with the text help the child comprehend the idea. Throughout the series and also therefore in this book we have tried to avoid the use of technical words and complex formulations. We have left many things for the student to describe and write in her own words.

We have made an attempt to use child friendly language. To attract attention to some points blurbs have been used. The attempt has been to reduce the weight of long explanations by using these and the diagrams. The illustrations and fillers also attempt to break the monotony and provide contexts.

Class VIII is the bridge to Class IX where children will deal with more formal mathematics. The attempt here has been to introduce some ideas in a way that is moving towards becoming formal. The tasks included expect generalisation from the gradual use of such language by the child.

The team that developed this textbook consisted teachers with experience and appreciation of children learning mathematics. This team also included people with experience of research in mathematics teaching-learning and an experience of producing materials for children. The feedback on the textbooks for Classes VI and VII was kept in mind while developing this textbook. This process of development also included discussions with teachers during review workshop on the manuscript.

In the end, I would like to express the grateful thanks of our team to Professor Krishna Kumar, *Director*, NCERT, Professor G. Ravindra, *Joint Director*, NCERT and Professor Hukum Singh, *Head*, DESM, for giving us an opportunity to work on this task with freedom and with full support. I am also grateful to Professor J.V. Narlikar, Chairperson of the Advisory Group in Science and Mathematics for his suggestions. I am also grateful for the support of the team members from NCERT, Professor S.K. Singh Gautam, Dr V.P. Singh and in particular Dr Ashutosh K. Wazalwar who coordinated this work and made arrangements possible. In the end I must thank the Publication Department of NCERT for its support and advice and those from Vidya Bhawan who helped produce the book.

It need not be said but I cannot help mentioning that all the authors worked as a team and we accepted ideas and advice from each other. We stretched ourselves to the fullest and hope that we have done some justice to the challenge posed before us.

The process of developing materials is, however, a continuous one and we would hope to make this book better. Suggestions and comments on the book are most welcome.

H.K. Dewan
Chief Advisor
Textbook Development Committee

A Note for the Teacher

This is the third and the last book of this series. It is a continuation of the processes initiated to help the learners in abstraction of ideas and principles of mathematics. Our students to be able to deal with mathematical ideas and use them need to have the logical foundations to abstract and use postulates and construct new formulations. The main points reflected in the NCF-2005 suggest relating mathematics to development of wider abilities in children, moving away from complex calculations and algorithm following to understanding and constructing a framework of understanding. As you know, mathematical ideas do not develop by telling them. They also do not reach children by merely giving explanations. Children need their own framework of concepts and a classroom where they are discussing ideas, looking for solutions to problems, setting new problems and finding their own ways of solving problems and their own definitions.

As we have said before, it is important to help children to learn to read the textbook and other books related to mathematics with understanding. The reading of materials is clearly required to help the child learn further mathematics. In Class VIII please take stock of where the students have reached and give them more opportunities to read texts that use language with symbols and have brevity and terseness with no redundancy. For this if you can, please get them to read other texts as well. You could also have them relate the physics they learn and the equations they come across in chemistry to the ideas they have learnt in mathematics. These cross-disciplinary references would help them develop a framework and purpose for mathematics. They need to be able to reconstruct logical arguments and appreciate the need for keeping certain factors and constraints while they relate them to other areas as well. Class VIII children need to have opportunity for all this.

As we have already emphasised, mathematics at the Upper Primary Stage has to be close to the experience and environment of the child and be abstract at the same time. From the comfort of context and/or models linked to their experience they need to move towards working with ideas. Learning to abstract helps formulate and understand arguments. The capacity to see interrelations among concepts helps us deal with ideas in other subjects as well. It also helps us understand and make better patterns, maps, appreciate area and volume and see similarities between shapes and sizes. While this is regarding the relationship of other fields of knowledge to mathematics, its meaning in life and our environment needs to be re-emphasised.

Children should be able to identify the principles to be used in contextual situations, for solving problems sift through and choose the relevant information as the first important step. Once students do that they need to be able to find the way to use the knowledge they have and reach where the problem requires them to go. They need to identify and define a problem, select or design possible solutions and revise or redesign the steps, if required. As they go further there would be more to of this to be done. In Class VIII we have to get them to be conscious of the steps they follow. Helping children to develop the ability to construct appropriate models by breaking up the problems and evolving their own strategies and analysis of problems is extremely important. This is in the place of giving them prescriptive algorithms.

Cooperative learning, learning through conversations, desire and capacity to learn from each other and the recognition that conversation is not noise and consultation not cheating is an important part of change in attitude for you as a teacher and for the students as well. They should be asked to make presentations as a group with the inclusion of examples from the contexts of their own experiences. They should be encouraged to read the book in groups and formulate and express what they understand from it. The assessment pattern has to recognise and appreciate this and the classroom groups should be such that all children enjoy being with each other and are contributing to the learning of the group. As you would have seen different groups use different strategies. Some of these are not as efficient as others as they reflect the modeling done and reflect the thinking used. All these are appropriate and need to be analysed with children. The exposure to a variety of strategies deepens the mathematical understanding. Each group moves from where it is and needs to be given an opportunity for that.

For conciseness we present the key ideas of mathematics learning that we would like you to remember in your classroom.

1. Enquiry to understand is one of the natural ways by which students acquire and construct knowledge. The process can use generation of observations to acquire knowledge. Students need to deal with different forms of questioning and challenging investigations- explorative, open-ended, contextual and even error detection from geometry, arithmetic and generalising it to algebraic relations etc.
2. Children need to learn to provide and follow logical arguments, find loopholes in the arguments presented and understand the requirement of a proof. By now children have entered the formal stage. They need to be encouraged to exercise creativity and imagination and to communicate their mathematical reasoning both verbally and in writing.
3. The mathematics classroom should relate language to learning of mathematics. Children should talk about their ideas using their experiences and language. They should be encouraged to use their own words and language but also gradually shift to formal language and use of symbols.
4. The number system has been taken to the level of generalisation of rational numbers and their properties and developing a framework that includes all previous systems as sub-sets of the generalised rational numbers. Generalisations are to be presented in mathematical language and children have to see that algebra and its language helps us express a lot of text in small symbolic forms.
5. As before children should be required to set and solve a lot of problems. We hope that as the nature of the problems set up by them becomes varied and more complex, they would become confident of the ideas they are dealing with.
6. Class VIII book has attempted to bring together the different aspects of mathematics and emphasise the commonality. Unitary method, Ratio and proportion, Interest and dividends are all part of one common logical framework. The idea of variable and equations is needed wherever we need to find an unknown quantity in any branch of mathematics.

We hope that the book will help children learn to enjoy mathematics and be confident in the concepts introduced. We want to recommend the creation of opportunity for thinking individually and collectively.

We look forward to your comments and suggestions regarding the book and hope that you will send interesting exercises, activities and tasks that you develop during the course of teaching, to be included in the future editions. This can only happen if you would find time to listen carefully to children and identify gaps and on the other hand also find the places where they can be given space to articulate their ideas and verbalise their thoughts.

Textbook Development Committee - NCERT

Chairperson, Advisory Group in Science and Mathematics

J.V. Narlikar, Emeritus Professor, *Chairman*, Advisory Committee, Inter University Centre for Astronomy and Astrophysics (IUCCA), Ganeshkhind, Pune University, Pune

Chief Advisor

H.K. Dewan, Vidya Bhawan Society, Udaipur, Rajasthan

Chief Coordinator

Hukum Singh, *Professor and Head*, DESM, NCERT, New Delhi

Members

Anjali Gupte, *Teacher*, Vidya Bhawan Public School, Udaipur, Rajasthan
Avantika Dam, *TGT*, CIE Experimental Basic School, Department of Education, Delhi

B.C. Basti, *Senior Lecturer*, Regional Institute of Education, Mysore, Karnataka

H.C. Pradhan, *Professor*, Homi Bhabha Centre for Science Education, TIFR, Mumbai Maharashtra

K.A.S.S.V. Kameshwar Rao, *Lecturer*, Regional Institute of Education, Shyamala Hills Bhopal (M.P.)

Mahendra Shankar, *Lecturer (S.G.)* (Retd.), NCERT, New Delhi

Meena Shrimali, *Teacher*, Vidya Bhawan Senior Secondary School, Udaipur, Rajasthan

P. Bhaskar Kumar, *PGT*, Jawahar Navodaya Vidyalaya, Lepakshi, Distt. Anantpur (A.P.)

R. Athmaraman, *Mathematics Education Consultant*, TI Matric Higher Secondary School and AMTI, Chennai, Tamil Nadu

Ram Avtar, *Professor* (Retd.), NCERT, New Delhi

Shailesh Shirali, Rishi Valley School, Rishi Valley, Madanapalle (A.P.)

S.K.S. Gautam, *Professor*, DEME, NCERT, New Delhi

Shradha Agarwal, *Principal*, Florets International School, Panki, Kanpur (U.P.)

Srijata Das, *Senior Lecturer* in Mathematics, SCERT, New Delhi

V.P. Singh, *Reader*, DESM, NCERT, New Delhi

Member-coordinator

Ashutosh K. Wazalwar, *Professor*, DESM, NCERT, New Delhi

ACKNOWLEDGEMENTS

The Council gratefully acknowledges the valuable contributions of the following participants of the Textbook Review Workshop: Shri Pradeep Bhardwaj, *TGT* (Mathematics) Bal Sthali Public Secondary School, Kirari, Nangloi, New Delhi; Shri Sankar Misra, *Teacher* in Mathematics, Demonstration Multipurpose School, Regional Institute of Education, Bhubaneswar (Orissa); Shri Manohar M. Dhok, *Supervisor,* M.P. Deo Smruti Lokanchi Shala, Nagpur (Maharashtra); Shri Manjit Singh Jangra, *Maths teacher,* Government Senior Secondary School, Sector-4/7, Gurgoan (Haryana); Dr. Rajendra Kumar Pooniwala, U.D.T., Government Subhash Excellence School, Burhanpur (M.P.); Shri K. Balaji, TGT (Mathematics), Kendriya Vidyalaya No.1, Tirupati (A.P.); Ms. Mala Mani, Amity International School, Sector-44, Noida; Ms. Omlata Singh, *TGT* (Mathematics), Presentation Convent Senior Secondary School, Delhi; Ms. Manju Dutta, Army Public School, Dhaula Kuan, New Delhi; Ms. Nirupama Sahni, *TGT* (Mathematics), Shri Mahaveer Digambar Jain Senior Secondary School, Jaipur (Rajasthan); Shri Nagesh Shankar Mone, *Head Master,* Kantilal Purshottam Das Shah Prashala, Vishrambag, Sangli (Maharashtra); Shri Anil Bhaskar Joshi, *Senior teacher* (Mathematics), Manutai Kanya Shala, Tilak Road, Akola (Maharashtra); Dr. Sushma Jairath, *Reader,* DWS, NCERT, New Delhi; Shri Ishwar Chandra, *Lecturer (S.G.)* (Retd.) NCERT, New Delhi.

The Council is grateful for the suggestions/comments given by the following participants during the workshop of the mathematics Textbook Development Committee – Shri Sanjay Bolia and Shri Deepak Mantri from Vidya Bhawan Basic School, Udaipur; Shri Inder Mohan Singh Chhabra, Vidya Bhawan Educational Resource Centre, Udaipur.

The Council acknowledges the comments/suggestions given by Dr. R.P. Maurya, *Reader,* DESM, NCERT, New Delhi; Dr. Sanjay Mudgal, *Lecturer,* DESM, NCERT, New Delhi; Dr. T.P. Sharma, *Lecturer,* DESM, NCERT, New Delhi for the improvement of the book.

The Council acknowledges the support and facilities provided by Vidya Bhawan Society and its staff, Udaipur, for conducting workshops of the development committee at Udaipur and to the Director, Centre for Science Education and Communication (CSEC), Delhi University for providing library help.

The Council acknowledges the academic and administrative support of Professor Hukum Singh, Head, DESM, NCERT.

The Council also acknowledges the efforts of Sajjad Haider Ansari, Rakesh Kumar, Neelam Walecha, *DTP Operators*; Kanwar Singh, *Copy Editor;* Abhimanu Mohanty, *Proof Reader,* Deepak Kapoor, *Computer Station Incharge,* DESM, NCERT for technical assistance, APC Office and the Administrative Staff, DESM, NCERT and the Publication Department of the NCERT.

NATIONAL ANTHEM

Jana gana mana adhinayaka jaya he

Bharata bhagya vidhata

Panjaba Sindhu Gujarata Maratha

Dravida Utkala Banga

Vindhya Himachala Yamuna Ganga

uchchala jaladhi taranga

Tava Subha name jage, tave subha asisa mage,

gahe tava jaya gatha.

Jana gana mangala dayaka jaya he

Bharata bhagya vidhata.

Jaya he, Jaya he, Jaya he,

jaya jaya jaya jaya he.

-Rabindranath Tagore

జాతీయ గీతం

జనగణమన అధినాయక జయహే!

భారత భాగ్యవిధాతా!

పంజాబ, సింధు, గుజరాత, మరాఠా,

ద్రావిడ, ఉత్కళ, వంగా!

వింధ్య, హిమాచల, యమునా, గంగా!

ఉచ్ఛల జలధి తరంగా!

తవ శుభనామే జాగే!

తవ శుభ ఆశిష మాఁగే

గాహే తవ జయగాథా!

జనగణ మంగళదాయక జయహే!

భారత భాగ్య విధాతా!

జయహే! జయహే! జయహే!

జయ జయ జయ జయహే!!

- రవీంద్రనాథ్ ఠాగూర్

PLEDGE | ప్రతిజ్ఞ

India is my country. All Indians are my brothers and sisters.
I love my country and I am proud of its rich and varied heritage.
I shall always strive to be worthy of it.
I shall give my parents, teachers and all elders respect,
and treat everyone with courtesy. I shall be kind to animals.
To my country and my people, I pledge my devotion.
In their well-being and prosperity alone lies my happiness.

- Pydimarri Venkata Subba Rao

భారతదేశం నా మాతృభూమి. భారతీయులందరూ నా సహోదరులు.
నేను నా దేశాన్ని ప్రేమిస్తున్నాను. సుసంపన్నమైన, బహువిధమైన నా దేశ వారసత్వ
సంపద నాకు గర్వకారణం. దీనికి అర్హత పొందడానికై సర్వదా నేను కృషి చేస్తాను.
నా తల్లిదండ్రుల్ని, ఉపాధ్యాయుల్ని, పెద్దలందర్ని గౌరవిస్తాను. ప్రతివారితోను మర్యాదగా
నడుచుకొంటాను. జంతువులపట్ల దయతో ఉంటాను.
నా దేశంపట్ల, నా ప్రజలపట్ల సేవానిరతితో ఉంటానని ప్రతిజ్ఞ చేస్తున్నాను.
వారి శ్రేయోభివృద్ధులే నా ఆనందానికి మూలం.

- పైడిమర్రి వెంకటసుబ్బారావు

MATHEMATICS
గణితం
Class / తరగతి - VIII
Semester (సెమిస్టర్) - I
CONTENTS / విషయ సూచిక

Chapter 1	Rational Numbers	
అధ్యాయం 1	అకరణీయ సంఖ్యలు	2 - 41
Chapter 2	Linear Equations in One Variable	
అధ్యాయం 2	ఏక చరరాశిలో రేఖీయ సమీకరణాలు	42 - 73
Chapter 3	Understanding Quadrilaterals	
అధ్యాయం 3	చతుర్భుజాలను అవగాహన చేసుకోవడం	74 - 113
Chapter 4	Practical Geometry	
అధ్యాయం 4	ప్రయోగాత్మక జ్యామితి	114 - 137
Chapter 5	Data Handling	
అధ్యాయం 5	దత్తాంశ నిర్వహణ	138 - 177
Chapter 6	Squares and Square Roots	
అధ్యాయం 6	వర్గములు మరియు వర్గమూలాలు	178 - 217
Chapter 7	Cubes and Cube Roots	
అధ్యాయం 7	ఘనములు మరియు ఘనమూలాలు	218 - 233
Chapter 8	Comparing Quantities	
అధ్యాయం 8	పరిమాణాలను పోల్చుట	234 - 271
	Answers	
	జవాబులు	272 - 288

CHAPTER 1

Rational Numbers

0852CH01

1.1 Introduction

In Mathematics, we frequently come across simple equations to be solved. For example, the equation $x + 2 = 13$ (1)

is solved when $x = 11$, because this value of x satisfies the given equation. The solution 11 is a **natural number**. On the other hand, for the equation

$$x + 5 = 5 \quad (2)$$

the solution gives the **whole number** 0 (zero). If we consider only natural numbers, equation (2) cannot be solved. To solve equations like (2), we added the number zero to the collection of natural numbers and obtained the whole numbers. Even whole numbers will not be sufficient to solve equations of type

$$x + 18 = 5 \quad (3)$$

Do you see 'why'? We require the number –13 which is not a whole number. This led us to think of **integers, (positive and negative)**. Note that the positive integers correspond to natural numbers. One may think that we have enough numbers to solve all simple equations with the available list of integers. Now consider the equations

$$2x = 3 \quad (4)$$

$$5x + 7 = 0 \quad (5)$$

for which we cannot find a solution from the integers. (Check this)

We need the numbers $\frac{3}{2}$ to solve equation (4) and $\frac{-7}{5}$ to solve equation (5). This leads us to the collection of **rational numbers**.

We have already seen basic operations on rational numbers. We now try to explore some properties of operations on the different types of numbers seen so far.

అకరణీయ సంఖ్యలు

అధ్యాయం 1

A4F2E2

1.1 పరిచయం

మనం గణితంలో తరచుగా సామాన్య సమీకరణాలను సాధించాల్సి వస్తుంది. ఉదాహరణకు

$$x + 2 = 13 \qquad (1)$$

అనే సమీకరణం $x = 11$ వద్ద సాధించబడినది. ఎందుకంటే ఈ x విలువ ఇచ్చిన సమీకరణాన్ని తృప్తిపరుస్తుంది. ఈ సాధన 11 ఒక **సహజ సంఖ్య**. మరొక సందర్భంలో

$$x + 5 = 5 \qquad (2)$$

సమీకరణానికి **పూర్ణాంకం** 0 (సున్న) సాధన అవుతుంది. సహజ సంఖ్యలను మాత్రమే పరిగణనలోకి తీసుకుంటే ఈ సమీకరణము(2)ను సాధించలేము. సమీకరణం (2) లాంటివి సాధించుటకు మనం సహజ సంఖ్యలకు సున్నా ను జతచేయడం ద్వారా **పూర్ణాంకాలను** పొందుతాము.

$$x + 18 = 5 \qquad (3)$$

ఇటువంటి సమీకరణములు సాధించుటకు పూర్ణాంకాలు కూడా సరిపోవు.

సాధనకు మనకు కావలసిన –13 పూర్ణాంకం కాదు, ఇది మనల్ని **పూర్ణ సంఖ్యల (ధన, ఋణ)** గురించి ఆలోచింపజేసింది. ఎందుకో మీకు తెలుసా? ధన పూర్ణ సంఖ్యలు సహజ సంఖ్యలు అని గమనించండి. సామాన్య సమీకరణాలన్నింటినీ సాధించుటకు అనువైన సంఖ్యలన్నీ పూర్ణ సంఖ్యలలో ఉన్నాయని అనుకొంటాం, ఇప్పుడు

$$2x = 3 \qquad (4)$$

$$5x + 7 = 0 \qquad (5)$$

వంటి సమీకరణాల సాధనలు మనం పూర్ణ సంఖ్యలతో కనుగొనలేము. (సరిచూడండి)

సమీకరణం (4)ను సాధించుటకు మనకు $\frac{3}{2}$ మరియు సమీకరణం (5)ను సాధించుటకు $\frac{-7}{5}$ కావలెను. ఇది మనకు **అకరణీయ సంఖ్యల** సేకరణకు దారితీస్తుంది.

అకరణీయ సంఖ్యలపై ప్రాథమిక పరిక్రియలను మనం గతంలోనే తెలుసుకున్నాం. ఇంతవరకు చూసిన సంఖ్యలపై ఇప్పుడు మనం ప్రాథమిక పరిక్రియలలో కొన్ని ధర్మాలను గురించి తెలుసుకుందాం.

1.2 Properties of Rational Numbers

1.2.1 Closure

(i) Whole numbers

Let us revisit the closure property for all the operations on whole numbers in brief.

Operation	Numbers	Remarks
Addition	0 + 5 = 5, a whole number 4 + 7 = ... Is it a whole number? In general, $a + b$ is a whole number for any two whole numbers a and b.	Whole numbers are closed under addition.
Subtraction	5 – 7 = – 2, which is not a whole number.	Whole numbers are **not** closed under subtraction.
Multiplication	0 × 3 = 0, a whole number 3 × 7 = ... Is it a whole number? In general, if a and b are any two whole numbers, their product ab is a whole number.	Whole numbers are closed under multiplication.
Division	$5 \div 8 = \frac{5}{8}$, which is not a whole number.	Whole numbers are **not** closed under division.

Check for closure property under all the four operations for natural numbers.

(ii) Integers

Let us now recall the operations under which integers are closed.

Operation	Numbers	Remarks
Addition	– 6 + 5 = – 1, an integer Is – 7 + (–5) an integer? Is 8 + 5 an integer? In general, $a + b$ is an integer for any two integers a and b.	Integers are closed under addition.
Subtraction	7 – 5 = 2, an integer Is 5 – 7 an integer? – 6 – 8 = – 14, an integer	Integers are closed under subtraction.

1. 2 అకరణీయసంఖ్యల ధర్మాలు

1.2.1 సంవృతం

(i) పూర్ణాంకాలు

ప్రాథమిక ప్రక్రియలన్నింటిలో పూర్ణాంకాలపై సంవృత ధర్మాన్ని సంక్షిప్తంగా పున:పరిశీలిద్దాం

పరిక్రియ	సంఖ్యలు	వ్యాఖ్యలు
సంకలనం	$0 + 5 = 5$, ఇది ఒక పూర్ణాంకం. $4 + 7 = \ldots$. ఇది ఒక పూర్ణాంకమా? సాధారణంగా, a మరియు b లు ఏవేని రెండు పూర్ణాంకాలు అయితే $a + b$ కూడా ఒక పూర్ణాంకము.	పూర్ణాంకాలు సంకలనం దృష్ట్యా సంవృతం అగును.
వ్యవకలనం	$5 - 7 = -2$, ఇది పూర్ణాంకం కాదు	పూర్ణాంకాలు వ్యవకలనం దృష్ట్యా సంవృతం **కాదు**.
గుణకారం	$0 \times 3 = 0$, ఇది ఒక పూర్ణాంకం $3 \times 7 = \ldots$. ఇది ఒక పూర్ణాంకమా? సాధారణంగా a మరియు b లు ఏవేని రెండు పూర్ణాంకాలు అయితే వాటి లబ్ధం ab కూడా ఒక పూర్ణాంకము.	పూర్ణాంకాలు గుణకారం దృష్ట్యా సంవృతం.
భాగహారం	$5 \div 8 = \frac{5}{8}$, ఇది పూర్ణాంకం కాదు	పూర్ణాంకాలు భాగహారం దృష్ట్యా సంవృతం **కాదు**.

సహజ సంఖ్యలపై చతుర్విధ పరిక్రియలలో సంవృత ధర్మాన్ని పరిశీలించండి.

(ii) పూర్ణసంఖ్యలు

ఇప్పుడు పూర్ణసంఖ్యలు ఏ పరిక్రియలలో సంవృతమో జ్ఞప్తికి తెచ్చుకుందాం.

పరిక్రియ	సంఖ్యలు	వ్యాఖ్యలు
సంకలనం	$-6 + 5 = -1$, ఇది ఒక పూర్ణసంఖ్య $-7+(-5)$ ఇది ఒక పూర్ణసంఖ్యనా? $8 + 5$ పూర్ణసంఖ్యనా? సాధారణంగా a మరియు b లు ఏవేని రెండు పూర్ణ సంఖ్యలు అయితే $a + b$ కూడా ఒక పూర్ణసంఖ్యయే.	పూర్ణసంఖ్యలు సంకలనం దృష్ట్యా సంవృతం.
వ్యవకలనం	$7 - 5 = 2$, ఒక పూర్ణసంఖ్య. $5 - 7$ పూర్ణ సంఖ్యనా? $-6 - 8 = -14$, పూర్ణసంఖ్య	పూర్ణసంఖ్యలు వ్యవకలనం దృష్ట్యా సంవృతం.

	$-6-(-8)=2$, an integer Is $8-(-6)$ an integer? In general, for any two integers a and b, $a-b$ is again an integer. Check if $b-a$ is also an integer.	
Multiplication	$5\times 8=40$, an integer Is -5×8 an integer? $-5\times(-8)=40$, an integer In general, for any two integers a and b, $a\times b$ is also an integer.	Integers are closed under multiplication.
Division	$5\div 8=\frac{5}{8}$, which is not an integer.	Integers are **not** closed under division.

You have seen that whole numbers are closed under addition and multiplication but not under subtraction and division. However, integers are closed under addition, subtraction and multiplication but not under division.

(iii) Rational numbers

Recall that a number which can be written in the form $\frac{p}{q}$, where p and q are integers and $q\neq 0$ is called a **rational number**. For example, $-\frac{2}{3}, \frac{6}{7}, \frac{9}{-5}$ are all rational numbers. Since the numbers 0, –2, 4 can be written in the form $\frac{p}{q}$, they are also rational numbers. (Check it!)

(a) You know how to add two rational numbers. Let us add a few pairs.

$$\frac{3}{8}+\frac{(-5)}{7}=\frac{21+(-40)}{56}=\frac{-19}{56}$$ (a rational number)

$$\frac{-3}{8}+\frac{(-4)}{5}=\frac{-15+(-32)}{40}=\ldots$$ Is it a rational number?

$$\frac{4}{7}+\frac{6}{11}=\ldots$$ Is it a rational number?

We find that sum of two rational numbers is again a rational number. Check it for a few more pairs of rational numbers.

We say that *rational numbers are closed under addition. That is, for any two rational numbers a and b, a + b is also a rational number.*

(b) Will the difference of two rational numbers be again a rational number?

We have,

$$\frac{-5}{7}-\frac{2}{3}=\frac{-5\times 3-2\times 7}{21}=\frac{-29}{21}$$ (a rational number)

	$-6-(-8)=2$, ఒక పూర్ణసంఖ్య $8-(-6)$ పూర్ణసంఖ్యనా? సాధారణంగా a మరియు b లు ఏవేని రెండు పూర్ణసంఖ్యలైతే $a-b$ కూడా ఒక పూర్ణసంఖ్య. $b-a$ కూడా ఒక పూర్ణసంఖ్యనా? పరిశీలించండి.	
గుణకారం	$5\times 8=40$ ఒక పూర్ణసంఖ్య -5×8 పూర్ణసంఖ్యనా? $-5\times(-8)=40$ ఒక పూర్ణసంఖ్య. సాధారణంగా a & b లు ఏవేని రెండు పూర్ణసంఖ్యలు అయితే $a\times b$ కూడా ఒక పూర్ణసంఖ్య	పూర్ణసంఖ్యలు గుణకారం దృష్ట్యా సంవృతం.
భాగహారం	$5\div 8=\frac{5}{8}$, పూర్ణసంఖ్య కాదు	పూర్ణ సంఖ్యలు భాగహారం దృష్ట్యా సంవృతం **కాదు**.

పూర్ణాంకాలు సంకలనం మరియు గుణకారం లోనూ సంవృతం, కానీ వ్యవకలనం మరియు భాగహారాలలో సంవృతం కావు. అలాగే పూర్ణసంఖ్యలు సంకలనం, వ్యవకలనం మరియు గుణకారంలోనూ సంవృతం కానీ భాగహారంలో మాత్రం కాదు.

(iii) అకరణీయ సంఖ్యలు

p మరియు q $(q\neq 0)$లు పూర్ణ సంఖ్యలు మరియు $\frac{p}{q}$ రూపంలో వ్యక్తపరచదగు సంఖ్యలను **అకరణీయ సంఖ్యలు** అంటారని మనం నేర్చుకున్న విషయం జ్ఞప్తికి తెచ్చుకుందాం.

ఉదాహరణకు $-\frac{2}{3}, \frac{6}{7}, \frac{9}{-5}$ లు అకరణీయ సంఖ్యలు. అలాగే 0, –2, 4 లు కూడా $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయవచ్చు. కనుక అవి కూడా అకరణీయ సంఖ్యలే. (సరిచూడండి!)

(a) రెండు అకరణీయ సంఖ్యలను సంకలనం చేయడం మీకు తెలుసు. కొన్ని జతలను సంకలనం చేద్దాం.

$$\frac{3}{8}+\frac{(-5)}{7}=\frac{21+(-40)}{56}=\frac{-19}{56} \qquad \text{(ఒక అకరణీయ సంఖ్య)}$$

$$\frac{-3}{8}+\frac{(-4)}{5}=\frac{-15+(-32)}{40}=\ldots \qquad \text{ఇది ఒక అకరణీయ సంఖ్యనా?}$$

$$\frac{4}{7}+\frac{6}{11}=\ldots \qquad \text{ఇది ఒక అకరణీయ సంఖ్యనా?}$$

రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మొత్తం ఒక అకరణీయ సంఖ్య అని మనం తెలుసుకున్నాం, వీటిని మరికొన్ని ఉదాహరణలతో పరీక్షించండి. అకరణీయ సంఖ్యల సంకలనం సంవృతమని మనం చెప్పవచ్చు. అనగా *a మరియు b లు ఏవేని రెండు అకరణీయ సంఖ్యలయిన $a+b$ కూడా అకరణీయ సంఖ్యయే అగును.*

(b) రెండు అకరణీయ సంఖ్యల భేదం కూడా అకరణీయ సంఖ్యనా?

$$\frac{-5}{7}-\frac{2}{3}=\frac{-5\times 3-2\times 7}{21}=\frac{-29}{21} \qquad \text{(ఇది ఒక అకరణీయ సంఖ్య)}$$

$\frac{5}{8} - \frac{4}{5} = \frac{25-32}{40} = \ldots$ Is it a rational number?

$\frac{3}{7} - \left(\frac{-8}{5}\right) = \ldots$ Is it a rational number?

Try this for some more pairs of rational numbers. We find that *rational numbers are closed under subtraction. That is, for any two rational numbers a and b, a – b is also a rational number.*

(c) Let us now see the product of two rational numbers.

$\frac{-2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{-8}{15}; \frac{3}{7} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{35}$ (both the products are rational numbers)

$-\frac{4}{5} \times \frac{-6}{11} = \ldots$ Is it a rational number?

Take some more pairs of rational numbers and check that their product is again a rational number.

We say that *rational numbers are closed under multiplication. That is, for any two rational numbers a and b, a × b is also a rational number.*

(d) We note that $\frac{-5}{3} \div \frac{2}{5} = \frac{-25}{6}$ (a rational number)

$\frac{2}{7} \div \frac{5}{3} = \ldots$. Is it a rational number? $\frac{-3}{8} \div \frac{-2}{9} = \ldots$. Is it a rational number?

Can you say that rational numbers are closed under division?

We find that for any rational number *a*, *a* ÷ 0 is **not defined**.

So rational numbers are **not closed** under division.

However, if we exclude zero then the collection of, all other rational numbers is closed under division.

TRY THESE

Fill in the blanks in the following table.

Numbers	Closed under			
	addition	subtraction	multiplication	division
Rational numbers	Yes	Yes	...	No
Integers	...	Yes	...	No
Whole numbers	...	...	Yes	...
Natural numbers	...	No	...	...

$$\frac{5}{8}-\frac{4}{5}=\frac{25-32}{40}=\ldots$$ ఇది ఒక అకరణీయ సంఖ్యనా?

$$\frac{3}{7}-\left(\frac{-8}{5}\right)=\ldots$$ ఇది ఒక అకరణీయ సంఖ్యనా?

మరికొన్ని జతల అకరణీయ సంఖ్యలతో ప్రయత్నించండి. అకరణీయ సంఖ్యలు వ్యవకలనంలో సంవృతం అని తెలుసుకున్నాం అనగా a మరియు b లు ఏవేని రెండు అకరణీయ సంఖ్యలయిన $a-b$ కూడా అకరణీయ సంఖ్యయే.

(c) ఇప్పుడు మనం రెండు అకరణీయ సంఖ్యల లబ్ధంను చూద్దాం.

$$\frac{-2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{-8}{15};\ \frac{3}{7}\times\frac{2}{5}=\frac{6}{35}$$ (రెండు లబ్ధాలు కూడా అకరణీయ సంఖ్యలే)

$$-\frac{4}{5}\times\frac{-6}{11}=\ldots$$ ఇది ఒక అకరణీయ సంఖ్యనా?

మరికొన్ని జతల అకరణీయ సంఖ్యలను తీసుకొని వాటి లాబ్ధాలు కూడా అకరణీయ సంఖ్యలు అవుతాయేమో పరీక్షించండి.

అకరణీయ సంఖ్యలు గుణకారంలో సంవృతమని మనం చెప్పవచ్చు. కావున a మరియు b లు ఏవేని రెండు అకరణీయ సంఖ్యలు అయిన $a \times b$ కూడా అకరణీయ సంఖ్యయే.

(d) $$\frac{-5}{3}\div\frac{2}{5}=\frac{-25}{6}$$ (ఒక అకరణీయ సంఖ్య)

$$\frac{2}{7}\div\frac{5}{3}=\ldots\ .$$ ఇది ఒక అకరణీయ సంఖ్యనా?

$$\frac{-3}{8}\div\frac{-2}{9}=\ldots\ .$$ ఇది ఒక అకరణీయ సంఖ్యనా?

అకరణీయ సంఖ్యలు భాగహారంలో సంవృతమని మీరు చెప్పగలరా?

a ఏదేని అకరణీయ సంఖ్య అయిన $a \div 0$ అనునది **నిర్వచించబడదని** తెలుసుకుంటాము. కావున అకరణీయ సంఖ్యలు భాగహారంలో **సంవృతం కావు.**

ఏది ఏమైనా అకరణీయ సంఖ్యల నుండి సున్నాను మినహాయించిన మిగిలిన అకరణీయ సంఖ్యలు భాగహారంలో సంవృతం అగును.

ప్రయత్నించండి

క్రింది పట్టికలోని ఖాళీలను పూరించండి.

సంఖ్యలు	సంవృతం			
	సంకలనం	వ్యవకలనం	గుణకారం	భాగహారం
అకరణీయ సంఖ్యలు	అవును	అవును	...	కాదు
పూర్ణ సంఖ్యలు	...	అవును	...	కాదు
పూర్ణాంకాలు	...	...	అవును	...
సహజ సంఖ్యలు	...	కాదు	...	...

1.2.2 Commutativity

(i) Whole numbers

Recall the commutativity of different operations for whole numbers by filling the following table.

Operation	Numbers	Remarks
Addition	$0 + 7 = 7 + 0 = 7$ $2 + 3 = ... + ... = ...$ For any two whole numbers a and b, $a + b = b + a$	Addition is commutative.
Subtraction	....	Subtraction is not commutative.
Multiplication	....	Multiplication is commutative.
Division	....	Division is not commutative.

Check whether the commutativity of the operations hold for natural numbers also.

(ii) Integers

Fill in the following table and check the commutativity of different operations for integers:

Operation	Numbers	Remarks
Addition	....	Addition is commutative.
Subtraction	Is $5 - (-3) = -3 - 5$?	Subtraction is not commutative.
Multiplication	....	Multiplication is commutative.
Division	....	Division is not commutative.

(iii) Rational numbers

(a) Addition

You know how to add two rational numbers. Let us add a few pairs here.

$$\frac{-2}{3}+\frac{5}{7}=\frac{1}{21} \text{ and } \frac{5}{7}+\left(\frac{-2}{3}\right)=\frac{1}{21}$$

So, $$\frac{-2}{3}+\frac{5}{7}=\frac{5}{7}+\left(\frac{-2}{3}\right)$$

Also, $$\frac{-6}{5}+\left(\frac{-8}{3}\right)=\ldots \text{ and } \frac{-8}{3}+\left(\frac{-6}{5}\right)=\ldots$$

Is $$\frac{-6}{5}+\left(\frac{-8}{3}\right)=\left(\frac{-8}{3}\right)+\left(\frac{-6}{5}\right)?$$

1.2.2 స్థిత్యంతరం (వినిమయం)

(i) పూర్ణాంకాలు

క్రింది పట్టికను పూరించడం ద్వారా పూర్ణాంకాలు వివిధ పరిక్రియలలో స్థిత్యంతరం అని జ్ఞప్తికి తెచ్చుకుందాం.

పరిక్రియ	సంఖ్యలు	వ్యాఖ్యలు
సంకలనం	$0 + 7 = 7 + 0 = 7$ $2 + 3 = \ldots + \ldots = \ldots.$ a మరియు b లు ఏవేని రెండు పూర్ణాంకాలు అయిన $a + b = b + a$	సంకలనం స్థిత్యంతరం అగును.
వ్యవకలనం	....	వ్యవకలనం స్థిత్యంతరం కాదు.
గుణకారం	....	గుణకారం స్థిత్యంతరం.
భాగహారం	....	భాగహారం స్థిత్యంతరం కాదు.

సహజ సంఖ్యలు చతుర్విధ పరిక్రియలలో స్థిత్యంతరాన్ని పాటిస్తాయేమో పరీక్షించండి.

(ii) పూర్ణ సంఖ్యలు

క్రింది పట్టికను నింపి, పూర్ణ సంఖ్యల స్థిత్యంతర ధర్మాన్ని వివిధ పరిక్రియలలో పరీక్షించండి.

పరిక్రియ	సంఖ్యలు	వ్యాఖ్యలు
సంకలనం	....	సంకలనం స్థిత్యంతరం అగును.
వ్యవకలనం	$5 - (-3) = -3 - 5$ అగునా?	వ్యవకలనం స్థిత్యంతరం కాదు.
గుణకారం	....	గుణకారం స్థిత్యంతరం అగును.
భాగహారం	....	భాగహారం స్థిత్యంతరం కాదు.

(iii) అకరణీయ సంఖ్యలు

(a) సంకలనం

రెండు అకరణీయ సంఖ్యలను సంకలనం ఎలా చేయాలో మీకు తెలుసు. ఇక్కడ మరికొన్ని జతలను సంకలనం చేద్దాం.

$$\frac{-2}{3}+\frac{5}{7}=\frac{1}{21} \text{ మరియు } \frac{5}{7}+\left(\frac{-2}{3}\right)=\frac{1}{21}$$

అందువలన, $$\frac{-2}{3}+\frac{5}{7}=\frac{5}{7}+\left(\frac{-2}{3}\right)$$

అదేవిధంగా, $$\frac{-6}{5}+\left(\frac{-8}{3}\right)=\ldots \text{ మరియు } \frac{-8}{3}+\left(\frac{-6}{5}\right)=\ldots$$

$$\frac{-6}{5}+\left(\frac{-8}{3}\right)=\left(\frac{-8}{3}\right)+\left(\frac{-6}{5}\right) \text{ అవుతుందా?}$$

Is $\quad \frac{-3}{8}+\frac{1}{7}=\frac{1}{7}+\left(\frac{-3}{8}\right)$?

You find that two *rational numbers can be added in any order. We say that addition is commutative for rational numbers. That is, for any two rational numbers a and b, a + b = b + a.*

(b) Subtraction

Is $\quad \frac{2}{3}-\frac{5}{4}=\frac{5}{4}-\frac{2}{3}$?

Is $\quad \frac{1}{2}-\frac{3}{5}=\frac{3}{5}-\frac{1}{2}$?

You will find that subtraction is not commutative for rational numbers.

Note that subtraction is not commutative for integers and integers are also rational numbers. So, subtraction will not be commutative for rational numbers too.

(c) Multiplication

We have, $\quad \frac{-7}{3}\times\frac{6}{5}=\frac{-42}{15}=\frac{6}{5}\times\left(\frac{-7}{3}\right)$

Is $\quad \frac{-8}{9}\times\left(\frac{-4}{7}\right)=\frac{-4}{7}\times\left(\frac{-8}{9}\right)$?

Check for some more such products.

You will find that *multiplication is commutative for rational numbers.*

In general, a × b = b × a for any two rational numbers a and b.

(d) Division

Is $\quad \frac{-5}{4}\div\frac{3}{7}=\frac{3}{7}\div\left(\frac{-5}{4}\right)$?

You will find that expressions on both sides are not equal.

So division is **not commutative** for rational numbers.

TRY THESE

Complete the following table:

Numbers	Commutative for			
	addition	**subtraction**	**multiplication**	**division**
Rational numbers	Yes	...	...	...
Integers	...	No	...	...
Whole numbers	...	...	Yes	...
Natural numbers	...	...	...	No

$$\frac{-3}{8}+\frac{1}{7}=\frac{1}{7}+\left(\frac{-3}{8}\right)$$ అవుతుందా?

రెండు అకరణీయ సంఖ్యలను ఏ క్రమంలోనైనా సంకలనం చేయవచ్చునని మీరు కనుగొనవచ్చు. అకరణీయ సంఖ్యల సంకలనం స్థిత్యంతర ధర్మాన్ని పాటించునని చెప్పవచ్చు. అనగా a మరియు b లు ఏవైనా రెండు అకరణీయ సంఖ్యలు అయినచో, a + b = b + a.

(b) వ్యవకలనం

$$\frac{2}{3}-\frac{5}{4}=\frac{5}{4}-\frac{2}{3}$$ అవుతుందా?

$$\frac{1}{2}-\frac{3}{5}=\frac{3}{5}-\frac{1}{2}$$ అవుతుందా?

అకరణీయ సంఖ్యలు వ్యవకలనంలో స్థిత్యంతరం కాదని మనకు తెలుస్తుంది. పూర్ణసంఖ్యలు వ్యవకలనంలో స్థిత్యంతరం కావు. పూర్ణ సంఖ్యలన్నీ అకరణీయ సంఖ్యలు కావున అకరణీయ సంఖ్యలు కూడా వ్యవకలనంలో స్థిత్యంతరం కావని గమనించగలవు.

(c) గుణకారం

ఇప్పుడు, $$\frac{-7}{3}\times\frac{6}{5}=\frac{-42}{15}=\frac{6}{5}\times\left(\frac{-7}{3}\right)$$

అలాగే $$\frac{-8}{9}\times\left(\frac{-4}{7}\right)=\frac{-4}{7}\times\left(\frac{-8}{9}\right)$$ అవుతుందా?

ఇలాంటి మరికొన్ని లబ్ధాలను తీసుకొని పరీక్షించండి.

అప్పుడు *అకరణీయ సంఖ్యలలో గుణకారం స్థిత్యంతరం అని గ్రహిస్తారు. సాధారణంగా a మరియు b లు ఏవైనా రెండు అకరణీయ సంఖ్యలు అయితే a × b = b × a.*

(d) భాగహారం

$$\frac{-5}{4}\div\frac{3}{7}=\frac{3}{7}\div\left(\frac{-5}{4}\right)$$ అవుతుందా?

రెండు వైపులా గల సమాసాలు సమానంగా ఉండవు అని కనుగొంటాము. అందువల్ల, అకరణీయ సంఖ్యలు భాగహారంలో **స్థిత్యంతరం కాదు.**

ప్రయత్నించండి

క్రింది పట్టికను పూరించండి:

సంఖ్యలు	స్థిత్యంతరం			
	సంకలనం	వ్యవకలనం	గుణకారం	భాగహారం
అకరణీయ సంఖ్యలు	అవును	...	...	...
పూర్ణ సంఖ్యలు	...	కాదు	...	...
పూర్ణాంకాలు	...	...	అవును	...
సహజ సంఖ్యలు	...	...	...	కాదు

1.2.3 Associativity

(i) Whole numbers

Recall the associativity of the four operations for whole numbers through this table:

Operation	Numbers	Remarks
Addition	....	Addition is associative
Subtraction	....	Subtraction is **not** associative
Multiplication	Is $7 \times (2 \times 5) = (7 \times 2) \times 5$? Is $4 \times (6 \times 0) = (4 \times 6) \times 0$? For any three whole numbers a, b and c $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$	Multiplication is associative
Division	....	Division is **not** associative

Fill in this table and verify the remarks given in the last column.
Check for yourself the associativity of different operations for natural numbers.

(ii) Integers

Associativity of the four operations for integers can be seen from this table

Operation	Numbers	Remarks
Addition	Is $(-2) + [3 + (-4)]$ $= [(-2) + 3)] + (-4)$? Is $(-6) + [(-4) + (-5)]$ $= [(-6) + (-4)] + (-5)$? For any three integers a, b and c $a + (b + c) = (a + b) + c$	Addition is associative
Subtraction	Is $5 - (7 - 3) = (5 - 7) - 3$?	Subtraction is **not** associative
Multiplication	Is $5 \times [(-7) \times (-8)$ $= [5 \times (-7)] \times (-8)$? Is $(-4) \times [(-8) \times (-5)]$ $= [(-4) \times (-8)] \times (-5)$? For any three integers a, b and c $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$	Multiplication is associative
Division	Is $[(-10) \div 2] \div (-5)$ $= (-10) \div [2 \div (-5)]$?	Division is **not** associative

1.2.3 సహచర న్యాయం

(i) పూర్ణాంకాలు

క్రింది పట్టిక ద్వారా పూర్ణాంకాలలో చతుర్విధ పరిక్రియల సహచరన్యాయం గురించి జ్ఞప్తికి తెచ్చుకుందాం.

పరిక్రియ	సంఖ్యలు	వ్యాఖ్యలు
సంకలనం	....	సంకలనం సహచరం అగును
వ్యవకలనం	....	వ్యవకలనం సహచరం **కాదు**
గుణకారం	$7\times(2\times5) = (7\times2)\times5$ అవుతుందా? $4\times(6\times0) = (4\times6)\times0$ అవుతుందా? a, b మరియు c లు ఏవైనా మూడు పూర్ణాంకాలు అయిన $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$	గుణకారం సహచరం అగును
భాగహారం	....	భాగహారం సహచరం **కాదు**

ఈ పట్టికలో ఖాళీలను పూరించి, చివరి నిలువ వరుసలో వ్యాఖ్యలను పరిశీలించండి.
సహజ సంఖ్యలు చతుర్విధ పరిక్రియలలో సహచర న్యాయాన్ని పాటిస్తాయేమో సరిచూడండి.

(ii) పూర్ణసంఖ్యలు

క్రింది పట్టిక నుండి పూర్ణసంఖ్యల సహచర న్యాయాన్ని చతుర్విధ పరిక్రియలలో చూడవచ్చు.

పరిక్రియ	సంఖ్యలు	వ్యాఖ్యలు
సంకలనం	$(-2) + [3 + (-4)]$ $= [(-2) + 3)] + (-4)$ అగునా? $(-6) + [(-4) + (-5)]$ $= [(-6) + (-4)] + (-5)$ అగునా? a,b మరియు c లు ఏవేని మూడు పూర్ణ సంఖ్యలైనచో $a+(b+c) = (a+b)+c$	సంకలనం సహచరం అగును
వ్యవకలనం	$5 - (7 - 3) = (5 - 7) - 3$ అగునా?	వ్యవకలనం సహచరం **కాదు**
గుణకారం	$5 \times [(-7) \times (-8)$ $= [5 \times (-7)] \times (-8)$ అగునా? $(-4) \times [(-8) \times (-5)]$ $= [(-4) \times (-8)] \times (-5)$ అగునా? a, bమరియు c లు ఏవేని మూడు పూర్ణ సంఖ్యలైనచో $a\times(b\times c) = (a\times b)\times c$	గుణకారం సహచరం అగును
భాగహారం	$[(-10) \div 2] \div (-5)$ $= (-10) \div [2 \div (-5)]$ అగునా?	భాగహారం సహచరం **కాదు**

(iii) Rational numbers

(a) Addition

We have $\frac{-2}{3}+\left[\frac{3}{5}+\left(\frac{-5}{6}\right)\right]=\frac{-2}{3}+\left(\frac{-7}{30}\right)=\frac{-27}{30}=\frac{-9}{10}$

$$\left[\frac{-2}{3}+\frac{3}{5}\right]+\left(\frac{-5}{6}\right)=\frac{-1}{15}+\left(\frac{-5}{6}\right)=\frac{-27}{30}=\frac{-9}{10}$$

So, $\frac{-2}{3}+\left[\frac{3}{5}+\left(\frac{-5}{6}\right)\right]=\left[\frac{-2}{3}+\frac{3}{5}\right]+\left(\frac{-5}{6}\right)$

Find $\frac{-1}{2}+\left[\frac{3}{7}+\left(\frac{-4}{3}\right)\right]$ and $\left[\frac{-1}{2}+\frac{3}{7}\right]+\left(\frac{-4}{3}\right)$. Are the two sums equal?

Take some more rational numbers, add them as above and see if the two sums are equal. We find that *addition is associative for rational numbers. That is, for any three rational numbers a, b* and *c*, $a + (b + c) = (a + b) + c$.

(b) Subtraction

You already know that subtraction is not associative for integers, then what about rational numbers.

Is $\frac{-2}{3}-\left[\frac{-4}{5}-\frac{1}{2}\right]=\left[\frac{2}{3}-\left(\frac{-4}{5}\right)\right]-\frac{1}{2}$?

Check for yourself.

Subtraction is **not associative** for rational numbers.

(c) Multiplication

Let us check the associativity for multiplication.

$$\frac{-7}{3}\times\left(\frac{5}{4}\times\frac{2}{9}\right)=\frac{-7}{3}\times\frac{10}{36}=\frac{-70}{108}=\frac{-35}{54}$$

$$\left(\frac{-7}{3}\times\frac{5}{4}\right)\times\frac{2}{9}=\ldots$$

We find that $\frac{-7}{3}\times\left(\frac{5}{4}\times\frac{2}{9}\right)=\left(\frac{-7}{3}\times\frac{5}{4}\right)\times\frac{2}{9}$

Is $\frac{2}{3}\times\left(\frac{-6}{7}\times\frac{4}{5}\right)=\left(\frac{2}{3}\times\frac{-6}{7}\right)\times\frac{4}{5}$?

Take some more rational numbers and check for yourself.

We observe that *multiplication is associative for rational numbers. That is for any three rational numbers a, b* and *c*, $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$.

(iii) అకరణీయ సంఖ్యలు

(a) సంకలనం

$$\frac{-2}{3}+\left[\frac{3}{5}+\left(\frac{-5}{6}\right)\right]=\frac{-2}{3}+\left(\frac{-7}{30}\right)=\frac{-27}{30}=\frac{-9}{10}$$

$$\left[\frac{-2}{3}+\frac{3}{5}\right]+\left(\frac{-5}{6}\right)=\frac{-1}{15}+\left(\frac{-5}{6}\right)=\frac{-27}{30}=\frac{-9}{10}$$ అగును.

అందువలన $\frac{-2}{3}+\left[\frac{3}{5}+\left(\frac{-5}{6}\right)\right]=\left[\frac{-2}{3}+\frac{3}{5}\right]+\left(\frac{-5}{6}\right)$

$\frac{-1}{2}+\left[\frac{3}{7}+\left(\frac{-4}{3}\right)\right]$ మరియు $\left[\frac{-1}{2}+\frac{3}{7}\right]+\left(\frac{-4}{3}\right)$ లను కనుగొనండి. ఈ మొత్తాలు రెండు సమానమా?

ఇదే విధంగా మరికొన్ని అకరణీయ సంఖ్యలను తీసుకొని వాటిని పై విధంగా సంకలనం చేసి ఆ రెండింటి మొత్తములు సమానమేనా చూడండి. *అకరణీయ సంఖ్యలు సంకలనంలో సహచరం అని మీరు కనుగొంటారు. అనగా a, b మరియు c లు ఏవేని మూడు అకరణీయసంఖ్యలు అయిన* $a + (b + c) = (a + b) + c$.

(b) వ్యవకలనం

పూర్ణ సంఖ్యలు వ్యవకలనంలో సహచరం కాదని మీకు ఇప్పటికే తెలుసు. అకరణీయ సంఖ్యలు వ్యవకలనంలో సహచరమేనా?

$$\frac{-2}{3}-\left[\frac{-4}{5}-\frac{1}{2}\right]=\left[\frac{2}{3}-\left(\frac{-4}{5}\right)\right]-\frac{1}{2}$$ అగునా?

మీరే సరి చూడండి. అకరణీయ సంఖ్యలలో వ్యవకలనం **సహచరం కాదు.**

(c) గుణకారం

మనం ఇప్పుడు గుణకారంలో సహచరను పరిశీలిద్దాం.

$$\frac{-7}{3}\times\left(\frac{5}{4}\times\frac{2}{9}\right)=\frac{-7}{3}\times\frac{10}{36}=\frac{-70}{108}=\frac{-35}{54}$$

$$\left(\frac{-7}{3}\times\frac{5}{4}\right)\times\frac{2}{9}=\ldots$$

$$\frac{-7}{3}\times\left(\frac{5}{4}\times\frac{2}{9}\right)=\left(\frac{-7}{3}\times\frac{5}{4}\right)\times\frac{2}{9}$$ అని కనుగొంటాం.

$$\frac{2}{3}\times\left(\frac{-6}{7}\times\frac{4}{5}\right)=\left(\frac{2}{3}\times\frac{-6}{7}\right)\times\frac{4}{5}$$ అగునా?

మరికొన్ని అకరణీయ సంఖ్యలను తీసుకొని మీరు పరీక్షించండి. *అకరణీయ సంఖ్యలు గుణకార సహచర ధర్మాన్ని పాటిస్తాయని మనం గ్రహించవచ్చు.* అనగా a, b మరియు c లు *ఏవైన మూడు అకరణీయ సంఖ్యలయితే* $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$.

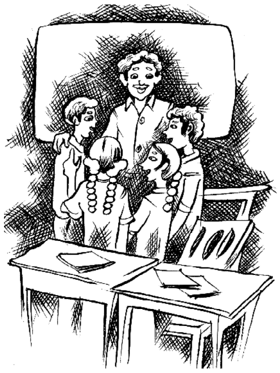
(d) Division

Recall that division is not associative for integers, then what about rational numbers?

Let us see if $\frac{1}{2} \div \left[\frac{-1}{3} \div \frac{2}{5}\right] = \left[\frac{1}{2} \div \left(\frac{-1}{3}\right)\right] \div \frac{2}{5}$

We have, LHS $= \frac{1}{2} \div \left(\frac{-1}{3} \div \frac{2}{5}\right) = \frac{1}{2} \div \left(\frac{-1}{3} \times \frac{5}{2}\right)$ (reciprocal of $\frac{2}{5}$ is $\frac{5}{2}$)

$$= \frac{1}{2} \div \left(-\frac{5}{6}\right) = \ldots$$



RHS $= \left[\frac{1}{2} \div \left(\frac{-1}{3}\right)\right] \div \frac{2}{5}$

$$= \left(\frac{1}{2} \times \frac{-3}{1}\right) \div \frac{2}{5} = \frac{-3}{2} \div \frac{2}{5} = \ldots$$

Is LHS = RHS? Check for yourself. You will find that division is **not associative** for rational numbers.

TRY THESE

Complete the following table:

Numbers	Associative for			
	addition	**subtraction**	**multiplication**	**division**
Rational numbers	...	...	...	No
Integers	...	...	Yes	...
Whole numbers	Yes	...	...	...
Natural numbers	...	No	...	...

Example 1: Find $\frac{3}{7} + \left(\frac{-6}{11}\right) + \left(\frac{-8}{21}\right) + \left(\frac{5}{22}\right)$

Solution: $\frac{3}{7} + \left(\frac{-6}{11}\right) + \left(\frac{-8}{21}\right) + \left(\frac{5}{22}\right)$

$$= \frac{198}{462} + \left(\frac{-252}{462}\right) + \left(\frac{-176}{462}\right) + \left(\frac{105}{462}\right)$$ (Note that 462 is the LCM of 7, 11, 21 and 22)

$$= \frac{198 - 252 - 176 + 105}{462} = \frac{-125}{462}$$

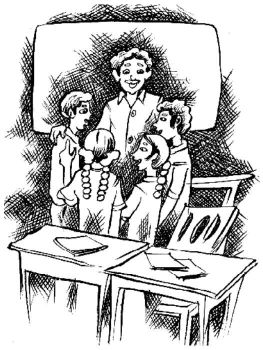
(d) భాగహారం

పూర్ణ సంఖ్యలలో భాగహారం సహచరం కాదని జ్ఞప్తికి తెచ్చుకుందాం, అయితే అకరణీయ సంఖ్యల సంగతి ఏమిటి?

$\frac{1}{2} \div \left[\frac{-1}{3} \div \frac{2}{5}\right] = \left[\frac{1}{2} \div \left(\frac{-1}{3}\right)\right] \div \frac{2}{5}$ అవుతుందేమో చూద్దాం.

LHS $= \frac{1}{2} \div \left(\frac{-1}{3} \div \frac{2}{5}\right) = \frac{1}{2} \div \left(\frac{-1}{3} \times \frac{5}{2}\right)$ అగును ($\frac{2}{5}$ యొక్క గుణకార విలోమం $\frac{5}{2}$)

$= \frac{1}{2} \div \left(-\frac{5}{6}\right) = \ldots$



RHS $= \left[\frac{1}{2} \div \left(\frac{-1}{3}\right)\right] \div \frac{2}{5} = \left(\frac{1}{2} \times \frac{-3}{1}\right) \div \frac{2}{5} = \frac{-3}{2} \div \frac{2}{5} = \ldots$

LHS = RHS అగునా? మీరే స్వయంగా పరీక్షించండి. దీని నుండి మీరు అకరణీయ సంఖ్యలు భాగహారం దృష్ట్యా **సహచరం కాదని** తెలుసుకుంటారు.

ప్రయత్నించండి

క్రింది పట్టికను పూరించండి:

సంఖ్యలు	సహచర న్యాయం			
	సంకలనం	వ్యవకలనం	గుణకారం	భాగహారం
అకరణీయ సంఖ్యలు	...	...	...	కాదు
పూర్ణసంఖ్యలు	...	...	అవును	...
పూర్ణాంకాలు	అవును	...	...	...
సహజసంఖ్యలు	...	కాదు	...	...

ఉదాహరణ 1 : $\frac{3}{7} + \left(\frac{-6}{11}\right) + \left(\frac{-8}{21}\right) + \left(\frac{5}{22}\right)$ విలువ కనుగొనండి?

సాధన: $\frac{3}{7} + \left(\frac{-6}{11}\right) + \left(\frac{-8}{21}\right) + \left(\frac{5}{22}\right)$

$= \frac{198}{462} + \left(\frac{-252}{462}\right) + \left(\frac{-176}{462}\right) + \left(\frac{105}{462}\right)$ (7, 11, 21 మరియు 22ల కసాగు 462 అని గమనించండి)

$= \frac{198 - 252 - 176 + 105}{462} = \frac{-125}{462}$

We can also solve it as.

$$\frac{3}{7}+\left(\frac{-6}{11}\right)+\left(\frac{-8}{21}\right)+\frac{5}{22}$$

$$=\left[\frac{3}{7}+\left(\frac{-8}{21}\right)\right]+\left[\frac{-6}{11}+\frac{5}{22}\right]$$ (by using commutativity and associativity)

$$=\left[\frac{9+(-8)}{21}\right]+\left[\frac{-12+5}{22}\right]$$ (LCM of 7 and 21 is 21; LCM of 11 and 22 is 22)

$$=\frac{1}{21}+\left(\frac{-7}{22}\right)=\frac{22-147}{462}=\frac{-125}{462}$$

Do you think the properties of commutativity and associativity made the calculations easier?

Example 2: Find $\frac{-4}{5}\times\frac{3}{7}\times\frac{15}{16}\times\left(\frac{-14}{9}\right)$

Solution: We have

$$\frac{-4}{5}\times\frac{3}{7}\times\frac{15}{16}\times\left(\frac{-14}{9}\right)$$

$$=\left(-\frac{4\times 3}{5\times 7}\right)\times\left(\frac{15\times(-14)}{16\times 9}\right)$$

$$=\frac{-12}{35}\times\left(\frac{-35}{24}\right)=\frac{-12\times(-35)}{35\times 24}=\frac{1}{2}$$

We can also do it as.

$$\frac{-4}{5}\times\frac{3}{7}\times\frac{15}{16}\times\left(\frac{-14}{9}\right)$$

$$=\left(\frac{-4}{5}\times\frac{15}{16}\right)\times\left[\frac{3}{7}\times\left(\frac{-14}{9}\right)\right]$$ (Using commutativity and associativity)

$$=\frac{-3}{4}\times\left(\frac{-2}{3}\right)=\frac{1}{2}$$

1.2.4 The role of zero (0)

Look at the following.

$2 + 0 = 0 + 2 = 2$ (Addition of 0 to a whole number)

$-5 + 0 = \ldots + \ldots = -5$ (Addition of 0 to an integer)

$\frac{-2}{7} + \ldots = 0 + \left(\frac{-2}{7}\right) = \frac{-2}{7}$ (Addition of 0 to a rational number)

దీనిని క్రింది విధంగా కూడా సాధించవచ్చు.

$$\frac{3}{7}+\left(\frac{-6}{11}\right)+\left(\frac{-8}{21}\right)+\frac{5}{22}$$

$$=\left[\frac{3}{7}+\left(\frac{-8}{21}\right)\right]+\left[\frac{-6}{11}+\frac{5}{22}\right]$$ (స్థిత్యంతర మరియు సహచర న్యాయాలను ఉపయోగించి)

$$=\left[\frac{9+(-8)}{21}\right]+\left[\frac{-12+5}{22}\right]$$ (7, 21ల క.సా.గు 21; 11, 22ల క.సా.గు 22)

$$=\frac{1}{21}+\left(\frac{-7}{22}\right)=\frac{22-147}{462}=\frac{-125}{462}$$

స్థిత్యంతర, సహచర న్యాయాలు గణనలను సులభం చేస్తాయని మీరు అనుకుంటున్నారా?

ఉదాహరణ 2 : $\frac{-4}{5}\times\frac{3}{7}\times\frac{15}{16}\times\left(\frac{-14}{9}\right)$ ను కనుగొనండి.

సాధన :

$$\frac{-4}{5}\times\frac{3}{7}\times\frac{15}{16}\times\left(\frac{-14}{9}\right)$$

$$=\left(-\frac{4\times 3}{5\times 7}\right)\times\left(\frac{15\times(-14)}{16\times 9}\right)$$

$$=\frac{-12}{35}\times\left(\frac{-35}{24}\right)=\frac{-12\times(-35)}{35\times 24}=\frac{1}{2}$$

దీనిని మనం క్రింది విధంగా కూడా చేయవచ్చు.

$$\frac{-4}{5}\times\frac{3}{7}\times\frac{15}{16}\times\left(\frac{-14}{9}\right)$$

$$=\left(\frac{-4}{5}\times\frac{15}{16}\right)\times\left[\frac{3}{7}\times\left(\frac{-14}{9}\right)\right]$$ (స్థిత్యంతర, సహచర న్యాయాలను ఉపయోగించి)

$$=\frac{-3}{4}\times\left(\frac{-2}{3}\right)=\frac{1}{2}$$

1.2.4 సున్నా (0) యొక్క పాత్ర

క్రింది వాటిని గమనించండి.

$2 + 0 = 0 + 2 = 2$ (పూర్ణాంకానికి 0ను కలపడం)

$-5 + 0 = \ldots + \ldots = -5$ (పూర్ణ సంఖ్యకు 0ను కలపడం)

$\frac{-2}{7} + \ldots = 0 + \left(\frac{-2}{7}\right) = \frac{-2}{7}$ (అకరణీయ సంఖ్యకు 0ను కలపడం)

You have done such additions earlier also. Do a few more such additions.

What do you observe? You will find that when you add 0 to a whole number, the sum is again that whole number. This happens for integers and rational numbers also.

In general, $a + 0 = 0 + a = a$, where a is a whole number

$b + 0 = 0 + b = b$, where b is an integer

$c + 0 = 0 + c = c$, where c is a rational number

Zero is called the identity for the addition of rational numbers. It is the additive identity for integers and whole numbers as well.

1.2.5 The role of 1

We have,

$$5 \times 1 = 5 = 1 \times 5 \qquad \text{(Multiplication of 1 with a whole number)}$$

$$\frac{-2}{7} \times 1 = \ldots \times \ldots = \frac{-2}{7}$$

$$\frac{3}{8} \times \ldots = 1 \times \frac{3}{8} = \frac{3}{8}$$

What do you find?

You will find that when you multiply any rational number with 1, you get back the same rational number as the product. Check this for a few more rational numbers. You will find that, $a \times 1 = 1 \times a = a$ for any rational number a.

We say *that* 1 *is the multiplicative identity for rational numbers.*

Is 1 the multiplicative identity for integers? For whole numbers?

THINK, DISCUSS AND WRITE

If a property holds for rational numbers, will it also hold for integers? For whole numbers? Which will? Which will not?

1.2.6 Negative of a number

While studying integers you have come across negatives of integers. What is the negative of 1? It is – 1 because $1 + (-1) = (-1) + 1 = 0$

So, what will be the negative of (–1)? It will be 1.

Also, $2 + (-2) = (-2) + 2 = 0$, so we say 2 is the **negative or additive inverse** of –2 and vice-versa. In general, for an integer a, we have, $a + (-a) = (-a) + a = 0$; so, a is the negative of $-a$ and $-a$ is the negative of a.

For the rational number $\frac{2}{3}$, we have,

$$\frac{2}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{2 + (-2)}{3} = 0$$

ఈ విధమైన సంకలనాలు మీరు ఇదివరకే చేశారు. అటువంటి మరికొన్ని సంకలనాలను చేయండి.

మీరు ఏమి గమనించారు? ఒక పూర్ణాంకానికి సున్నా కలిపినప్పుడు వచ్చే మొత్తం కూడా అదే పూర్ణాంకం అగును అని తెలుసుకున్నారు. పూర్ణసంఖ్యలు మరియు అకరణీయ సంఖ్యలకు ఇదే విధంగా అవుతుంది.

సాధారణంగా, a పూర్ణాంకమయినచో $a + 0 = 0 + a = a$,

b పూర్ణసంఖ్య అయినచో $b + 0 = 0 + b = b$,

c అకణీయ సంఖ్య అయినచో $c + 0 = 0 + c = c$,

సున్నా (0)ను అకరణీయ సంఖ్యల సంకలన తత్సమాంశము అంటారు. ఇది పూర్ణ సంఖ్యలు మరియు పూర్ణాంకాలకు కూడా సంకలన తత్సమాంశము అవుతుంది.

1.2.5 1 యొక్క పాత్ర

$$5 \times 1 = 5 = 1 \times 5 \quad \text{(పూర్ణాంకంతో 1ని గుణించడం)}$$

$$\frac{-2}{7} \times 1 = \ldots \times \ldots = \frac{-2}{7}$$

$$\frac{3}{8} \times \ldots = 1 \times \frac{3}{8} = \frac{3}{8}$$

మీరు ఏమి కనుగొన్నారు?

ఏదైనా ఒక అకరణీయ సంఖ్యను 1తో గుణించినప్పుడు మీరు తిరిగి అదే అకరణీయ సంఖ్యను లబ్ధంగా పొందుతారు. ఇంకా వేర్వేరు అకరణీయ సంఖ్యలు తీసుకొని సరిచూడండి. అలా చేసినప్పుడు a ఏదేని అకరణీయసంఖ్య అయితే $a \times 1 = 1 \times a = a$ గా తెలుసుకుంటారు.

సంఖ్య 1 ను అకరణీయ సంఖ్యల గుణకార తత్సమాంశం అంటారు.

పూర్ణ సంఖ్యలలో 1 గుణకార తత్సమం అవుతుందా? పూర్ణాంకాలలో ఏమవుతుంది?

ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి

అకరణీయ సంఖ్యలు పాటించు ఏదైనా ధర్మంను పూర్ణసంఖ్యలు కూడా పాటిస్తాయా? పూర్ణాంకాలు పాటిస్తాయా? ఏవి పాటిస్తాయి? ఏవి పాటించవు?

1.2.6 సంఖ్య యొక్క ఋణాత్మకం

పూర్ణ సంఖ్యల గురించి అభ్యసించేటప్పుడు ఋణ పూర్ణ సంఖ్యల గురించి మీరు తెలుసుకొనియున్నారు? 1 యొక్క ఋణాత్మకం ఏది? అది -1, ఎందుకనగా $1 + (-1) = (-1) + 1 = 0$

కనుక (-1) యొక్క ఋణాత్మకం ఏది? అది 1 అగును.

ఇట్లే, $2 + (-2) = (-2) + 2 = 0$ అందువల్ల 2 యొక్క **ఋణాత్మకం లేదా సంకలన విలోమం** -2 అంటాం మరియు అదేవిధంగా -2 కి 2 అగును. సాధారణంగా a ఒక పూర్ణ సంఖ్య అయితే $a + (-a) = (-a) + a = 0$; అందువల్ల $-a$ యొక్క సంకలన విలోమం a. అదే విధంగా a కి సంకలన విలోమం $-a$.

ఇప్పుడు అకరణీయ సంఖ్య $\frac{2}{3}$ ను తీసుకొందాం.

$$\frac{2}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{2 + (-2)}{3} = 0$$

Also, $\left(-\frac{2}{3}\right)+\frac{2}{3}=0$ (How?)

Similarly, $\frac{-8}{9}+\ldots=\ldots+\left(\frac{-8}{9}\right)=0$

$\ldots+\left(\frac{-11}{7}\right)=\left(\frac{-11}{7}\right)+\ldots=0$

In general, for a rational number $\frac{a}{b}$, we have, $\frac{a}{b}+\left(-\frac{a}{b}\right)=\left(-\frac{a}{b}\right)+\frac{a}{b}=0$. We say that $-\frac{a}{b}$ *is the additive inverse of* $\frac{a}{b}$ *and* $\frac{a}{b}$ *is the additive inverse of* $\left(-\frac{a}{b}\right)$.

1.2.7 Reciprocal

By which rational number would you multiply $\frac{8}{21}$, to get the product 1? Obviously by $\frac{21}{8}$, since $\frac{8}{21}\times\frac{21}{8}=1$.

Similarly, $\frac{-5}{7}$ must be multiplied by $\frac{7}{-5}$ so as to get the product 1.

We say that $\frac{21}{8}$ is the reciprocal of $\frac{8}{21}$ and $\frac{7}{-5}$ is the reciprocal of $\frac{-5}{7}$.

Can you say what is the reciprocal of 0 (zero)?

Is there a rational number which when multiplied by 0 gives 1? Thus, zero has no reciprocal.

We say that a rational number $\frac{c}{d}$ is called the **reciprocal** or **multiplicative inverse** of another non-zero rational number $\frac{a}{b}$ if $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=1$.

1.2.8 Distributivity of multiplication over addition for rational numbers

To understand this, consider the rational numbers $\frac{-3}{4}$, $\frac{2}{3}$ and $\frac{-5}{6}$.

$$\frac{-3}{4}\times\left\{\frac{2}{3}+\left(\frac{-5}{6}\right)\right\}=\frac{-3}{4}\times\left\{\frac{(4)+(-5)}{6}\right\}$$

$$=\frac{-3}{4}\times\left(\frac{-1}{6}\right)=\frac{3}{24}=\frac{1}{8}$$

Also $\frac{-3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{-3\times 2}{4\times 3}=\frac{-6}{12}=\frac{-1}{2}$

అలాగే, $\left(-\frac{2}{3}\right)+\frac{2}{3}=0$ (ఎలా?)

ఇదేవిధంగా, $\frac{-8}{9}+\ldots=\ldots+\left(\frac{-8}{9}\right)=0$

$\ldots+\left(\frac{-11}{7}\right)=\left(\frac{-11}{7}\right)+\ldots=0$

సాధారణంగా, $\frac{a}{b}$ ఒక అకరణీయ సంఖ్య అయినచో, $\frac{a}{b}+\left(-\frac{a}{b}\right)=\left(-\frac{a}{b}\right)+\frac{a}{b}=0$. దీని నుండి $-\frac{a}{b}$ అనునది $\frac{a}{b}$ యొక్క *సంకలన విలోమం* మరియు $\frac{a}{b}$ అనునది $\left(-\frac{a}{b}\right)$ యొక్క *సంకలన విలోమం* అని చెప్పవచ్చు.

1.2.7 వ్యుత్క్రమం

$\frac{8}{21}$ ను ఏ అకరణీయ సంఖ్యతో గుణించిన లబ్ధం 1 వస్తుంది? $\frac{21}{8}$ అని ఖచ్చితంగా చెప్పవచ్చు ఎందుకనగా, $\frac{8}{21}\times\frac{21}{8}=1$

ఇదే విధంగా, $\frac{-5}{7}$ ను $\frac{7}{-5}$ తో గుణించినచో లబ్ధం 1 వస్తుంది.

అందువలన $\frac{21}{8}$ ను $\frac{8}{21}$ యొక్క వ్యుత్క్రమం అని మరియు $\frac{7}{-5}$ ను $\frac{-5}{7}$ యొక్క వ్యుత్క్రమం అని అంటాం.

'0' (సున్నా) యొక్క వ్యుత్క్రమం ఎంతో నీవు చెప్పగలవా?

0తో గుణించినపుడు లబ్ధం 1 అయ్యే అకరణీయ సంఖ్య ఉందా? ఆవిధంగా, సున్నాకు వ్యుత్క్రమం లేదు.

$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=1$ అయితే $\frac{c}{d}$ అనే శూన్యేతర అకరణీయ సంఖ్యను $\frac{a}{b}$ అనే మరొక శూన్యేతర అకరణీయ సంఖ్యను **వ్యుత్క్రమం** లేదా **గుణకార విలోమం** అంటారు.

1.2.8 అకరణీయ సంఖ్యల సంకలనంపై గుణకార విభాగ న్యాయం

దీనిని అవగాహన చేసుకొనుటకు, అకరణీయ సంఖ్యలు $\frac{-3}{4}, \frac{2}{3}$ మరియు $\frac{-5}{6}$ లను తీసుకుందాం.

$$\frac{-3}{4}\times\left\{\frac{2}{3}+\left(\frac{-5}{6}\right)\right\}=\frac{-3}{4}\times\left\{\frac{(4)+(-5)}{6}\right\}$$

$$=\frac{-3}{4}\times\left(\frac{-1}{6}\right)=\frac{3}{24}=\frac{1}{8}$$

అలాగే $\frac{-3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{-3\times2}{4\times3}=\frac{-6}{12}=\frac{-1}{2}$

And $\frac{-3}{4} \times \frac{-5}{6} = \frac{5}{8}$

Therefore $\left(\frac{-3}{4} \times \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{-3}{4} \times \frac{-5}{6}\right) = \frac{-1}{2} + \frac{5}{8} = \frac{1}{8}$

Thus, $\frac{-3}{4} \times \left\{\frac{2}{3} + \frac{-5}{6}\right\} = \left(\frac{-3}{4} \times \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{-3}{4} \times \frac{-5}{6}\right)$

Distributivity of Multiplication over Addition and Subtraction.
For all rational numbers a, b and c,
$a\,(b + c) = ab + ac$
$a\,(b - c) = ab - ac$

TRY THESE

Find using distributivity. (i) $\left\{\frac{7}{5} \times \left(\frac{-3}{12}\right)\right\} + \left\{\frac{7}{5} \times \frac{5}{12}\right\}$ (ii) $\left\{\frac{9}{16} \times \frac{4}{12}\right\} + \left\{\frac{9}{16} \times \frac{-3}{9}\right\}$

Example 3: Write the additive inverse of the following:

(i) $\frac{-7}{19}$ (ii) $\frac{21}{112}$

When you use distributivity, you split a product as a sum or difference of two products.

Solution:

(i) $\frac{7}{19}$ is the additive inverse of $\frac{-7}{19}$ because $\frac{-7}{19} + \frac{7}{19} = \frac{-7+7}{19} = \frac{0}{19} = 0$

(ii) The additive inverse of $\frac{21}{112}$ is $\frac{-21}{112}$ (Check!)

Example 4: Verify that – (– x) is the same as x for

(i) $x = \frac{13}{17}$ (ii) $x = \frac{-21}{31}$

Solution: (i) We have, $x = \frac{13}{17}$

The additive inverse of $x = \frac{13}{17}$ is $-x = \frac{-13}{17}$ since $\frac{13}{17} + \left(\frac{-13}{17}\right) = 0$.

The same equality $\frac{13}{17} + \left(\frac{-13}{17}\right) = 0$, shows that the additive inverse of $\frac{-13}{17}$ is $\frac{13}{17}$

or $-\left(\frac{-13}{17}\right) = \frac{13}{17}$, i.e., – (– x) = x.

(ii) Additive inverse of $x = \frac{-21}{31}$ is $-x = \frac{21}{31}$ since $\frac{-21}{31} + \frac{21}{31} = 0$.

The same equality $\frac{-21}{31} + \frac{21}{31} = 0$, shows that the additive inverse of $\frac{21}{31}$ is $\frac{-21}{31}$, i.e., – (– x) = x.

మరియు $\frac{-3}{4}\times\frac{-5}{6} = \frac{5}{8}$

అందువలన $\left(\frac{-3}{4}\times\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{-3}{4}\times\frac{-5}{6}\right) = \frac{-1}{2}+\frac{5}{8}=\frac{1}{8}$

కావున, $\frac{-3}{4}\times\left\{\frac{2}{3}+\frac{-5}{6}\right\} = \left(\frac{-3}{4}\times\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{-3}{4}\times\frac{-5}{6}\right)$

సంకలనం మరియు వ్యవకలనం పై గుణకార విభాగన్యాయం

a, b మరియు c లు ఏవైనా అకరణీయ సంఖ్యలయినచో,

$a\,(b + c) = ab + ac$

$a\,(b - c) = ab - ac$

ప్రయత్నించండి

(i) $\left\{\frac{7}{5}\times\left(\frac{-3}{12}\right)\right\}+\left\{\frac{7}{5}\times\frac{5}{12}\right\}$ (ii) $\left\{\frac{9}{16}\times\frac{4}{12}\right\}+\left\{\frac{9}{16}\times\frac{-3}{9}\right\}$ విభాగ న్యాయాలను ఉపయోగించి విలువలు కనుగొనండి.

ఉదాహరణ 3: క్రింది వాటికి సంకలన విలోమాలను రాయండి:

(i) $\frac{-7}{19}$ (ii) $\frac{21}{112}$

విభాగన్యాయాలను ఉపయోగించినప్పుడు ఒక లబ్ధాన్ని రెండు లబ్ధాల మొత్తంగా గాని లేదా రెండు లబ్ధాల భేదంగా గాని రాయాలి.

సాధన :

(i) $\frac{-7}{19}$ యొక్క సంకలన విలోమం $\frac{7}{19}$ ఎందుకనగా $\frac{-7}{19}+\frac{7}{19}=\frac{-7+7}{19}=\frac{0}{19}=0$

(ii) $\frac{21}{112}$ యొక్క సంకలన విలోమం $\frac{-21}{112}$ (సరిచూడండి!)

ఉదాహరణ 4: (i) $x=\frac{13}{17}$ (ii) $x=\frac{-21}{31}$ లకు $-(-x)$ అనేది x కు సమానమేమో సరిచూడండి.

సాధన: (i) $x=\frac{13}{17}$

$x=\frac{13}{17}$ యొక్క సంకలన విలోమం $-x=\frac{-13}{17}$ ఎందుకనగా $\frac{13}{17}+\left(\frac{-13}{17}\right)=0$.

ఇదే సమానత్వం $\frac{13}{17}+\left(\frac{-13}{17}\right)=0$, అనునది $\frac{-13}{17}$ యొక్క సంకలన విలోమం $\frac{13}{17}$ అని తెలుపుతుంది.

లేదా $-\left(\frac{-13}{17}\right)=\frac{13}{17}$, అనగా $-(-x)=x$.

(ii) $x=\frac{-21}{31}$ యొక్క సంకలన విలోమం $-x=\frac{21}{31}$ ఎందుకనగా $\frac{-21}{31}+\frac{21}{31}=0$.

ఈ సమానత్వం $\frac{-21}{31}+\frac{21}{31}=0$ అనునది $\frac{21}{31}$ యొక్క సంకలన విలోమం $\frac{-21}{31}$ అని తెలుపుతుంది.

అనగా $-(-x)=x$.

Example 5: Find $\frac{2}{5}\times\frac{-3}{7}-\frac{1}{14}-\frac{3}{7}\times\frac{3}{5}$

Solution: $\frac{2}{5}\times\frac{-3}{7}-\frac{1}{14}-\frac{3}{7}\times\frac{3}{5} = \frac{2}{5}\times\frac{-3}{7}-\frac{3}{7}\times\frac{3}{5}-\frac{1}{14}$ (by commutativity)

$$= \frac{2}{5}\times\frac{-3}{7}+\left(\frac{-3}{7}\right)\times\frac{3}{5}-\frac{1}{14}$$

$$= \frac{-3}{7}\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\right)-\frac{1}{14} \quad \text{(by distributivity)}$$

$$= \frac{-3}{7}\times 1-\frac{1}{14} = \frac{-6-1}{14} = \frac{-1}{2}$$

EXERCISE 1.1

1. Using appropriate properties find.

(i) $-\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}+\frac{5}{2}-\frac{3}{5}\times\frac{1}{6}$ (ii) $\frac{2}{5}\times\left(-\frac{3}{7}\right)-\frac{1}{6}\times\frac{3}{2}+\frac{1}{14}\times\frac{2}{5}$

2. Write the additive inverse of each of the following.

(i) $\frac{2}{8}$ (ii) $\frac{-5}{9}$ (iii) $\frac{-6}{-5}$ (iv) $\frac{2}{-9}$ (v) $\frac{19}{-6}$

3. Verify that $-(-x) = x$ for.

(i) $x = \frac{11}{15}$ (ii) $x = -\frac{13}{17}$

4. Find the multiplicative inverse of the following.

(i) -13 (ii) $\frac{-13}{19}$ (iii) $\frac{1}{5}$ (iv) $\frac{-5}{8}\times\frac{-3}{7}$

(v) $-1\times\frac{-2}{5}$ (vi) -1

5. Name the property under multiplication used in each of the following.

(i) $\frac{-4}{5}\times 1 = 1\times\frac{-4}{5} = -\frac{4}{5}$ (ii) $-\frac{13}{17}\times\frac{-2}{7} = \frac{-2}{7}\times\frac{-13}{17}$

(iii) $\frac{-19}{29}\times\frac{29}{-19} = 1$

6. Multiply $\frac{6}{13}$ by the reciprocal of $\frac{-7}{16}$.

7. Tell what property allows you to compute $\frac{1}{3}\times\left(6\times\frac{4}{3}\right)$ as $\left(\frac{1}{3}\times 6\right)\times\frac{4}{3}$.

8. Is $\frac{8}{9}$ the multiplicative inverse of $-1\frac{1}{8}$? Why or why not?

9. Is 0.3 the multiplicative inverse of $3\frac{1}{3}$? Why or why not?

ఉదాహరణ 5: $\frac{2}{5}\times\frac{-3}{7}-\frac{1}{14}-\frac{3}{7}\times\frac{3}{5}$ ను కనుగొనండి.

సాధన: $\frac{2}{5}\times\frac{-3}{7}-\frac{1}{14}-\frac{3}{7}\times\frac{3}{5}=\frac{2}{5}\times\frac{-3}{7}-\frac{3}{7}\times\frac{3}{5}-\frac{1}{14}$ (స్థిత్యంతర న్యాయం నుండి)

$$=\frac{2}{5}\times\frac{-3}{7}+\left(\frac{-3}{7}\right)\times\frac{3}{5}-\frac{1}{14}$$

$$=\frac{-3}{7}\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\right)-\frac{1}{14}$$ (విభాగ న్యాయం నుండి)

$$=\frac{-3}{7}\times 1-\frac{1}{14}=\frac{-6-1}{14}=\frac{-1}{2}$$

అభ్యాసం 1.1

1. సరైన ధర్మాలను ఉపయోగించి కింది విలువలను కనుగొనండి.

   (i) $-\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}+\frac{5}{2}-\frac{3}{5}\times\frac{1}{6}$ (ii) $\frac{2}{5}\times\left(-\frac{3}{7}\right)-\frac{1}{6}\times\frac{3}{2}+\frac{1}{14}\times\frac{2}{5}$

2. క్రింది వాటికి సంకలన విలోమాలు రాయండి.

   (i) $\frac{2}{8}$ (ii) $\frac{-5}{9}$ (iii) $\frac{-6}{-5}$ (iv) $\frac{2}{-9}$ (v) $\frac{19}{-6}$

3. (i) $x=\frac{11}{15}$ (ii) $x=-\frac{13}{17}$ లకు $-(-x)=x$ ని సరి చూడండి.

4. క్రింది వాటి గుణకార విలోమాలను కనుగొనండి.

   (i) -13 (ii) $\frac{-13}{19}$ (iii) $\frac{1}{5}$ (iv) $\frac{-5}{8}\times\frac{-3}{7}$

   (v) $-1\times\frac{-2}{5}$ (vi) -1

5. గుణకారం దృష్ట్యా క్రింది వాటిలో ఏ ధర్మం ఉపయోగించబడింది.

   (i) $\frac{-4}{5}\times 1=1\times\frac{-4}{5}=-\frac{4}{5}$ (ii) $-\frac{13}{17}\times\frac{-2}{7}=\frac{-2}{7}\times\frac{-13}{17}$

   (iii) $\frac{-19}{29}\times\frac{29}{-19}=1$

6. $\frac{6}{13}$ ను $\frac{-7}{16}$ యొక్క వ్యుత్క్రమంతో గుణించండి.

7. $\frac{1}{3}\times\left(6\times\frac{4}{3}\right)$ ను $\left(\frac{1}{3}\times 6\right)\times\frac{4}{3}$ గా గణించుటకు ఏ న్యాయం ఉపయోగిస్తామో చెప్పండి.

8. $-1\frac{1}{8}$ యొక్క గుణకార విలోమం $\frac{8}{9}$ అవునా? కాదా? సమర్థించండి.

9. $3\frac{1}{3}$ యొక్క గుణకార విలోమం 0.3 అవునా? కాదా? సమర్థించండి.

10. Write.

(i) The rational number that does not have a reciprocal.

(ii) The rational numbers that are equal to their reciprocals.

(iii) The rational number that is equal to its negative.

11. Fill in the blanks.

(i) Zero has _________ reciprocal.

(ii) The numbers _________ and _________ are their own reciprocals

(iii) The reciprocal of – 5 is _________.

(iv) Reciprocal of $\frac{1}{x}$, where $x \neq 0$ is _________.

(v) The product of two rational numbers is always a _______.

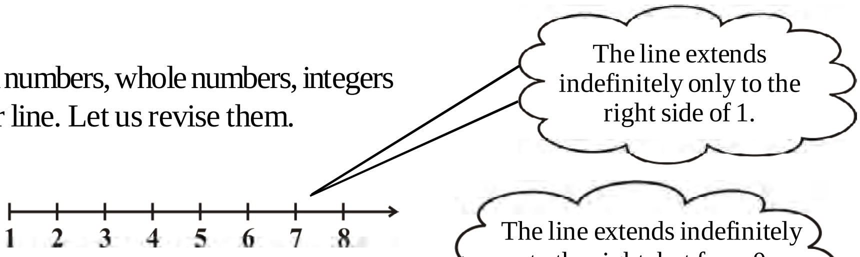
(vi) The reciprocal of a positive rational number is _________.

1.3 Representation of Rational Numbers on the Number Line

You have learnt to represent natural numbers, whole numbers, integers and rational numbers on a number line. Let us revise them.

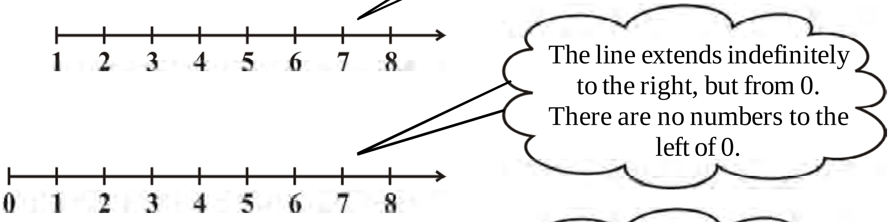
Natural numbers

(i)



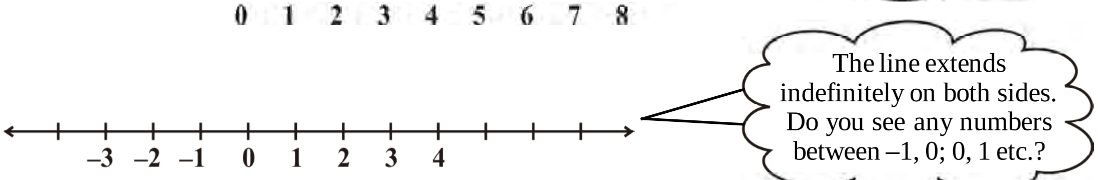
Whole numbers

(ii)



Integers

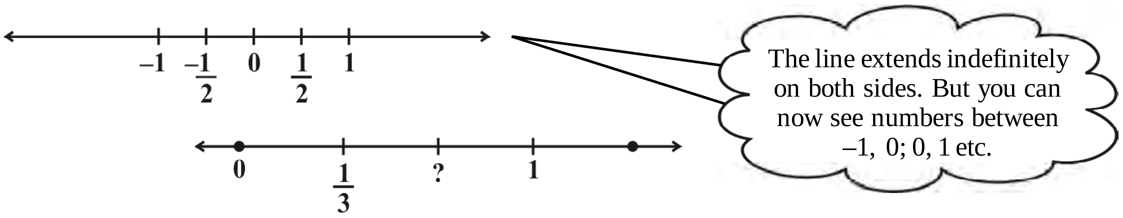
(iii)



Rational numbers

(iv)

(v)



The point on the number line (iv) which is half way between 0 and 1 has been labelled $\frac{1}{2}$. Also, the first of the equally spaced points that divides the distance between 0 and 1 into three equal parts can be labelled $\frac{1}{3}$, as on number line (v). How would you label the second of these division points on number line (v)?

10. క్రింది వాటికి ఉదాహరణలు రాయండి.

(i) వ్యుత్క్రమం లేని అకరణీయసంఖ్య

(ii) వాటికవే వ్యుత్క్రమంగా గల అకరణీయ సంఖ్యలు

(iii) తన ఋణాత్మకంతో సమానంగా గల అకరణీయ సంఖ్య

11. ఖాళీలను పూరించండి.

(i) సున్నాకు వ్యుత్క్రమం __________.

(ii) వాటికవే వ్యుత్క్రమం అయిన సంఖ్యలు __________ మరియు __________.

(iii) -5 యొక్క వ్యుత్క్రమం __________.

(iv) $\frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ యొక్క వ్యుత్క్రమం __________.

(v) రెండు అకరణీయ సంఖ్యల లబ్ధం ఎల్లప్పుడూ ________.

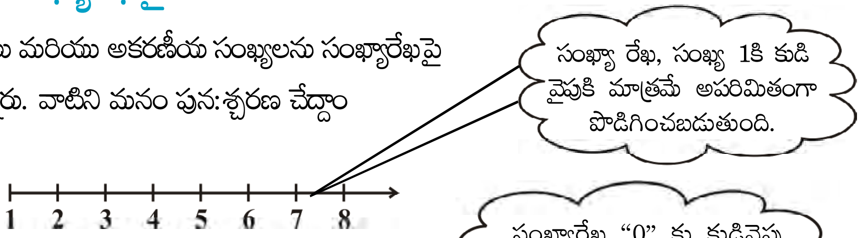
(vi) ధన అకరణీయ సంఖ్య యొక్క వ్యుత్క్రమం __________.

1.3 అకరణీయ సంఖ్యలను సంఖ్యారేఖపై సూచించడం

సహజసంఖ్యలు, పూర్ణాంకాలు, పూర్ణసంఖ్యలు మరియు అకరణీయ సంఖ్యలను సంఖ్యారేఖపై సూచించడాన్ని మీరు ఇది వరకే నేర్చుకున్నారు. వాటిని మనం పున:శ్చరణ చేద్దాం

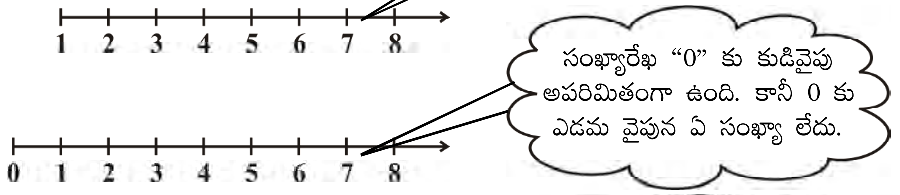
సహజ సంఖ్యలు

(i)



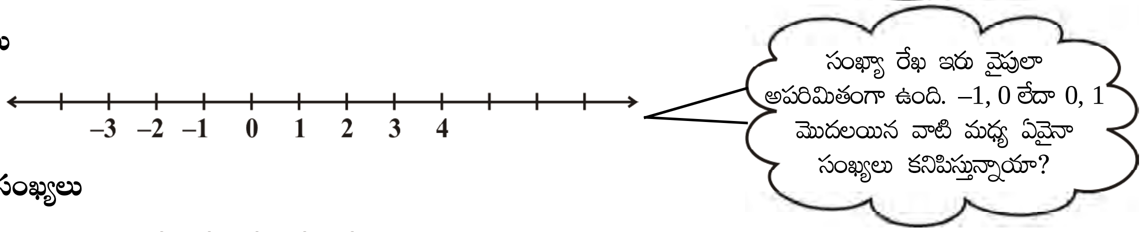
పూర్ణాంకాలు

(ii)



పూర్ణసంఖ్యలు

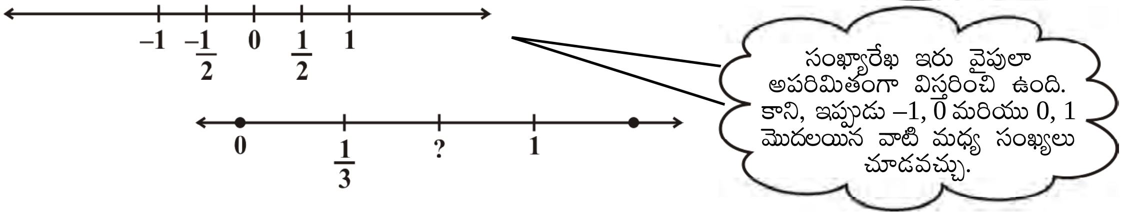
(iii)



అకరణీయ సంఖ్యలు

(iv)

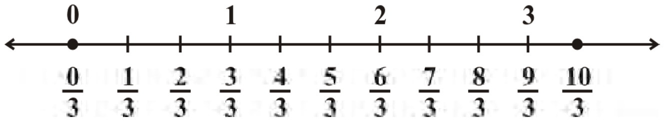
(v)

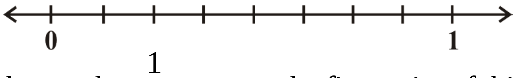


సంఖ్యారేఖ (iv) మీద 0 మరియు 1ల మధ్య సమాన దూరంలో గల బిందువును $\frac{1}{2}$ అని పేర్కొనడమైనది. అదేవిధంగా, సంఖ్యారేఖ (v) మీద 0 మరియు 1ల మధ్య రేఖా ఖండాన్ని మూడు సమాన భాగాలుగా విభజించు బిందువులను గుర్తించడమైనది. ఈ బిందువులలో మొదటి దానిని $\frac{1}{3}$ అని గుర్తించడమైనది. అలాగయితే, సంఖ్యారేఖ (v) పై ఈ విభజన బిందువులలో రెండవ బిందువును మీరు ఎలా గుర్తిస్తారు?

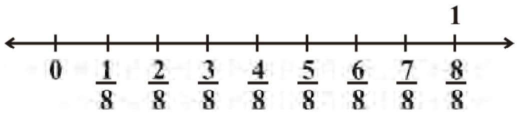
The point to be labelled is twice as far from and to the right of 0 as the point labelled $\frac{1}{3}$. So it is two times $\frac{1}{3}$, i.e., $\frac{2}{3}$. You can continue to label equally-spaced points on the number line in the same way. In this continuation, the next marking is 1. You can see that 1 is the same as $\frac{3}{3}$.

Then comes $\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{6}{3}$ (or 2), $\frac{7}{3}$ and so on as shown on the number line (vi)

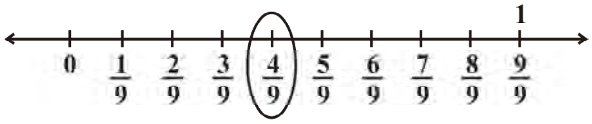
(vi) 

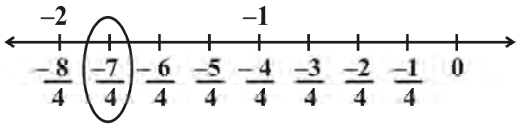
Similarly, to represent $\frac{1}{8}$, the number line may be divided into eight equal parts as shown: 

We use the number $\frac{1}{8}$ to name the first point of this division. The second point of division will be labelled $\frac{2}{8}$, the third point $\frac{3}{8}$, and so on as shown on number line (vii)

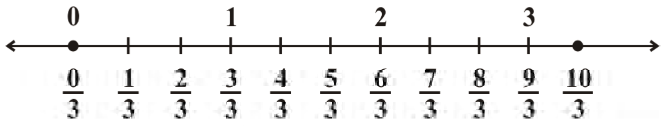
(vii) 

Any rational number can be represented on the number line in this way. In a rational number, the numeral below the bar, i.e., the denominator, tells the number of equal parts into which the first unit has been divided. The numeral above the bar i.e., the numerator, tells 'how many' of these parts are considered. So, a rational number such as $\frac{4}{9}$ means four of nine equal parts on the right of 0 (number line viii) and for $\frac{-7}{4}$, we make 7 markings of distance $\frac{1}{4}$ each on the *left* of zero and starting from 0. The seventh marking is $\frac{-7}{4}$ [number line (ix)].

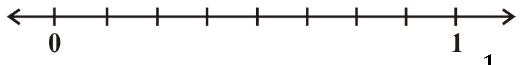
(viii) 

(ix) 

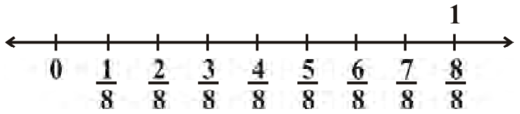
మీరు గుర్తించవలసిన బిందువు 0కు కుడివైపున $\frac{1}{3}$ కు గల దూరానికి రెట్టింపు దూరంలో ఉంది. అనగా ఇది $\frac{1}{3}$ కు రెండు రెట్లు అనగా $\frac{2}{3}$. ఇదే విధంగా కొనసాగిస్తూ సమాన దూరంలో గల బిందువులను సంఖ్యారేఖపై పేర్కొనవచ్చు. ఇదే విధంగా కొనసాగిస్తే తరువాత బిందువు 1 అగును. 1 అనగా $\frac{3}{3}$ అని గమనించాలి. తరువాత బిందువులు $\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{6}{3}$ (లేదా 2), $\frac{7}{3}$ మొదలగునవి సంఖ్యారేఖ (vi) పై చూడవచ్చు.

(vi)


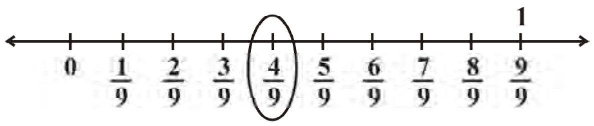
అదే విధంగా, సంఖ్య $\frac{1}{8}$ ని గుర్తించడానికి సంఖ్యారేఖను క్రింది చిత్రంలో చూపినట్లుగా ఎనిమిది సమాన భాగాలుగా విభజించాలి.

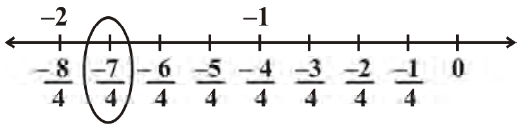


ఈ విధంగా విభజనలో మొదటి బిందువును $\frac{1}{8}$ అని, రెండవ బిందువును $\frac{2}{8}$ అని, మూడవ బిందువును $\frac{3}{8}$ అని మొదలగు వాటిని సంఖ్యారేఖ (vii) లో చూపినట్లుగా పేర్కొనాలి.

(vii)


ఈ పద్ధతిలో అకరణీయ సంఖ్యలన్నింటినీ సంఖ్యారేఖ మీద గుర్తించవచ్చు. అకరణీయ సంఖ్యలో బార్ క్రింద ఉన్న సంఖ్య అనగా హారం, మొదటి యూనిట్‌ను విభజించిన సమాన భాగాల సంఖ్యను తెలియజేస్తుంది. బార్ పైన గల సంఖ్య అనగా లవం, ఈ సమాన భాగాలలో 'ఎన్ని భాగాలను' తీసుకోవాలో తెలియజేస్తుంది. కనుక అకరణీయ సంఖ్య $\frac{4}{9}$ అనునది 0 కి కుడివైపు చేయబడిన తొమ్మిది సమాన భాగాలలో నాలుగు భాగాలు అవుతుంది (సంఖ్యారేఖ viii) మరియు $\frac{-7}{4}$ కోసం 0 నుండి ప్రారంభమై, 0 కు ఎడమ వైపు ప్రతిదీ $\frac{1}{4}$ దూరం ఉండునట్లు 7 సమాన భాగాలు గుర్తిస్తాం. ఏడవ భాగం $\frac{-7}{4}$ అగును. [సంఖ్యారేఖ (ix)].

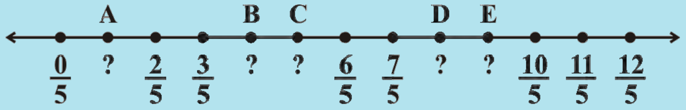
(viii)


(ix)


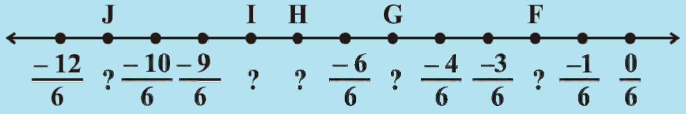
TRY THESE

Write the rational number for each point labelled with a letter.

(i)



(ii)



1.4 Rational Numbers between Two Rational Numbers

Can you tell the natural numbers between 1 and 5? They are 2, 3 and 4.
How many natural numbers are there between 7 and 9? There is one and it is 8.
How many natural numbers are there between 10 and 11? Obviously none.
List the integers that lie between –5 and 4. They are – 4, – 3, –2, –1, 0, 1, 2, 3.
How many integers are there between –1 and 1?
How many integers are there between –9 and –10?

You will find a definite number of natural numbers (integers) between two natural numbers (integers).

How many rational numbers are there between $\frac{3}{10}$ and $\frac{7}{10}$?

You may have thought that they are only $\frac{4}{10}$, $\frac{5}{10}$ and $\frac{6}{10}$.

But you can also write $\frac{3}{10}$ as $\frac{30}{100}$ and $\frac{7}{10}$ as $\frac{70}{100}$. Now the numbers, $\frac{31}{100}, \frac{32}{100}, \frac{33}{100}$, ... $\frac{68}{100}, \frac{69}{100}$, are all between $\frac{3}{10}$ and $\frac{7}{10}$. The number of these rational numbers is 39.

Also $\frac{3}{10}$ can be expressed as $\frac{3000}{10000}$ and $\frac{7}{10}$ as $\frac{7000}{10000}$. Now, we see that the rational numbers $\frac{3001}{10000}, \frac{3002}{10000}, ..., \frac{6998}{10000}, \frac{6999}{10000}$ are between $\frac{3}{10}$ and $\frac{7}{10}$. These are 3999 numbers in all.

In this way, we can go on inserting more and more rational numbers between $\frac{3}{10}$ and $\frac{7}{10}$. So unlike natural numbers and integers, the number of rational numbers between two rational numbers is not definite. Here is one more example.

How many rational numbers are there between $\frac{-1}{10}$ and $\frac{3}{10}$?

Obviously $\frac{0}{10}, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}$ are rational numbers between the given numbers.

ప్రయత్నించండి

ప్రతి బిందువుకు చూపబడిన అక్షరానికి అకరణీయ సంఖ్య రాయండి.

(i) సంఖ్యారేఖపై బిందువులు: $\frac{0}{5}$, ? (A), $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, ? (B), ? (C), $\frac{6}{5}$, $\frac{7}{5}$, ? (D), ? (E), $\frac{10}{5}$, $\frac{11}{5}$, $\frac{12}{5}$

(ii) సంఖ్యారేఖపై బిందువులు: $\frac{-12}{6}$, ? (J), $\frac{-10}{6}$, $\frac{-9}{6}$, ? (I), ? (H), $\frac{-6}{6}$, ? (G), $\frac{-4}{6}$, $\frac{-3}{6}$, ? (F), $\frac{-1}{6}$, $\frac{0}{6}$

1.4 రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మధ్య గల అకరణీయ సంఖ్యలు

1 మరియు 5ల మధ్య సహజ సంఖ్యలు చెప్పగలరా? అవి 2,3 మరియు 4.

7 మరియు 9ల మధ్యగల సహజ సంఖ్యలెన్ని? ఒకటే ఒకటి అది 8.

10 మరియు 11ల మధ్యగల సహజ సంఖ్యలెన్ని? ఏదీలేదు.

–5 మరియు 4ల మధ్య పూర్ణసంఖ్యలు రాయండి. అవి – 4, – 3, –2, –1, 0, 1, 2, 3.

–1 మరియు 1ల మధ్య ఎన్ని పూర్ణసంఖ్యలున్నాయి?

–9 మరియు –10ల మధ్య ఎన్ని పూర్ణసంఖ్యలున్నాయి?

ఏవైనా రెండు సహజ సంఖ్యల (పూర్ణసంఖ్యలు) మధ్య పరిమిత సంఖ్యలో సహజ సంఖ్యలు (పూర్ణ సంఖ్యలు) ఉంటాయని కనుగొంటారు.

$\frac{3}{10}$ మరియు $\frac{7}{10}$ ల మధ్య ఎన్ని అకరణీయ సంఖ్యలు ఉన్నాయి?

$\frac{4}{10}, \frac{5}{10}$ మరియు $\frac{6}{10}$ ఈ మూడు సంఖ్యలు మాత్రమే అని మీరు ఆలోచించడం సహజం. కాని $\frac{3}{10}$ ని $\frac{30}{100}$ అని మరియు $\frac{7}{10}$ ని $\frac{70}{100}$ అని కూడా రాయవచ్చు. ఇప్పుడు $\frac{31}{100}, \frac{32}{100}, \frac{33}{100}, \ldots \frac{68}{100}, \frac{69}{100}$ సంఖ్యలన్నియు $\frac{3}{10}$ మరియు $\frac{7}{10}$ ల మధ్య ఉన్నాయి. ఈ అకరణీయ సంఖ్యల సంఖ్య 39. అంతేకాకుండా $\frac{3}{10}$ ని $\frac{3000}{10000}$ మరియు $\frac{7}{10}$ ని $\frac{7000}{10000}$ అని కూడా రాయవచ్చు. $\frac{3001}{10000}, \frac{3002}{10000}, \ldots, \frac{6998}{10000}, \frac{6999}{10000}$ లు $\frac{3}{10}$ మరియు $\frac{7}{10}$ ల మధ్య ఉన్నాయి. ఇవి 3999 ఉంటాయి.

ఈ విధంగా, ఇంకా ఎక్కువ అకరణీయ సంఖ్యలను $\frac{3}{10}$ మరియు $\frac{7}{10}$ ల మధ్య రాయవచ్చు. అందువలన సహజ సంఖ్యలు మరియు పూర్ణసంఖ్యలలో ఉండునట్లు, రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మధ్య నిర్దిష్ట సంఖ్యలో అకరణీయ సంఖ్యలు లేవు. మరొక ఉదాహరణ చూద్దాం.

$\frac{-1}{10}$ మరియు $\frac{3}{10}$ ల మధ్య అకరణీయ సంఖ్యలు ఎన్ని?

ఖచ్చితంగా $\frac{0}{10}, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}$ లు ఇచ్చిన సంఖ్యల మధ్య గల అకరణీయ సంఖ్యలు.

If we write $\frac{-1}{10}$ as $\frac{-10000}{100000}$ and $\frac{3}{10}$ as $\frac{30000}{100000}$, we get the rational numbers $\frac{-9999}{100000}, \frac{-9998}{100000}, ..., \frac{-29998}{100000}, \frac{29999}{100000}$, between $\frac{-1}{10}$ and $\frac{3}{10}$.

You will find that *you get countless rational numbers between any two given rational numbers.*

Example 6: Write any 3 rational numbers between –2 and 0.

Solution: –2 can be written as $\frac{-20}{10}$ and 0 as $\frac{0}{10}$.

Thus we have $\frac{-19}{10}, \frac{-18}{10}, \frac{-17}{10}, \frac{-16}{10}, \frac{-15}{10}, ..., \frac{-1}{10}$ between –2 and 0.

You can take any three of these.

Example 7: Find any ten rational numbers between $\frac{-5}{6}$ and $\frac{5}{8}$.

Solution: We first convert $\frac{-5}{6}$ and $\frac{5}{8}$ to rational numbers with the same denominators.

$$\frac{-5\times 4}{6\times 4}=\frac{-20}{24} \quad \text{and} \quad \frac{5\times 3}{8\times 3}=\frac{15}{24}$$

Thus we have $\frac{-19}{24}, \frac{-18}{24}, \frac{-17}{24}, ..., \frac{14}{24}$ as the rational numbers between $\frac{-20}{24}$ and $\frac{15}{24}$.

You can take any ten of these.

Another Method

Let us find rational numbers between 1 and 2. One of them is 1.5 or $1\frac{1}{2}$ or $\frac{3}{2}$. This is the **mean** of 1 and 2. You have studied mean in Class VII.

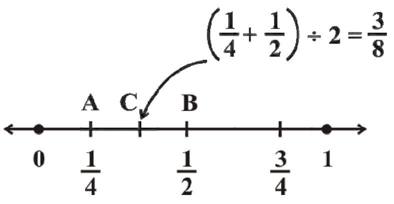
We find that *between any two given numbers, we need not necessarily get an integer but there will always lie a rational number.*

We can use the idea of mean also to find rational numbers between any two given rational numbers.

Example 8: Find a rational number between $\frac{1}{4}$ and $\frac{1}{2}$.

Solution: We find the mean of the given rational numbers.

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)\div 2 = \left(\frac{1+2}{4}\right)\div 2 = \frac{3}{4}\times\frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$



$\frac{3}{8}$ lies between $\frac{1}{4}$ and $\frac{1}{2}$.

This can be seen on the number line also.

$\frac{-1}{10}$ ని $\frac{-10000}{100000}$ అని మరియు $\frac{3}{10}$ ని $\frac{30000}{100000}$ అని రాసినచో, $\frac{-1}{10}$ మరియు $\frac{3}{10}$ ల మధ్య $\frac{-9999}{100000}, \frac{-9998}{100000}, ..., \frac{-29998}{100000}, \frac{29999}{100000}$ అకరణీయ సంఖ్యలు లభిస్తాయి.

అందువలన ఏవైనా రెండు *అకరణీయ సంఖ్యల మధ్య అపరిమితమైన అకరణీయ సంఖ్యలుంటాయని కనుగొనవచ్చు.*

ఉదాహరణ 6: –2 మరియు 0 ల మధ్య ఏదైనా 3 అకరణీయ సంఖ్యలను రాయండి.

సాధన: –2 ను $\frac{-20}{10}$ అని మరియు 0 ను $\frac{0}{10}$ అని కూడా రాయవచ్చు.

$\frac{-19}{10}, \frac{-18}{10}, \frac{-17}{10}, \frac{-16}{10}, \frac{-15}{10}, ..., \frac{-1}{10}$ లు –2 మరియు 0ల మధ్య ఉన్నాయి.

వీటిలో ఏవైనా మూడింటిని తీసుకోవచ్చు.

ఉదాహరణ 7: $\frac{-5}{6}$ మరియు $\frac{5}{8}$ ల మధ్య ఏవైనా పది అకరణీయ సంఖ్యలు కనుగొనండి.

సాధన: మొదట $\frac{-5}{6}$ మరియు $\frac{5}{8}$ లను సమాన హారాలు గల అకరణీయ సంఖ్యలుగా మార్చుదాం.

$$\frac{-5 \times 4}{6 \times 4} = \frac{-20}{24} \quad \text{మరియు} \quad \frac{5 \times 3}{8 \times 3} = \frac{15}{24}$$

ఆవిధంగా, $\frac{-20}{24}$ మరియు $\frac{15}{24}$ ల మధ్య అకరణీయ సంఖ్యలు $\frac{-19}{24}, \frac{-18}{24}, \frac{-17}{24}, ..., \frac{14}{24}$ ఉన్నాయి.

వీటిలో ఏవైనా పదింటిని ఎన్నుకోవచ్చు.

మరొక పద్ధతి

1 మరియు 2ల మధ్య గల అకరణీయ సంఖ్యలను కనుగొందాం. వాటిలో ఒకటి 1.5 లేదా $1\frac{1}{2}$ లేదా $\frac{3}{2}$. ఇది 1 మరియు 2ల **సరాసరి**. మీరు VII వ తరగతిలో సరాసరి గురించి నేర్చుకున్నారు.

ఏవైనా రెండు సంఖ్యల మధ్య ఒక పూర్ణసంఖ్య ఉండనవసరంలేదు కాని వాటి మధ్య ఎల్లప్పుడూ ఒక అకరణీయ సంఖ్య ఉంటుంది.

మనం ఏవైనా రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మధ్య అకరణీయ సంఖ్యలను కనుగొనడానికి సరాసరి పద్ధతిని కూడా ఉపయోగించవచ్చు.

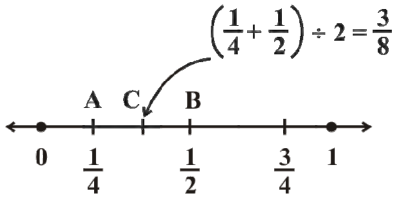
ఉదాహరణ 8: $\frac{1}{4}$ మరియు $\frac{1}{2}$ ల మధ్య ఒక అకరణీయ సంఖ్యను కనుగొనండి.

సాధన: ఇచ్చిన అకరణీయ సంఖ్యల సరాసరిని కనుగొంటాం.

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right) \div 2 = \left(\frac{1+2}{4}\right) \div 2 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

$\frac{1}{4}$ మరియు $\frac{1}{2}$ ల మధ్య $\frac{3}{8}$ ఉంది.

దీనిని సంఖ్యారేఖపై కూడా చూపవచ్చు.



We find the mid point of AB which is C, represented by $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right) \div 2 = \frac{3}{8}$.

We find that $\frac{1}{4} < \frac{3}{8} < \frac{1}{2}$.

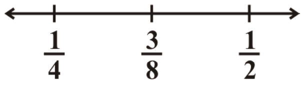
If a and b are two rational numbers, then $\frac{a+b}{2}$ is a rational number between a and b such that $a < \frac{a+b}{2} < b$.

This again shows that there are countless number of rational numbers between any two given rational numbers.

Example 9: Find three rational numbers between $\frac{1}{4}$ and $\frac{1}{2}$.

Solution: We find the mean of the given rational numbers.

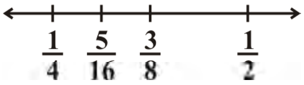
As given in the above example, the mean is $\frac{3}{8}$ and $\frac{1}{4} < \frac{3}{8} < \frac{1}{2}$.



We now find another rational number between $\frac{1}{4}$ and $\frac{3}{8}$. For this, we again find the mean of $\frac{1}{4}$ and $\frac{3}{8}$. That is,

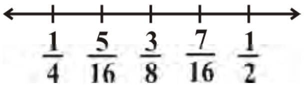
$$\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\right) \div 2 = \frac{5}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{16}$$

$$\frac{1}{4} < \frac{5}{16} < \frac{3}{8} < \frac{1}{2}$$



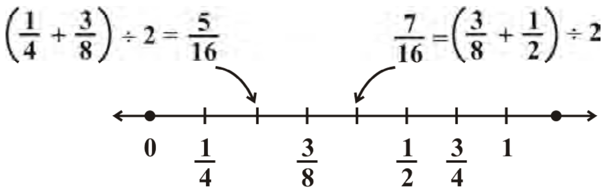
Now find the mean of $\frac{3}{8}$ and $\frac{1}{2}$. We have, $\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\right) \div 2 = \frac{7}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{16}$

Thus we get $\frac{1}{4} < \frac{5}{16} < \frac{3}{8} < \frac{7}{16} < \frac{1}{2}$.



Thus, $\frac{5}{16}, \frac{3}{8}, \frac{7}{16}$ are the three rational numbers between $\frac{1}{4}$ and $\frac{1}{2}$.

This can clearly be shown on the number line as follows:



In the same way we can obtain as many rational numbers as we want between two given rational numbers. You have noticed that there are countless rational numbers between any two given rational numbers.

మనం AB యొక్క మధ్య బిందువు C ని కనుగొంటాం. అది $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)\div 2 = \frac{3}{8}$ సంఖ్యను చూపుతుంది.

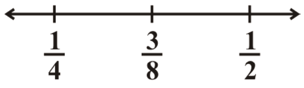
$\frac{1}{4} < \frac{3}{8} < \frac{1}{2}$ అగునని మనం కనుగొంటాం.

a మరియు *b* లు రెండు అకరణీయ సంఖ్యలయితే $a < \frac{a+b}{2} < b$ అగునట్లు $\frac{a+b}{2}$ అనునది *a* మరియు *b* ల మధ్య ఒక అకరణీయసంఖ్య అగును.

ఇది మరలా ఏవైనా రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మధ్య అపరిమితమైన అకరణీయ సంఖ్యలుంటాయని చూపుతుంది.

ఉదాహరణ 9: $\frac{1}{4}$ మరియు $\frac{1}{2}$ ల మధ్య మూడు అకరణీయ సంఖ్యలు కనుగొనండి.

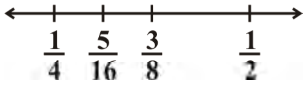
సాధన: ఇచ్చిన అకరణీయ సంఖ్యల సరాసరిని కనుగొంటాం.



పై ఉదాహరణ వలన, ఈ సరాసరి $\frac{3}{8}$ మరియు $\frac{1}{4} < \frac{3}{8} < \frac{1}{2}$.

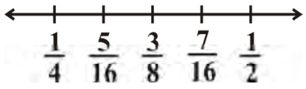
ఇప్పుడు $\frac{1}{4}$ మరియు $\frac{3}{8}$ ల మధ్య మరొక అకరణీయ సంఖ్యను కనుగొందాం. దీని కొరకు, మనం వాటి సరాసరి కనుగొంటాం. అనగా $\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\right)\div 2 = \frac{5}{8}\times\frac{1}{2} = \frac{5}{16}$

$$\frac{1}{4} < \frac{5}{16} < \frac{3}{8} < \frac{1}{2}$$



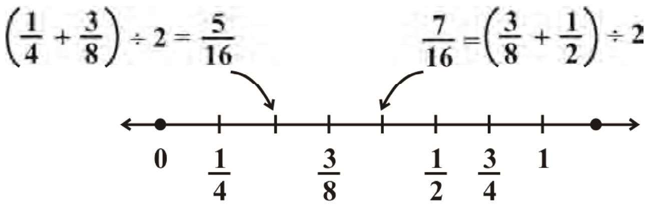
ఇప్పుడు $\frac{3}{8}$ మరియు $\frac{1}{2}$ ల సరాసరి కనుగొంటాం. $\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\right)\div 2 = \frac{7}{8}\times\frac{1}{2} = \frac{7}{16}$

కావున $\frac{1}{4} < \frac{5}{16} < \frac{3}{8} < \frac{7}{16} < \frac{1}{2}$.



అందువలన, $\frac{1}{4}$ మరియు $\frac{1}{2}$ ల మధ్య మూడు అకరణీయ సంఖ్యలు $\frac{5}{16}, \frac{3}{8}, \frac{7}{16}$ అగును.

స్పష్టంగా వీటిని సంఖ్యారేఖ పై క్రింది విధంగా గుర్తించవచ్చు:



ఇదేవిధంగా ఇచ్చిన ఏవైనా రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మధ్య మనకు కావాలిసినన్ని అకరణీయ సంఖ్యలను పొందవచ్చు. ఏవైనా రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మధ్య అపరిమితమైన అకరణీయ సంఖ్యలుంటాయని మీరు గమనించారు.

EXERCISE 1.2

1. Represent these numbers on the number line. (i) $\frac{7}{4}$ (ii) $\frac{-5}{6}$
2. Represent $\frac{-2}{11}, \frac{-5}{11}, \frac{-9}{11}$ on the number line.
3. Write five rational numbers which are smaller than 2.
4. Find ten rational numbers between $\frac{-2}{5}$ and $\frac{1}{2}$.
5. Find five rational numbers between.

   (i) $\frac{2}{3}$ and $\frac{4}{5}$ (ii) $\frac{-3}{2}$ and $\frac{5}{3}$ (iii) $\frac{1}{4}$ and $\frac{1}{2}$
6. Write five rational numbers greater than –2.
7. Find ten rational numbers between $\frac{3}{5}$ and $\frac{3}{4}$.

WHAT HAVE WE DISCUSSED?

1. Rational numbers are **closed** under the operations of addition, subtraction and multiplication.
2. The operations addition and multiplication are
   (i) **commutative** for rational numbers.
   (ii) **associative** for rational numbers.
3. The rational number 0 is the **additive identity** for rational numbers.
4. The rational number 1 is the **multiplicative identity** for rational numbers.
5. The **additive inverse** of the rational number $\frac{a}{b}$ is $-\frac{a}{b}$ and vice-versa.
6. The **reciprocal** or **multiplicative inverse** of the rational number $\frac{a}{b}$ is $\frac{c}{d}$ if $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = 1$.
7. **Distributivity** of rational numbers: For all rational numbers a, b and c,
   $a(b + c) = ab + ac$ and $a(b - c) = ab - ac$
8. Rational numbers can be represented on a number line.
9. Between any two given rational numbers there are countless rational numbers. The idea of **mean** helps us to find rational numbers between two rational numbers.

అభ్యాసం 1.2

1. (i) $\frac{7}{4}$ (ii) $\frac{-5}{6}$ సంఖ్యలను సంఖ్యారేఖపై గుర్తించండి.
2. $\frac{-2}{11}, \frac{-5}{11}, \frac{-9}{11}$ లను సంఖ్యారేఖపై గుర్తించండి.
3. 2 కంటే చిన్నవైన ఐదు అకరణీయ సంఖ్యలను రాయండి.
4. $\frac{-2}{5}$ మరియు $\frac{1}{2}$ ల మధ్యగల పది అకరణీయ సంఖ్యలు రాయండి.
5. (i) $\frac{2}{3}$ మరియు $\frac{4}{5}$ (ii) $\frac{-3}{2}$ మరియు $\frac{5}{3}$ (iii) $\frac{1}{4}$ మరియు $\frac{1}{2}$ ల మధ్య ఐదు అకరణీయ సంఖ్యలను కనుగొనండి.
6. –2 కంటే పెద్దవైన ఐదు అకరణీయ సంఖ్యలు రాయండి.
7. $\frac{3}{5}$ మరియు $\frac{3}{4}$ ల మధ్య గల పది అకరణీయ సంఖ్యలు కనుగొనండి.

మనం ఏమి చర్చించుకున్నాం?

1. అకరణీయ సంఖ్యలు సంకలనం, వ్యవకలనం మరియు గుణకార పరిక్రియలలో **సంవృత ధర్మం** పాటిస్తాయి.
2. సంకలనం మరియు గుణకార పరిక్రియలు
   (i) అకరణీయ సంఖ్యలలో **స్థిత్యంతరం**.
   (ii) అకరణీయ సంఖ్యలలో **సహచరం**.
3. అకరణీయసంఖ్య '0' అనేది అకరణీయ సంఖ్యల **సంకలన తత్సమం**.
4. అకరణీయసంఖ్య '1' అనేది అకరణీయ సంఖ్యల **గుణకార తత్సమం**.
5. అకరణీయ సంఖ్య $\frac{a}{b}$ యొక్క **సంకలన విలోమం** $-\frac{a}{b}$. అదే విధంగా $-\frac{a}{b}$ కు **సంకలన విలోమం** $\frac{a}{b}$.
6. $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = 1$ అయితే $\frac{a}{b}$ యొక్క **వ్యుత్క్రమం** లేదా **గుణకార విలోమం** $\frac{c}{d}$ అగును.
7. **అకరణీయ సంఖ్యల విభాగన్యాయం** a, b మరియు c లు ఏవైనా అకరణీయ సంఖ్యలయిన
   $a(b + c) = ab + ac$ మరియు $a(b - c) = ab - ac$
8. అకరణీయ సంఖ్యలను సంఖ్యారేఖపై గుర్తించవచ్చు.
9. ఏవైనా రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మధ్య అపరమితమైన అకరణీయ సంఖ్యలుంటాయి. **సరాసరి** అనే భావన రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మధ్యగల అకరణీయ సంఖ్యలను కనుగొనడానికి సహాయపడుతుంది.

Linear Equations in One Variable

CHAPTER 2

0852CH02

2.1 Introduction

In the earlier classes, you have come across several **algebraic expressions** and **equations**. Some examples of expressions we have so far worked with are:

$$5x,\ 2x - 3,\ 3x + y,\ 2xy + 5,\ xyz + x + y + z,\ x^2 + 1,\ y + y^2$$

Some examples of equations are: $5x = 25$, $2x - 3 = 9$, $2y + \frac{5}{2} = \frac{37}{2}$, $6z + 10 = -2$

You would remember that equations use the *equality* (=) sign; it is missing in expressions.

Of these given expressions, many have more than one variable. For example, $2xy + 5$ has two variables. We however, restrict to expressions with only one variable when we form equations. Moreover, the expressions we use to form equations are linear. This means that the highest power of the variable appearing in the expression is 1.

These are linear expressions:

$$2x,\ 2x + 1,\ 3y - 7,\ 12 - 5z,\ \frac{5}{4}(x - 4) + 10$$

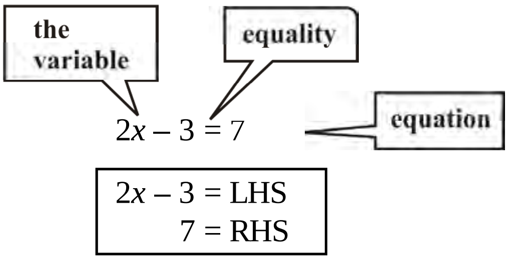
These are **not** linear expressions:

$x^2 + 1$, $y + y^2$, $1 + z + z^2 + z^3$ (since highest power of variable > 1)

Here we will deal with equations with linear expressions in one variable only. Such equations are known as **linear equations in one variable**. The simple equations which you studied in the earlier classes were all of this type.

Let us briefly revise what we know:

(a) *An algebraic equation is an equality involving variables*. It has an *equality sign*. The expression on the left of the equality sign is the *Left Hand Side* (LHS). The expression on the right of the equality sign is the *Right Hand Side* (RHS).



ఏక చరరాశిలో రేఖీయ సమీకరణాలు

అధ్యాయం 2

D3K9K1

2.1 పరిచయం

బీజీయ సమాసాలు మరియు **సమీకరణాల** గురించి కింది తరగతులలో మనం తెలుసుకున్నాం.

ఇప్పటి వరకు మనకు తెలిసిన సమాసాలకు కొన్ని ఉదాహరణలు:

$$5x,\ 2x - 3,\ 3x + y,\ 2xy + 5,\ xyz + x + y + z,\ x^2 + 1,\ y + y^2$$

సమీకరణాలకు కొన్ని ఉదాహరణలు: $5x = 25$, $2x - 3 = 9$, $2y + \frac{5}{2} = \frac{37}{2}$, $6z + 10 = -2$

సమాసాలలో లేని 'సమానత్వపు గుర్తు (=) ను సమీకరణాలలో ఉపయోగిస్తాం అనే విషయాన్ని మనం గుర్తుకు తెచ్చుకోవాలి.

పైన ఇవ్వబడిన సమాసాలలో చాలావాటిలో ఒకటి కంటే ఎక్కువ చరరాశులున్నాయి. ఉదాహరణకు $2xy + 5$ లో రెండు చరరాశులున్నాయి. అయితే మనం సమీకరణాలను రూపొందించడానికి సమాసాలలో ఒకే చరరాశికి పరిమితం అవుతాం. అంతేకాక, మనం ఉపయోగించే సమాసాలు రేఖీయం. అనగా సమాసంలోని చరరాశి యొక్క గరిష్ఠ ఘాతాంకం 1.

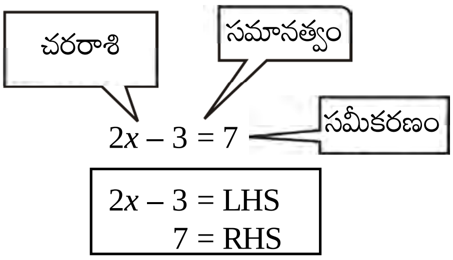
$$2x,\ 2x + 1,\ 3y - 7,\ 12 - 5z,\ \frac{5}{4}(x - 4) + 10 \text{ లు రేఖీయ సమాసాలు}$$

$x^2 + 1$, $y + y^2$, $1 + z + z^2 + z^3$ (చరరాశి యొక్క గరిష్ఠ ఘాతాంకం > 1) లు రేఖీయ సమాసాలు **కావు**.

ప్రస్తుతం మనం ఒకే చరరాశి గల రేఖీయ సమీకరణాలను గూర్చి చర్చిద్దాం. అటువంటి సమీకరణాలను **ఏక చరరాశిలో రేఖీయ సమీకరణాలు** అంటారు. గత తరగతులలో మనం నేర్చుకున్న సామాన్య సమీకరణాలన్నీ ఇలాంటివే.

మనం నేర్చుకున్న విషయాలను సంక్షిప్తంగా గుర్తుచేసుకుందాం:

(a) *చరరాశులతో కూడిన సమానత్వాన్ని బీజీయ సమీకరణం అంటారు.* ఇది సమానత్వపు గుర్తును కలిగి ఉంటుంది. సమానత్వపు గుర్తుకు ఎడమవైపున ఉన్న సమాసాన్ని ఎడమ చేతివైపు (LHS) అని, కుడివైపున ఉన్న సమాసాన్ని కుడిచేతివైపు (RHS) అని అంటారు.



(b) In an equation the *values of the expressions on the LHS and RHS are equal*. This happens to be *true* only for certain values of the variable. These values are the **solutions** of the equation.

> $x = 5$ is the solution of the equation $2x - 3 = 7$. For $x = 5$,
> LHS $= 2 \times 5 - 3 = 7 =$ RHS
> On the other hand $x = 10$ is not a solution of the equation. For $x = 10$, LHS $= 2 \times 10 - 3 = 17$. This is not equal to the RHS

(c) *How to find the solution of an equation?*

We assume that the two sides of the equation are balanced. We perform the same mathematical operations on both sides of the equation, so that the balance is not disturbed. A few such steps give the solution.

2.2 Solving Equations which have Linear Expressions on one Side and Numbers on the other Side

Let us recall the technique of solving equations with some examples. Observe the solutions; they can be any rational number.

Example 1: Find the solution of $2x - 3 = 7$

Solution:

Step 1 Add 3 to both sides.

$$2x - 3 + 3 = 7 + 3 \qquad \text{(The balance is not disturbed)}$$

or $$2x = 10$$

Step 2 Next divide both sides by 2.

$$\frac{2x}{2} = \frac{10}{2}$$

or $$x = 5 \qquad \text{(required solution)}$$

Example 2: Solve $2y + 9 = 4$

Solution: Transposing 9 to RHS

$$2y = 4 - 9$$

or $$2y = -5$$

Dividing both sides by 2, $$y = \frac{-5}{2} \qquad \text{(solution)}$$

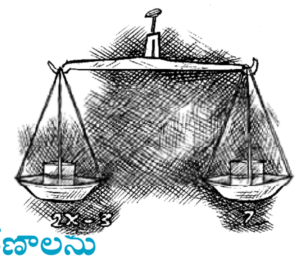
To check the answer: LHS $= 2\left(\frac{-5}{2}\right) + 9 = -5 + 9 = 4 =$ RHS (as required)

Do you notice that the solution $\left(\frac{-5}{2}\right)$ is a rational number? In Class VII, the equations we solved did not have such solutions.

(b) ఒక సమీకరణంలో *LHS, RHS* లలో ఉన్న సమాసాల విలువలు సమానం. చరరాశి యొక్క కొన్ని ఖచ్చితమైన విలువలకి మాత్రమే ఇది సాధ్యం. ఆ విలువలను సమీకరణానికి **సాధనలు** అంటారు.

> $x = 5$ అనేది $2x - 3 = 7$ సమీకరణమునకు సాధన.
> $x = 5$ వద్ద
> LHS $= 2 \times 5 - 3 = 7 =$ RHS
> మరొక విధంగా $x = 10$ అనేది సమీకరణం యొక్క సాధన కాదు. $x = 10$ వద్ద LHS $= 2 \times 10 - 3 = 17$.
> ఇది RHS కు సమానం కాదు.

(c) *ఒక సమీకరణానికి సాధన ఎలా కనుక్కుంటాం?*
సమీకరణానికి ఇరువైపులా సమానం అని అనుకుందాం. ఒక సమీకరణానికి ఇరువైపులా ఒకే రకమైన గణిత పరిక్రియలను చేస్తే ఆ సమీకరణం యొక్క సమానత్వం మారదు. ఇటువంటి కొన్ని సోపానాల ద్వారా సాధన కనుక్కుంటాం.



2.2 ఒక వైపున రేఖీయ సమాసం, మరోవైపున సంఖ్యలు గల సమీకరణాలను సాధించడం

సమీకరణాలను ఎలా సాధించాలో కొన్ని ఉదాహరణల ద్వారా గుర్తుకు తెచ్చుకుందాం. వాటి సాధనలు గమనించండి. అవి ఏవైన అకరణీయ సంఖ్యలు కావచ్చు.

ఉదాహరణ 1: $2x - 3 = 7$ యొక్క సాధనను కనుక్కోండి.

సాధన:

సోపానం 1 ఇరు వైపులా 3ను కూడగా

$$2x - 3 + 3 = 7 + 3 \quad \text{(సమానత్వం మారదు)}$$

లేదా $$2x = 10$$

సోపానం 2 ఇరు వైపులా 2 చే భాగించగా

$$\frac{2x}{2} = \frac{10}{2}$$

లేదా $$x = 5 \quad \text{(కావలసిన సాధన)}$$

ఉదాహరణ 2: $2y + 9 = 4$ ను సాధించుము.

సాధన: 9ని RHS కు పక్షాంతరం చేయగా

$$2y = 4 - 9$$

లేదా $$2y = -5$$

2చే ఇరు వైపులా భాగించగా, $$y = \frac{-5}{2} \quad \text{(సాధన)}$$

సమాధానాన్ని సరిచూచుట: LHS $= 2\left(\frac{-5}{2}\right) + 9 = -5 + 9 = 4 =$ RHS (కావలసినది)

సాధన $\left(\frac{-5}{2}\right)$ ఒక అకరణీయ సంఖ్య అని గమనించారా? 7వ తరగతిలో, మనం సాధించిన సమీకరణాలలో ఇటువంటి సాధనలు లేవు.

Example 3: Solve $\frac{x}{3}+\frac{5}{2} = -\frac{3}{2}$

Solution: Transposing $\frac{5}{2}$ to the RHS, we get $\frac{x}{3} = \frac{-3}{2}-\frac{5}{2}=-\frac{8}{2}$

or $\frac{x}{3} = -4$

Multiply both sides by 3, $x = -4 \times 3$

or $x = -12$ (solution)

Check: LHS $= -\frac{12}{3}+\frac{5}{2} = -4+\frac{5}{2} = \frac{-8+5}{2} = \frac{-3}{2} =$ RHS (as required)

Do you now see that the coefficient of a variable in an equation need not be an integer?

Example 4: Solve $\frac{15}{4} - 7x = 9$

Solution: We have $\frac{15}{4} - 7x = 9$

or $-7x = 9 - \frac{15}{4}$ (transposing $\frac{15}{4}$ to R H S)

or $-7x = \frac{21}{4}$

or $x = \frac{21}{4\times(-7)}$ (dividing both sides by – 7)

or $x = -\frac{3\times 7}{4\times 7}$

or $x = -\frac{3}{4}$ (solution)

Check: LHS $= \frac{15}{4}-7\left(\frac{-3}{4}\right) = \frac{15}{4}+\frac{21}{4} = \frac{36}{4} = 9 =$ RHS (as required)

EXERCISE 2.1

Solve the following equations.

1. $x - 2 = 7$ **2.** $y + 3 = 10$ **3.** $6 = z + 2$

4. $\frac{3}{7}+x=\frac{17}{7}$ **5.** $6x = 12$ **6.** $\frac{t}{5}=10$

7. $\frac{2x}{3}=18$ **8.** $1.6 = \frac{y}{1.5}$ **9.** $7x - 9 = 16$

ఉదాహరణ 3: $\frac{x}{3}+\frac{5}{2} = -\frac{3}{2}$ ను సాధించండి.

సాధన: $\frac{5}{2}$ ను RHS కు పక్షాంతరం చేయగా, $\frac{x}{3} = \frac{-3}{2}-\frac{5}{2}=-\frac{8}{2}$

లేదా $\frac{x}{3} = -4$

3చే ఇరు వైపులా గుణించగా, $x = -4 \times 3$

లేదా $x = -12$ (సాధన)

సరిచూచుట: LHS $= -\frac{12}{3}+\frac{5}{2} = -4+\frac{5}{2} = \frac{-8+5}{2} = \frac{-3}{2} =$ RHS (కావలసినది)

ఒక సమీకరణంలో చరరాశి యొక్క గుణకం పూర్ణసంఖ్య కానవసరం లేదని నీవు గమనించావా?

ఉదాహరణ 4: $\frac{15}{4} - 7x = 9$ ను సాధించుము.

సాధన: $\frac{15}{4} - 7x = 9$

లేదా $-7x = 9 - \frac{15}{4}$ ($\frac{15}{4}$ ను R H Sకు పక్షాంతరం చేయగా)

లేదా $-7x = \frac{21}{4}$

లేదా $x = \frac{21}{4\times(-7)}$ (ఇరు వైపులా – 7చే భాగించగా)

లేదా $x = -\frac{3\times 7}{4\times 7}$

లేదా $x = -\frac{3}{4}$ (సాధన)

సరిచూచుట: LHS $= \frac{15}{4} - 7\left(\frac{-3}{4}\right) = \frac{15}{4}+\frac{21}{4} = \frac{36}{4} = 9 =$ RHS (కావలసినది)

అభ్యాసం 2.1

క్రింది సమీకరణాలను సాధించండి.

1. $x - 2 = 7$ **2.** $y + 3 = 10$ **3.** $6 = z + 2$

4. $\frac{3}{7}+x=\frac{17}{7}$ **5.** $6x = 12$ **6.** $\frac{t}{5}=10$

7. $\frac{2x}{3}=18$ **8.** $1.6 = \frac{y}{1.5}$ **9.** $7x - 9 = 16$

10. $14y - 8 = 13$ **11.** $17 + 6p = 9$ **12.** $\frac{x}{3} + 1 = \frac{7}{15}$

2.3 Some Applications

We begin with a simple example.

Sum of two numbers is 74. One of the numbers is 10 more than the other. What are the numbers?

We have a puzzle here. We do not know either of the two numbers, and we have to find them. We are given two conditions.

(i) One of the numbers is 10 more than the other.

(ii) Their sum is 74.

We already know from Class VII how to proceed. If the smaller number is taken to be x, the larger number is 10 more than x, i.e., $x + 10$. The other condition says that the sum of these two numbers x and $x + 10$ is 74.

This means that $x + (x + 10) = 74$.

or $2x + 10 = 74$

Transposing 10 to RHS, $2x = 74 - 10$

or $2x = 64$

Dividing both sides by 2, $x = 32$. This is one number.

The other number is $x + 10 = 32 + 10 = 42$

The desired numbers are 32 and 42. (Their sum is indeed 74 as given and also one number is 10 more than the other.)

We shall now consider several examples to show how useful this method is.

Example 5: What should be added to twice the rational number $\frac{-7}{3}$ to get $\frac{3}{7}$?

Solution: Twice the rational number $\frac{-7}{3}$ is $2 \times \left(\frac{-7}{3}\right) = \frac{-14}{3}$. Suppose x added to this number gives $\frac{3}{7}$; i.e.,

$$x + \left(\frac{-14}{3}\right) = \frac{3}{7}$$

or $$x - \frac{14}{3} = \frac{3}{7}$$

or $$x = \frac{3}{7} + \frac{14}{3} \qquad \left(\text{transposing } \frac{14}{3} \text{ to RHS}\right)$$

$$= \frac{(3 \times 3) + (14 \times 7)}{21} = \frac{9 + 98}{21} = \frac{107}{21}.$$

10. $14y - 8 = 13$ **11.** $17 + 6p = 9$ **12.** $\frac{x}{3} + 1 = \frac{7}{15}$

2.3. కొన్ని అనువర్తనాలు

ఒక చిన్న ఉదాహరణతో మొదలు పెడదాం.

రెండు సంఖ్యల మొత్తం 74. వీటిలో ఒక సంఖ్య మరో సంఖ్యకన్నా 10 ఎక్కువ. ఆ రెండు సంఖ్యలు ఏవి?

ఇక్కడ ఒక చిక్కు ప్రశ్న ఇవ్వబడినది. ఈ సమస్యలోని రెండు సంఖ్యలూ మనకు తెలియదు. వాటిని కనుక్కోవడానికి మనకు రెండు షరతులు ఇవ్వబడ్డాయి.

(i) ఒక సంఖ్య మరో సంఖ్య కన్నా 10 ఎక్కువ.

(ii) వాటి మొత్తం 74.

దీనిని ఎలా సాధించాలో మనం 7వ తరగతిలో తెలుసుకొని ఉన్నాం. చిన్న సంఖ్యను x అనుకుంటే. పెద్ద సంఖ్య x కంటే 10 ఎక్కువ అనగా $x + 10$. మరో షరతు ప్రకారం ఆ రెండు సంఖ్యల మొత్తం $x + x + 10$, 74 కు సమానం.

అనగా $x + (x + 10) = 74$.

లేదా $2x + 10 = 74$

10ని RHS కు పక్షాంతరం చేయగా, $2x = 74 - 10$

లేదా $2x = 64$

ఇరు వైపులా 2చే భాగించగా, $x = 32$. రెండింటిలో ఇది ఒక సంఖ్య

$x + 10 = 32 + 10 = 42$ ఇది మరోసంఖ్య.

కావలసిన సంఖ్యలు 32 మరియు 42 (వాటి మొత్తం సమస్యలో ఇచ్చిన ప్రకారం 74 మరియు ఒక సంఖ్య మరో సంఖ్య కన్నా 10 ఎక్కువ).

ఈ పద్ధతి ఎంత ఉపయోగకరమో చూపడానికి మరికొన్ని ఉదాహరణలు పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ 5: $\frac{3}{7}$ రావడానికి అకరణీయ సంఖ్య $\frac{-7}{3}$ యొక్క రెట్టింపునకు ఎంత కలపాలి?

సాధన : అకరణీయ సంఖ్య $\frac{-7}{3}$ యొక్క రెట్టింపు $2 \times \left(\frac{-7}{3}\right) = \frac{-14}{3}$. ఈ సంఖ్యకు x కలిపినట్లయితే $\frac{3}{7}$ వస్తుంది. అంటే,

$$x + \left(\frac{-14}{3}\right) = \frac{3}{7}$$

లేదా $$x - \frac{14}{3} = \frac{3}{7}$$

లేదా $$x = \frac{3}{7} + \frac{14}{3}$$ ($\frac{14}{3}$ ను RHS కు పక్షాంతరం చేయగా)

$$= \frac{(3 \times 3) + (14 \times 7)}{21} = \frac{9 + 98}{21} = \frac{107}{21}.$$

Thus $\frac{107}{21}$ should be added to $2\times\left(\frac{-7}{3}\right)$ to give $\frac{3}{7}$.

Example 6: The perimeter of a rectangle is 13 cm and its width is $2\frac{3}{4}$ cm. Find its length.

Solution: Assume the length of the rectangle to be x cm.

The perimeter of the rectangle = 2 × (length + width)

$$= 2 \times \left(x + 2\frac{3}{4}\right)$$

$$= 2\left(x + \frac{11}{4}\right)$$

The perimeter is given to be 13 cm. Therefore,

$$2\left(x + \frac{11}{4}\right) = 13$$

or $$x + \frac{11}{4} = \frac{13}{2} \quad \text{(dividing both sides by 2)}$$

or $$x = \frac{13}{2} - \frac{11}{4}$$

$$= \frac{26}{4} - \frac{11}{4} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$$

The length of the rectangle is $3\frac{3}{4}$ cm.

Example 7: The present age of Sahil's mother is three times the present age of Sahil. After 5 years their ages will add to 66 years. Find their present ages.

Solution: Let Sahil's present age be x years.

We could also choose Sahil's age 5 years later to be x and proceed. Why don't you try it that way?

	Sahil	Mother	Sum
Present age	x	$3x$	
Age 5 years later	$x + 5$	$3x + 5$	$4x + 10$

It is given that this sum is 66 years.

Therefore, $$4x + 10 = 66$$

This equation determines Sahil's present age which is x years. To solve the equation,

ఈవిధంగా $\frac{3}{7}$ రావడానికి $2 \times \left(\frac{-7}{3}\right)$ కి $\frac{107}{21}$ ని కలపాలి

ఉదాహరణ 6: ఒక దీర్ఘచతురస్ర చుట్టుకొలత 13 సెం.మీ. దాని వెడల్పు $2\frac{3}{4}$ సెం.మీ. అయిన దాని పొడవును కనుక్కోండి.

సాధన: దీర్ఘచతురస్ర పొడవు x సెం.మీ. అనుకుందాం.

దీర్ఘచతురస్ర చుట్టుకొలత = 2 × (పొడవు + వెడల్పు)

$$= 2 \times (x + 2\frac{3}{4})$$

$$= 2\left(x + \frac{11}{4}\right)$$

చుట్టుకొలత 13సెం.మీ. ఇవ్వబడింది. కాబట్టి,

$$2\left(x + \frac{11}{4}\right) = 13$$

లేదా $$x + \frac{11}{4} = \frac{13}{2}$$ (ఇరు వైపులా 2చే భాగించగా)

లేదా $$x = \frac{13}{2} - \frac{11}{4}$$

$$= \frac{26}{4} - \frac{11}{4} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$$

దీర్ఘచతురస్ర పొడవు $3\frac{3}{4}$ సెం.మీ.

ఉదాహరణ 7: సాహిల్ తల్లి ప్రస్తుత వయస్సు సాహిల్ ప్రస్తుత్త వయస్సుకు మూడు రెట్లు. 5 సంవత్సరాల తర్వాత వారి వయస్సుల మొత్తం 66 సంవత్సరాలు. వారి ప్రస్తుత వయస్సులు కనుగొనండి.

సాధన: సాహిల్ ప్రస్తుత వయస్సు x సంవత్సరాలు అనుకుందాం.

5 సం॥ తర్వాత సాహిల్ యొక్క వయస్సు x సం॥ అనుకొని కూడా చేయగలం. ఆ పద్ధతిలో నీవు ప్రయత్నించ గలవా?

	సాహిల్	తల్లి	మొత్తం
ప్రస్తుత వయస్సు	x	$3x$	
5సం॥ తరువాత వయస్సు	$x + 5$	$3x + 5$	$4x + 10$

వయస్సుల మొత్తం 66 సం॥ అని ఇవ్వబడినది.

కాబట్టి, $$4x + 10 = 66$$

ఈ సమీకరణం సాహిల్ ప్రస్తుత వయస్సు x సం॥లుగా నిర్ణయిస్తుంది. ఈ సమీకరణం సాధించవలెనన్న,

we transpose 10 to RHS,

$$4x = 66 - 10$$

or $$4x = 56$$

or $$x = \frac{56}{4} = 14 \qquad \text{(solution)}$$

Thus, Sahil's present age is 14 years and his mother's age is 42 years. (You may easily check that 5 years from now the sum of their ages will be 66 years.)

Example 8: Bansi has 3 times as many two-rupee coins as he has five-rupee coins. If he has in all a sum of ` 77, how many coins of each denomination does he have?

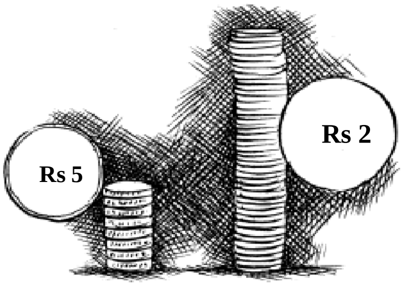
Solution: Let the number of five-rupee coins that Bansi has be x. Then the number of two-rupee coins he has is 3 times x or $3x$.

The amount Bansi has:

(i) from 5 rupee coins, ` $5 \times x =$ ` $5x$

(ii) from 2 rupee coins, ` $2 \times 3x =$ ` $6x$

Hence the total money he has = ` $11x$



But this is given to be ` 77; therefore,

$$11x = 77$$

or $$x = \frac{77}{11} = 7$$

Thus, number of five-rupee coins = $x = 7$

and number of two-rupee coins = $3x = 21$ (solution)

(You can check that the total money with Bansi is ` 77.)

Example 9: The sum of three consecutive multiples of 11 is 363. Find these multiples.

Solution: If x is a multiple of 11, the next multiple is $x + 11$. The next to this is $x + 11 + 11$ or $x + 22$. So we can take three consecutive multiples of 11 as x, $x + 11$ and $x + 22$.

It is given that the sum of these consecutive multiples of 11 is 363. This will give the following equation:

$$x + (x + 11) + (x + 22) = 363$$

or $$x + x + 11 + x + 22 = 363$$

or $$3x + 33 = 363$$

or $$3x = 363 - 33$$

or $$3x = 330$$

Alternatively, we may think of the multiple of 11 immediately before x. This is $(x - 11)$. Therefore, we may take three consecutive multiples of 11 as $x - 11$, x, $x + 11$.

In this case we arrive at the equation

$$(x - 11) + x + (x + 11) = 363$$

or $$3x = 363$$

మనం 10ని RHS కు పక్షాంతరం చేయగా

$$4x = 66 - 10$$

లేదా $4x = 56$

లేదా $x = \frac{56}{4} = 14$ (సాధన)

ఆ విధంగా సాహిల్ యొక్క ప్రస్తుత వయస్సు 14 సంవత్సరాలు. అతని తల్లి వయస్సు 42 సంవత్సరాలు. (5 సంవత్సరాల తర్వాత వారి వయస్సుల మొత్తం 66 సంవత్సరాలు అని సులభంగా సరిచూసుకోగలం)

ఉదాహరణ 8: బన్సీ వద్ద గల ఐదు రూపాయల నాణేలకు మూడు రెట్లు రెండు రూపాయల నాణేలు ఉన్నాయి. అతని వద్ద మొత్తం సొమ్ము ` 77 అయిన ఒక్కొక్క రకం నాణేలు ఎన్ని ఉన్నాయి?

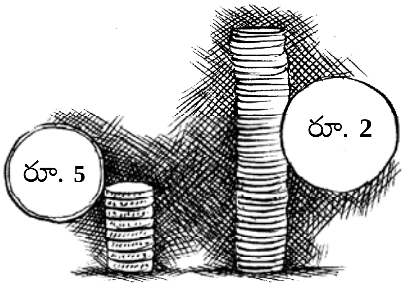
సాధన: బన్సీ వద్ద ఉన్న ఐదు రూపాయల నాణేల సంఖ్య x అనుకుందాం. అప్పుడు అతని వద్ద ఉన్న రెండు రూపాయల నాణేల సంఖ్య x కు 3 రెట్లు లేదా $3x$.

బన్సీ వద్ద గల సొమ్ము:

(i) ` 5 నాణేల ద్వారా $5 \times x$ = ` $5x$

(ii) ` 2 నాణేల ద్వారా ` $2 \times 3x$ = ` $6x$

కనుక అతని వద్దగల మొత్తం సొమ్ము = ` $11x$



కానీ ఇది ` 77 అని ఇవ్వబడింది. కావున

$$11x = 77$$

లేదా $x = \frac{77}{11} = 7$

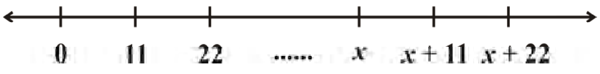
ఆవిధంగా, ఐదు రూపాయల నాణేల సంఖ్య = $x = 7$

మరియు, రెండు రూపాయల నాణేల సంఖ్య = $3x = 21$ (సాధన)

(బన్సీ వద్ద గల మొత్తం సొమ్ము ` 77 అని మనం సరిచూసుకోగలం.)

ఉదాహరణ 9: 11 యొక్క మూడు వరుస గుణిజాల మొత్తం 363. ఆ గుణిజాలను కనుక్కోండి.

సాధన: 11 యొక్క ఒక గుణిజం x అయితే, దాని తరువాతి గుణిజం $x + 11$. దీని తరువాతి గుణిజం $x + 11 + 11$ లేదా $x + 22$. కావున 11 యొక్క మూడు వరుస గుణిజాలను మనం x, $x + 11$, $x + 22$గా తీసుకోవచ్చు..



11 యొక్క ఈ మూడు వరుస గుణిజాల మొత్తం 363 అని ఇవ్వబడింది. దీని నుండి కింది సమీకరణం వస్తుంది.

$$x + (x + 11) + (x + 22) = 363$$

లేదా $x + x + 11 + x + 22 = 363$

లేదా $3x + 33 = 363$

లేదా $3x = 363 - 33$

లేదా $3x = 330$

ప్రత్యామ్నాయంగా, x కు ముందు గల 11 యొక్క గుణిజాన్ని $(x - 11)$ అనుకోవచ్చు. కావున 11 యొక్క మూడు వరుస గుణిజాలను $x - 11, x, x + 11$ గా తీసుకోవచ్చు. ఈ సందర్భంలో మనం

$$(x - 11) + x + (x + 11) = 363$$

లేదా $3x = 363$

అనే సమీకరణాన్ని పొందగలం.

or $$x = \frac{330}{3}$$

$$= 110$$

Hence, the three consecutive multiples are 110, 121, 132 (answer).

or $x = \frac{363}{3} = 121$. Therefore,

$x = 121$, $x - 11 = 110$, $x + 11 = 132$

Hence, the three consecutive multiples are 110, 121, 132.

We can see that we can adopt different ways to find a solution for the problem.

Example 10: The difference between two whole numbers is 66. The ratio of the two numbers is 2 : 5. What are the two numbers?

Solution: Since the ratio of the two numbers is 2 : 5, we may take one number to be $2x$ and the other to be $5x$. (Note that $2x : 5x$ is same as 2 : 5.)

The difference between the two numbers is $(5x - 2x)$. It is given that the difference is 66. Therefore,

$$5x - 2x = 66$$

or $$3x = 66$$

or $$x = 22$$

Since the numbers are $2x$ and $5x$, they are 2×22 or 44 and 5×22 or 110, respectively.

The difference between the two numbers is $110 - 44 = 66$ as desired.

Example 11: Deveshi has a total of ` 590 as currency notes in the denominations of ` 50, ` 20 and ` 10. The ratio of the number of ` 50 notes and ` 20 notes is 3:5. If she has a total of 25 notes, how many notes of each denomination she has?

Solution: Let the number of ` 50 notes and ` 20 notes be $3x$ and $5x$, respectively.

But she has 25 notes in total.

Therefore, the number of ` 10 notes $= 25 - (3x + 5x) = 25 - 8x$

The amount she has

from ` 50 notes : $3x \times 50 =$ ` $150x$

from ` 20 notes : $5x \times 20 =$ ` $100x$

from ` 10 notes : $(25 - 8x) \times 10 =$ ` $(250 - 80x)$

Hence the total money she has $= 150x + 100x + (250 - 80x) =$ ` $(170x + 250)$

But she has ` 590. Therefore, $170x + 250 = 590$

or $$170x = 590 - 250 = 340$$

or $$x = \frac{340}{170} = 2$$

The number of ` 50 notes she has $= 3x$

$$= 3 \times 2 = 6$$

The number of ` 20 notes she has $= 5x = 5 \times 2 = 10$

The number of ` 10 notes she has $= 25 - 8x$

$$= 25 - (8 \times 2) = 25 - 16 = 9$$

లేదా $x = \frac{330}{3}$

$= 110$

అందువల్ల, ఆ వరుస మూడు గుణిజాలు 110, 121, 132 అవుతాయి (జవాబు).

> లేదా $x = \frac{363}{3} = 121$. కావున,
> $x = 121,\ x - 11 = 110,\ x + 11 = 132$
> అందువలన, ఆ వరుస మూడు గుణిజాలు 110, 121, 132 అవుతాయి.

సమస్యకు పరిష్కారాన్ని కనుగొనడానికి వివిధ మార్గాలను అవలంబించవచ్చని మనం చూడవచ్చు.

ఉదాహరణ 10: రెండు పూర్ణాంకాల మధ్య భేదం 66. ఆ రెండు సంఖ్యల నిష్పత్తి 2 : 5. అయిన ఆ రెండు సంఖ్యలు ఏవి?

సాధన: రెండు సంఖ్యల నిష్పత్తి 2 : 5 కావున అందులో ఒక సంఖ్య $2x$ అనీ, మరో సంఖ్య $5x$ అనీ తీసుకోవచ్చు. ($2x : 5x$, 2 : 5లు ఒకటే అని గమనించగలం)

ఆ రెండు సంఖ్యల భేదం $5x - 2x$. ఈ బేధం 66 అని ఇవ్వబడింది. కావున,

$$5x - 2x = 66$$

లేదా $3x = 66$

లేదా $x = 22$

ఆ రెండు సంఖ్యలు $2x$ మరియు $5x$, కావున అవి 2×22 లేదా 44 మరియు 5×22 లేదా 110.

కావలసిన విధంగా, ఆ రెండు సంఖ్యల భేదం $110 - 44 = 66$ అవుతుంది.

ఉదాహరణ 11: దేవేషీకి వద్ద ` 590 విలువగల సొమ్ము ` 50, ` 20 మరియు ` 10 నోట్ల రూపంలో ఉంది. ` 50 నోట్లకు ` 20 నోట్లకు గల నిష్పత్తి 3:5. ఆమె వద్ద మొత్తం 25 నోట్లు ఉన్నచో ఒక్కోరకం నోట్లు ఆమె వద్ద ఎన్ని ఉన్నాయి?

సాధన: ` 50 నోట్ల సంఖ్య మరియు ` 20 నోట్ల సంఖ్య వరుసగా $3x$, $5x$ అనుకుందాం. కానీ ఆమె వద్ద గల మొత్తం నోట్లు 25.

అందువలన ` 10 నోట్ల సంఖ్య $= 25 - (3x + 5x) = 25 - 8x$

ఆమె వద్ద గల సొమ్ము

` 50 నోట్ల ద్వారా : $3x \times 50 =$ ` $150x$

` 20 నోట్ల ద్వారా : $5x \times 20 =$ ` $100x$

` 10 నోట్ల ద్వారా : $(25 - 8x) \times 10 =$ ` $(250 - 80x)$

కావున ఆమె వద్ద గల మొత్తం సొమ్ము $= 150x + 100x + (250 - 80x) =$ ` $(170x + 250)$

కానీ ఆమె వద్ద ` 590 ఉంది. కావున $170x + 250 = 590$

లేదా $170x = 590 - 250 = 340$

లేదా $x = \frac{340}{170} = 2$

ఆమె వద్ద గల ` 50 నోట్లు $= 3x$

$= 3 \times 2 = 6$

ఆమె వద్ద గల ` 20 నోట్లు $= 5x = 5 \times 2 = 10$

ఆమె వద్ద గల ` 10 నోట్లు $= 25 - 8x$

$= 25 - (8 \times 2) = 25 - 16 = 9$

EXERCISE 2.2

1. If you subtract $\frac{1}{2}$ from a number and multiply the result by $\frac{1}{2}$, you get $\frac{1}{8}$. What is the number?
2. The perimeter of a rectangular swimming pool is 154 m. Its length is 2 m more than twice its breadth. What are the length and the breadth of the pool?
3. The base of an isosceles triangle is $\frac{4}{3}$ cm. The perimeter of the triangle is $4\frac{2}{15}$ cm. What is the length of either of the remaining equal sides?
4. Sum of two numbers is 95. If one exceeds the other by 15, find the numbers.
5. Two numbers are in the ratio 5:3. If they differ by 18, what are the numbers?
6. Three consecutive integers add up to 51. What are these integers?
7. The sum of three consecutive multiples of 8 is 888. Find the multiples.
8. Three consecutive integers are such that when they are taken in increasing order and multiplied by 2, 3 and 4 respectively, they add up to 74. Find these numbers.
9. The ages of Rahul and Haroon are in the ratio 5:7. Four years later the sum of their ages will be 56 years. What are their present ages?
10. The number of boys and girls in a class are in the ratio 7:5. The number of boys is 8 more than the number of girls. What is the total class strength?
11. Baichung's father is 26 years younger than Baichung's grandfather and 29 years older than Baichung. The sum of the ages of all the three is 135 years. What is the age of each one of them?
12. Fifteen years from now Ravi's age will be four times his present age. What is Ravi's present age?
13. A rational number is such that when you multiply it by $\frac{5}{2}$ and add $\frac{2}{3}$ to the product, you get $-\frac{7}{12}$. What is the number?

14. Lakshmi is a cashier in a bank. She has currency notes of denominations ` 100, ` 50 and ` 10, respectively. The ratio of the number of these notes is 2:3:5. The total cash with Lakshmi is ` 4,00,000. How many notes of each denomination does she have?
15. I have a total of ` 300 in coins of denomination ` 1, ` 2 and ` 5. The number of ` 2 coins is 3 times the number of ` 5 coins. The total number of coins is 160. How many coins of each denomination are with me?
16. The organisers of an essay competition decide that a winner in the competition gets a prize of ` 100 and a participant who does not win gets a prize of ` 25. The total prize money distributed is ` 3,000. Find the number of winners, if the total number of participants is 63.

అభ్యాసం - 2.2

1. నీవు ఒక సంఖ్య నుంచి $\frac{1}{2}$ ను తీసివేసి ఫలితాన్ని $\frac{1}{2}$ తో గుణిస్తే $\frac{1}{8}$ వస్తుంది. ఆ సంఖ్య ఏది?
2. ఒక దీర్ఘచతురస్రాకార ఈత కొలను చుట్టుకొలత 154మీ. దాని పొడవు వెడల్పు యొక్క రెట్టింపుకన్నా 2మీ. ఎక్కువ. ఈత కొలను యొక్క పొడవు, వెడల్పులెంత?
3. ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజ భూమి $\frac{4}{3}$ సెం.మీ. త్రిభుజ చుట్టుకొలత $4\frac{2}{15}$ సెం.మీ. మిగిలిన రెండు సమాన భుజాలలో ఒక దాని పొడవు ఎంత?
4. రెండు సంఖ్యల మొత్తం 95. ఒక సంఖ్య మరో సంఖ్య కన్నా 15 ఎక్కువ. అయిన ఆ సంఖ్యలను కనుగొనండి.
5. రెండు సంఖ్యలు 5:3 నిష్పత్తిలో ఉన్నాయి. వాటి భేదం 18 అయిన ఆ సంఖ్యలేవి?
6. మూడు వరుస పూర్ణసంఖ్యల మొత్తం 51 అయిన ఆ పూర్ణసంఖ్యలు ఏవి?
7. 8 యొక్క మూడు వరుస గుణిజాల మొత్తం 888. ఆ గుణిజాలను కనుగొనండి.
8. ఆరోహణ క్రమంలో మూడు వరుస పూర్ణ సంఖ్యలను తీసుకుని వాటిని వరుసగా 2, 3, 4లతో గుణించి కూడగా 74 వస్తుంది. ఆ సంఖ్యలను కనుగొనండి.
9. రాహుల్ మరియు హరూన్ ల వయస్సులు 5:7 నిష్పత్తిలో ఉన్నాయి. నాలుగు సంవత్సరాల తరువాత వారి వయస్సుల మొత్తం 56సంవత్సరాలు. వారి ప్రస్తుత వయస్సులు ఎంత?
10. ఒక తరగతిలో బాలురు, బాలికలు 7:5 నిష్పత్తిలో ఉన్నారు. బాలుర సంఖ్య బాలికల సంఖ్య కన్నా 8 ఎక్కువ. తరగతిలోని మొత్తం విద్యార్థుల సంఖ్య ఎంత?
11. బైచుంగ్ తండ్రి, బైచుంగ్ తాత కన్నా 26సం॥ చిన్న మరియు బైచుంగ్ కన్నా 29 సం॥ పెద్ద. ఆ ముగ్గురి వయస్సుల మొత్తం 135 సంవత్సరాలు. వారి ఒక్కొక్కరి వయస్సులు ఎంత?
12. 15 సం॥ తర్వాత రవి వయస్సు అతని ప్రస్తుత వయస్సుకు నాలుగు రెట్లు. రవి ప్రస్తుత వయస్సు ఎంత?
13. ఒక అకరణీయ సంఖ్యను $\frac{5}{2}$ తో గుణించి ఆ లబ్దానికి $\frac{2}{3}$ ని కూడితే $-\frac{7}{12}$ వస్తుంది. ఆ సంఖ్య ఏది?

14. బ్యాంకు క్యాషియర్ లక్ష్మి వద్ద ` 100, ` 50, ` 10 విలువ గల నోట్లు ఉన్నాయి. ఈ నోట్ల నిష్పత్తి 2:3:5. లక్ష్మి వద్ద గల మొత్తం సొమ్ము ` 4,00,000. ఆమె వద్ద ఒక్కో రకం నోట్లు ఎన్ని ఉన్నాయి?
15. నా వద్ద ` 300 సొమ్ము ` 1, ` 2 మరియు ` 5 నాణేల రూపంలో ఉన్నాయి. `2 నాణేల సంఖ్య ` 5 నాణేల సంఖ్యకు 3 రెట్లు, మొత్తం నాణేల సంఖ్య 160. ఒక్కోరకం నాణేలు నావద్ద ఎన్ని ఉన్నాయి?
16. ఒక వ్యాసరచన పోటీలో గెలిచిన వారికి ` 100, గెలవని వారికి ` 25 ఇవ్వాలని నిర్వాహకులు నిర్ణయించారు. బహుమతులకై పంచవలసిన మొత్తం ` 3,000. పోటీలో మొత్తం పాల్గొన్న వారు 63 మంది అయితే గెలుపొందినవారి సంఖ్య ఎంత?

2.4 Solving Equations having the Variable on both Sides

An equation is the equality of the values of two expressions. In the equation $2x - 3 = 7$, the two expressions are $2x - 3$ and 7. In most examples that we have come across so far, the RHS is just a number. But this need not always be so; both sides could have expressions with variables. For example, the equation $2x - 3 = x + 2$ has expressions with a variable on both sides; the expression on the LHS is $(2x - 3)$ and the expression on the RHS is $(x + 2)$.

- We now discuss how to solve such equations which have expressions with the variable on both sides.

Example 12: Solve $2x - 3 = x + 2$

Solution: We have

$$2x = x + 2 + 3$$

or $$2x = x + 5$$

or $$2x - x = x + 5 - x \quad \text{(subtracting } x \text{ from both sides)}$$

or $$x = 5 \quad \text{(solution)}$$

Here we subtracted from both sides of the equation, not a number (constant), but a term involving the variable. We can do this as variables are also numbers. Also, note that subtracting x from both sides amounts to transposing x to LHS.

Example 13: Solve $5x + \frac{7}{2} = \frac{3}{2}x - 14$

Solution: Multiply both sides of the equation by 2. We get

$$2 \times \left(5x + \frac{7}{2}\right) = 2 \times \left(\frac{3}{2}x - 14\right)$$

$$(2 \times 5x) + \left(2 \times \frac{7}{2}\right) = \left(2 \times \frac{3}{2}x\right) - (2 \times 14)$$

or $$10x + 7 = 3x - 28$$

or $$10x - 3x + 7 = -28 \quad \text{(transposing } 3x \text{ to LHS)}$$

or $$7x + 7 = -28$$

or $$7x = -28 - 7$$

or $$7x = -35$$

or $$x = \frac{-35}{7}$$ or $$x = -5 \quad \text{(solution)}$$

2.4 ఇరు వైపులా చరరాశులు గల సమీకరణాల సాధన

రెండు సమాసాల విలువల సమానత్వమే సమీకరణం. $2x - 3 = 7$ సమీకరణంలోని రెండు సమాసాలు $2x - 3$ మరియు 7. ఇప్పటి వరకు మనం చూసిన ఉదాహరణలలో RHSలో సంఖ్య మాత్రమే ఉంది. కానీ ఎల్లప్పుడూ ఇలానే ఉండాల్సిన అవసరం లేదు. రెండు వైపులా చరరాశులతో కూడిన సమాసాలు ఉండవచ్చు. ఉదాహరణకు $2x - 3 = x + 2$ సమీకరణంలో రెండు వైపులా చరరాశులతో కూడిన సమాసాలు ఉన్నాయి. అవి LHS లో $(2x - 3)$ మరియు RHS లో $(x + 2)$.

- రెండు వైపులా చరరాశులతో కూడిన సమాసాలు గల సమీకరణాలను ఎలా సాధించాలో మనం చర్చిద్దాం.

ఉదాహరణ 12: $2x - 3 = x + 2$ ను సాధించుము.

సాధన: ఈ విధంగా

$$2x = x + 2 + 3$$

లేదా $2x = x + 5$

లేదా $2x - x = x + 5 - x$ (ఇరు వైపులా x ను తీసివేయగా)

లేదా $x = 5$ (సాధన)

ఇక్కడ మనం సమీకరణం యొక్క ఇరువైపులా, సంఖ్య (స్థిరరాశి)ని కాకుండా, చరరాశితో కూడిన పదాన్ని తీసివేశాం. చరరాశులు కూడా సంఖ్యలే కావున మనం ఇలా చేయగలం. x ని ఇరు వైపులా తీసివేయడమనేది, x ను LHS కు పక్షాంతరం చెందించడం అవుతుందని గమనించాలి.

ఉదాహరణ 13: $5x + \frac{7}{2} = \frac{3}{2}x - 14$ ను సాధించుము.

సాధన: సమీకరణంను ఇరు వైపులా 2 చే గుణించగా

$$2 \times \left(5x + \frac{7}{2}\right) = 2 \times \left(\frac{3}{2}x - 14\right)$$

$$(2 \times 5x) + \left(2 \times \frac{7}{2}\right) = \left(2 \times \frac{3}{2}x\right) - (2 \times 14)$$

లేదా $10x + 7 = 3x - 28$

లేదా $10x - 3x + 7 = -28$ ($3x$ ను LHS కు పక్షాంతరం చేయగా)

లేదా $7x + 7 = -28$

లేదా $7x = -28 - 7$

లేదా $7x = -35$

లేదా $x = \frac{-35}{7}$ లేదా $x = -5$ (సాధన)

EXERCISE 2.3

Solve the following equations and check your results.

1. $3x = 2x + 18$
2. $5t - 3 = 3t - 5$
3. $5x + 9 = 5 + 3x$
4. $4z + 3 = 6 + 2z$
5. $2x - 1 = 14 - x$
6. $8x + 4 = 3(x - 1) + 7$
7. $x = \frac{4}{5}(x + 10)$
8. $\frac{2x}{3} + 1 = \frac{7x}{15} + 3$
9. $2y + \frac{5}{3} = \frac{26}{3} - y$
10. $3m = 5m - \frac{8}{5}$

2.5 Some More Applications

Example 14: The digits of a two-digit number differ by 3. If the digits are interchanged, and the resulting number is added to the original number, we get 143. What can be the original number?

Solution: Take, for example, a two-digit number, say, 56. It can be written as $56 = (10 \times 5) + 6$.

If the digits in 56 are interchanged, we get 65, which can be written as $(10 \times 6) + 5$.

Let us take the two digit number such that the digit in the units place is b. The digit in the tens place differs from b by 3. Let us take it as $b + 3$. So the two-digit number is $10(b + 3) + b = 10b + 30 + b = 11b + 30$.

With interchange of digits, the resulting two-digit number will be

$$10b + (b + 3) = 11b + 3$$

Could we take the tens place digit to be $(b - 3)$? Try it and see what solution you get.

If we add these two two-digit numbers, their sum is

$$(11b + 30) + (11b + 3) = 11b + 11b + 30 + 3 = 22b + 33$$

It is given that the sum is 143. Therefore, $22b + 33 = 143$

or $22b = 143 - 33$

or $22b = 110$

or $b = \frac{110}{22}$

or $b = 5$

Remember, this is the solution when we choose the tens digits to be 3 more than the unit's digits. What happens if we take the tens digit to be $(b - 3)$?

The units digit is 5 and therefore the tens digit is $5 + 3$ which is 8. The number is 85.

Check: On interchange of digits the number we get is 58. The sum of 85 and 58 is 143 as given.

The statement of the example is valid for both 58 and 85 and both are correct answers.

అభ్యాసం 2.3

క్రింది సమీకరణాలను సాధించండి మరియు ఫలితాలను సరిచూడండి.

1. $3x = 2x + 18$
2. $5t - 3 = 3t - 5$
3. $5x + 9 = 5 + 3x$
4. $4z + 3 = 6 + 2z$
5. $2x - 1 = 14 - x$
6. $8x + 4 = 3(x - 1) + 7$
7. $x = \frac{4}{5}(x + 10)$
8. $\frac{2x}{3} + 1 = \frac{7x}{15} + 3$
9. $2y + \frac{5}{3} = \frac{26}{3} - y$
10. $3m = 5m - \frac{8}{5}$

2.5 మరికొన్ని అనువర్తనాలు

ఉదాహరణ 14: ఒక రెండంకెల సంఖ్యలోని అంకెల భేదం 3. అంకెలను తారుమారు చేయగా వచ్చే సంఖ్యను ఆ సంఖ్యకు కలిపితే 143 వస్తుంది. ఆ సంఖ్య ఏది?

సాధన: ఉదాహణకు రెండంకెల సంఖ్య 56ను తీసుకుందాం. దీనిని $56 = (10 \times 5) + 6$గా వ్రాయగలం. 56లోని అంకెలను తారుమారు చేయగా 65 వస్తుంది. దీనిని $(10 \times 6) + 5$ గా రాయవచ్చు.

ఒకట్ల స్థానంలో b గల రెండంకెల సంఖ్యను తీసుకుందాం. పదుల స్థానంలోని అంకెకు, b కు తేడా 3. దానిని $b + 3$ అనుకుందాం. కావున ఆ రెండంకెల సంఖ్య $10(b+3) + b = 10b+30+b = 11b+30$.

అంకెలను తరుమారు చేయగా వచ్చే సంఖ్య

$$10b + (b + 3) = 11b + 3$$

> పదుల స్థానంలోని అంకె $(b - 3)$గా తీసుకోవచ్చా? ప్రయత్నించి మీ సాధనను పరిశీలించండి.

ఈ రెండు సంఖ్యలను కూడగా వచ్చే మొత్తం

$$(11b + 30) + (11b + 3) = 11b + 11b + 30 + 3 = 22b + 33$$

ఈ మొత్తం 143 అని ఇవ్వబడింది. కావున, $22b + 33 = 143$

లేదా $22b = 143 - 33$

లేదా $22b = 110$

లేదా $b = \frac{110}{22}$

లేదా $b = 5$

> పదుల స్థానంలోని అంకె ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె కన్నా 3 ఎక్కువ అని అనుకున్నప్పుడు వచ్చే సాధన ఇది. పదుల స్థానంలోని అంకె $b–3$ గా తీసుకుంటే ఏం జరుగుతుంది?

ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె 5 మరియు పదుల స్థానంలోని అంకె $5 + 3 = 8$, ఆ సంఖ్య 85

సరిచూచుట: అంకెలను తారుమారు చేయగా వచ్చే సంఖ్య 58. 85 మరియు 58ల మొత్తం 143.

> ఉదాహరణలోని దత్తాంశం 58, 85 రెండింటికీ సరైనదే.

Example 15: Arjun is twice as old as Shriya. Five years ago his age was three times Shriya's age. Find their present ages.

Solution: Let us take Shriya's present age to be x years.

Then Arjun's present age would be $2x$ years.

Shriya's age five years ago was $(x - 5)$ years.

Arjun's age five years ago was $(2x - 5)$ years.

It is given that Arjun's age five years ago was three times Shriya's age.

Thus, $2x - 5 = 3(x - 5)$

or $2x - 5 = 3x - 15$

or $15 - 5 = 3x - 2x$

or $10 = x$

So, Shriya's present age $= x = 10$ years.

Therefore, Arjun's present age $= 2x = 2 \times 10 = 20$ years.

EXERCISE 2.4

1. Amina thinks of a number and subtracts $\frac{5}{2}$ from it. She multiplies the result by 8. The result now obtained is 3 times the same number she thought of. What is the number?
2. A positive number is 5 times another number. If 21 is added to both the numbers, then one of the new numbers becomes twice the other new number. What are the numbers?
3. Sum of the digits of a two-digit number is 9. When we interchange the digits, it is found that the resulting new number is greater than the original number by 27. What is the two-digit number?
4. One of the two digits of a two digit number is three times the other digit. If you interchange the digits of this two-digit number and add the resulting number to the original number, you get 88. What is the original number?
5. Shobo's mother's present age is six times Shobo's present age. Shobo's age five years from now will be one third of his mother's present age. What are their present ages?
6. There is a narrow rectangular plot, reserved for a school, in Mahuli village. The length and breadth of the plot are in the ratio 11:4. At the rate ₹ 100 per metre it will cost the village panchayat ₹ 75000 to fence the plot. What are the dimensions of the plot?
7. Hasan buys two kinds of cloth materials for school uniforms, shirt material that costs him ₹ 50 per metre and trouser material that costs him ₹ 90 per metre.

ఉదాహరణ 15: అర్జున్ వయసు శ్రీయ వయసుకు రెట్టింపు. 5 సం॥ క్రితం అతని వయసు శ్రీయ వయసుకు మూడు రెట్లు. వారి ప్రస్తుత వయస్సులు కనుక్కోండి.

సాధన: శ్రీయ ప్రస్తుత వయస్సు x సంవత్సరాలు అనుకుందాం.

అప్పుడు అర్జున్ ప్రస్తుత వయస్సు $2x$ సంవత్సరాలు అవుతుంది.

5 సం॥ల క్రితం శ్రీయ వయస్సు $(x - 5)$ సం॥

5 సం॥ల క్రితం అర్జున్ వయస్సు $(2x - 5)$ సం॥

5 సం॥ల క్రితం అర్జున్ వయసు శ్రీయ వయసుకు మూడు రెట్లు అని ఇవ్వబడింది.

దీని నుంచి, $2x - 5 = 3(x - 5)$

లేదా $2x - 5 = 3x - 15$

లేదా $15 - 5 = 3x - 2x$

లేదా $10 = x$

కావున, శ్రీయ ప్రస్తుత వయస్సు $= x = 10$ సంవత్సరాలు

$\therefore$ అర్జున్ ప్రస్తుత వయస్సు $= 2x = 2 \times 10 = 20$ సంవత్సరాలు

అభ్యాసం 2.4

1. అమీన ఒక సంఖ్యను తలచుకొని దాని నుంచి $\frac{5}{2}$ ను తీసివేసి వచ్చిన ఫలితాన్ని 8చే గుణించింది. ఇపుడు వచ్చిన ఈ ఫలితం తను తలచుకున్న సంఖ్యకు 3 రెట్లు అయిన ఆ సంఖ్య ఏది?

2. ఒక ధన సంఖ్య మరో సంఖ్యకు 5 రెట్లు. ఈ రెండు సంఖ్యలకూ 21ని కలిపిన వచ్చే రెండు సంఖ్యలలోని ఒక సంఖ్య మరొక సంఖ్యకు రెట్టింపు. ఆ సంఖ్యలేవి?

3. ఒక రెండంకెల సంఖ్యలోని అంకెల మొత్తం 9. అంకెలను తారుమారు చేయగా వచ్చే సంఖ్య ఆ సంఖ్య కన్నా 27 ఎక్కువ. ఆ రెండంకెల సంఖ్య ఏది?

4. ఒక రెండంకెల సంఖ్యలోని ఒక అంకె మరో అంకెకు మూడు రెట్లు. ఈ రెండంకెల సంఖ్యలోని అంకెలను తారుమారు చేయగా వచ్చే సంఖ్యను ఆ సంఖ్యకు కలిపితే 88 వస్తుంది. ఆ సంఖ్య ఏది?

5. షోబో తల్లి వయస్సు షోబో ప్రస్తుత వయస్సుకు ఆరు రెట్లు. ఐదు సంవత్సరాల తర్వాత షోబో వయస్సు అతని తల్లి యొక్క ప్రస్తుత వయస్సులో $\frac{1}{3}$ వ వంతు అయితే వారి ప్రస్తుత వయస్సులు ఎంత?

6. మహులి గ్రామంలో ఒక పాఠశాలకు కేటాయించిన దీర్ఘచతురస్రాకార స్థలం యొక్క పొడవు, వెడల్పులు 11:4. నిష్పత్తిలో ఉన్నాయి. గ్రామ పంచాయితీవారు కంచె వేయుటకు మీటరుకు ₹100 చొప్పున ₹ 75000 ఖర్చు చేసిన, ఆ స్థలం కొలతలు కనుగొనండి?

7. చొక్కా గుడ్డ మీటరు ₹50, ప్యాంట్ గుడ్డ మీటరు ₹90 చొప్పున హసన్ రెండు రకాల స్కూల్ యూనిఫామ్

For every 3 meters of the shirt material he buys 2 metres of the trouser material. He sells the materials at 12% and 10% profit respectively. His total sale is ` 36,600. How much trouser material did he buy?

8. Half of a herd of deer are grazing in the field and three fourths of the remaining are playing nearby. The rest 9 are drinking water from the pond. Find the number of deer in the herd.
9. A grandfather is ten times older than his granddaughter. He is also 54 years older than her. Find their present ages.
10. Aman's age is three times his son's age. Ten years ago he was five times his son's age. Find their present ages.

2.6 Reducing Equations to Simpler Form

Example 16: Solve $\frac{6x+1}{3}+1=\frac{x-3}{6}$

Solution: Multiplying both sides of the equation by 6,

> Why 6? Because it is the smallest multiple (or LCM) of the given denominators.

$$\frac{6\,(6x+1)}{3}+6\times 1=\frac{6(x-3)}{6}$$

or $2\,(6x+1)+6=x-3$

or $12x+2+6=x-3$ (opening the brackets)

or $12x+8=x-3$

or $12x-x+8=-3$

or $11x+8=-3$

or $11x=-3-8$

or $11x=-11$

or $x=-1$ (required solution)

Check: LHS $=\frac{6(-1)+1}{3}+1=\frac{-6+1}{3}+1=\frac{-5}{3}+\frac{3}{3}=\frac{-5+3}{3}=\frac{-2}{3}$

RHS $=\frac{(-1)-3}{6}=\frac{-4}{6}=\frac{-2}{3}$

LHS = RHS. (as required)

Example 17: Solve $5x-2\,(2x-7)=2\,(3x-1)+\frac{7}{2}$

Solution: Let us open the brackets,

LHS $=5x-4x+14=x+14$

బట్టలు కొనాలి. ప్రతి 3మీ. చొక్కా గుడ్డకు 2మీ. ప్యాంట్ కొనాలి. అతను ఆ బట్టలను వరుసగా 12%, 10% లాభాలకు అమ్మాలి. అతని అమ్మకం మొత్తం ` 36,600 అయిన అతను కొన్న ప్యాంట్ బట్ట ఎంత?

8. ఒక జింకల గుంపులో సగం పొలంలో మేస్తున్నాయి మరియు మిగిలిన వాటిలో నాలుగులో మూడవ వంతు ఆడుకుంటున్నాయి. మిగిలిన 9 జింకలు కొలనులో నీరు త్రాగుతున్నాయి. గుంపులోని జింకల సంఖ్యను కనుగొనండి.
9. తాతగారి వయస్సు తన మనవరాలి వయస్సుకు పదిరెట్లు. అతను అమె కంటే 54 సంవత్సరాలు పెద్దవాడు. వారి ప్రస్తుత వయస్సులు కనుగొనండి.
10. అమన్ వయస్సు అతని కొడుకు వయస్సుకి మూడు రెట్లు. 10 సంవత్సరాల క్రితం అతని వయస్సు కొడుకు వయస్సుకు 5 రెట్లు. వారి ప్రస్తుత వయస్సులను కనుగొనండి.

2.6 సమీకరణాలను సరళరూపంలోకి మార్చుట

ఉదాహరణ 16: సాధించుము $\frac{6x+1}{3}+1=\frac{x-3}{6}$

సాధన: సమీకరణాన్ని ఇరు వైపులా 6చే గుణించగా

> 6 ఎందుకు? ఇది హారముల యొక్క కనిష్ట సామాన్య గుణిజం (క.సా.గు).

$$\frac{6\,(6x+1)}{3}+6\times 1=\frac{6(x-3)}{6}$$

లేదా $2\,(6x + 1) + 6 = x - 3$

లేదా $12x + 2 + 6 = x - 3$ (బ్రాకెట్‌లను తొలగించగా)

లేదా $12x + 8 = x - 3$

లేదా $12x - x + 8 = -3$

లేదా $11x + 8 = -3$

లేదా $11x = -3 - 8$

లేదా $11x = -11$

లేదా $x = -1$ (కావలసిన సాధన)

సరిచూచుట: $\text{LHS} = \frac{6(-1)+1}{3}+1=\frac{-6+1}{3}+1=\frac{-5}{3}+\frac{3}{3}=\frac{-5+3}{3}=\frac{-2}{3}$

$$\text{RHS} = \frac{(-1)-3}{6}=\frac{-4}{6}=\frac{-2}{3}$$

LHS = RHS. (కావలసినది)

ఉదాహరణ 17: సాధించుము $5x - 2\,(2x - 7) = 2\,(3x - 1) + \frac{7}{2}$

సాధన: బ్రాకెట్‌లను తొలగించగా,

$$\text{LHS} = 5x - 4x + 14 = x + 14$$

$$\text{RHS} = 6x - 2 + \frac{7}{2} = 6x - \frac{4}{2} + \frac{7}{2} = 6x + \frac{3}{2}$$

The equation is $x + 14 = 6x + \frac{3}{2}$

or $\quad 14 = 6x - x + \frac{3}{2}$

or $\quad 14 = 5x + \frac{3}{2}$

or $\quad 14 - \frac{3}{2} = 5x \qquad$ (transposing $\frac{3}{2}$)

or $\quad \frac{28-3}{2} = 5x$

or $\quad \frac{25}{2} = 5x$

or $\quad x = \frac{25}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{5 \times 5}{2 \times 5} = \frac{5}{2}$

Did you observe how we simplified the form of the given equation? Here, we had to multiply both sides of the equation by the LCM of the denominators of the terms in the expressions of the equation.

Therefore, required solution is $x = \frac{5}{2}$.

Check: LHS $= 5 \times \frac{5}{2} - 2\left(\frac{5}{2} \times 2 - 7\right)$

$$= \frac{25}{2} - 2(5-7) = \frac{25}{2} - 2(-2) = \frac{25}{2} + 4 = \frac{25+8}{2} = \frac{33}{2}$$

$$\text{RHS} = 2\left(\frac{5}{2} \times 3 - 1\right) + \frac{7}{2} = 2\left(\frac{15}{2} - \frac{2}{2}\right) + \frac{7}{2} = \frac{2 \times 13}{2} + \frac{7}{2}$$

$$= \frac{26+7}{2} = \frac{33}{2} = \text{LHS}. \quad \text{(as required)}$$

Note, in this example we brought the equation to a simpler form by opening brackets and combining like terms on both sides of the equation.

EXERCISE 2.5

Solve the following linear equations.

1. $\frac{x}{2} - \frac{1}{5} = \frac{x}{3} + \frac{1}{4}$ **2.** $\frac{n}{2} - \frac{3n}{4} + \frac{5n}{6} = 21$ **3.** $x + 7 - \frac{8x}{3} = \frac{17}{6} - \frac{5x}{2}$

$$\text{RHS} = 6x - 2 + \frac{7}{2} = 6x - \frac{4}{2} + \frac{7}{2} = 6x + \frac{3}{2}$$

సమీకరణం $x + 14 = 6x + \frac{3}{2}$

లేదా $14 = 6x - x + \frac{3}{2}$

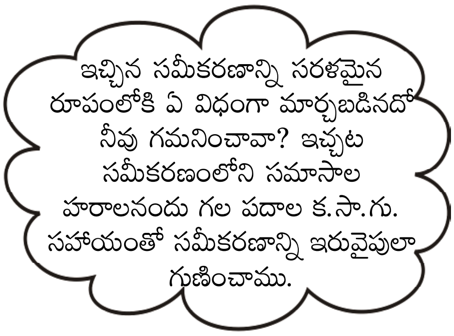
లేదా $14 = 5x + \frac{3}{2}$

లేదా $14 - \frac{3}{2} = 5x$ ($\frac{3}{2}$ ను పక్షాంతరం చెందించగా)

లేదా $\frac{28-3}{2} = 5x$

లేదా $\frac{25}{2} = 5x$

లేదా $x = \frac{25}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{5 \times 5}{2 \times 5} = \frac{5}{2}$



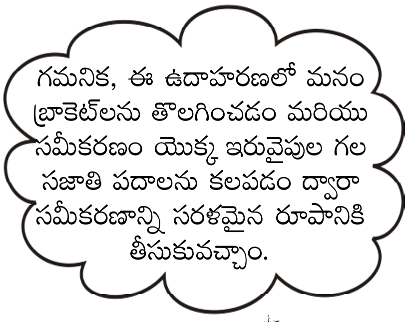
కనుక, కావలసిన సాధన $x = \frac{5}{2}$.

సరిచూచుట: $\text{LHS} = 5 \times \frac{5}{2} - 2\left(\frac{5}{2} \times 2 - 7\right)$

$$= \frac{25}{2} - 2(5-7) = \frac{25}{2} - 2(-2) = \frac{25}{2} + 4 = \frac{25+8}{2} = \frac{33}{2}$$

$$\text{RHS} = 2\left(\frac{5}{2} \times 3 - 1\right) + \frac{7}{2} = 2\left(\frac{15}{2} - \frac{2}{2}\right) + \frac{7}{2} = \frac{2 \times 13}{2} + \frac{7}{2}$$

$$= \frac{26+7}{2} = \frac{33}{2} = \text{LHS}.$$ (సరిపోయినది).



అభ్యాసం 2.5

క్రింది రేఖీయ సమీకరణాలను సాధించండి.

1. $\frac{x}{2} - \frac{1}{5} = \frac{x}{3} + \frac{1}{4}$ **2.** $\frac{n}{2} - \frac{3n}{4} + \frac{5n}{6} = 21$ **3.** $x + 7 - \frac{8x}{3} = \frac{17}{6} - \frac{5x}{2}$

4. $\frac{x-5}{3} = \frac{x-3}{5}$ **5.** $\frac{3t-2}{4} - \frac{2t+3}{3} = \frac{2}{3} - t$ **6.** $m - \frac{m-1}{2} = 1 - \frac{m-2}{3}$

Simplify and solve the following linear equations.

7. $3(t - 3) = 5(2t + 1)$ **8.** $15(y - 4) - 2(y - 9) + 5(y + 6) = 0$

9. $3(5z - 7) - 2(9z - 11) = 4(8z - 13) - 17$

10. $0.25(4f - 3) = 0.05(10f - 9)$

2.7 Equations Reducible to the Linear Form

Example 18: Solve $\frac{x+1}{2x+3} = \frac{3}{8}$

Solution: Observe that the equation is not a linear equation, since the expression on its LHS is not linear. But we can put it into the form of a linear equation. We multiply both sides of the equation by $(2x + 3)$,

$$\left(\frac{x+1}{2x+3}\right) \times (2x+3) = \frac{3}{8} \times (2x+3)$$

Note that $2x + 3 \neq 0$ (Why?)

Notice that $(2x + 3)$ gets cancelled on the LHS We have then,

$$x + 1 = \frac{3(2x+3)}{8}$$

We have now a linear equation which we know how to solve.
Multiplying both sides by 8

$$8(x + 1) = 3(2x + 3)$$

This step can be directly obtained by 'cross-multiplication' $\frac{x+1}{2x+3} \nearrow\!\!\!\!\nwarrow \frac{3}{8}$

or $8x + 8 = 6x + 9$

or $8x = 6x + 9 - 8$

or $8x = 6x + 1$

or $8x - 6x = 1$

or $2x = 1$

or $x = \frac{1}{2}$

The solution is $x = \frac{1}{2}$.

Check : Numerator of LHS $= \frac{1}{2} + 1 = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$

Denominator of LHS $= 2x + 3 = 2 \times \frac{1}{2} + 3 = 1 + 3 = 4$

4. $\frac{x-5}{3}=\frac{x-3}{5}$ 5. $\frac{3t-2}{4}-\frac{2t+3}{3}=\frac{2}{3}-t$ 6. $m-\frac{m-1}{2}=1-\frac{m-2}{3}$

కింది రేఖీయ సమీకరణాలను సూక్ష్మీకరించి సాధించండి.

7. $3(t-3) = 5(2t+1)$ 8. $15(y-4) -2(y-9) + 5(y+6) = 0$

9. $3(5z-7) - 2(9z-11) = 4(8z-13) - 17$

10. $0.25(4f-3) = 0.05(10f-9)$

2.7 రేఖీయ రూపంలోకి మార్చగలిగే సమీకరణాలు

ఉదాహరణ 18: సాధించుము $\frac{x+1}{2x+3}=\frac{3}{8}$

సాధన: ఈ సమీకరణం రేఖీయ సమీకరణం కాదు. ఎందుకంటే LHS వైపున ఉన్న సమాసం రేఖీయం కాదు. కానీ దీనిని రేఖీయ రూపంలోకి మార్చగలం. సమీకరణమును ఇరువైపులా $2x+3$చే గుణించగా.

$$\left(\frac{x+1}{2x+3}\right)\times(2x+3) = \frac{3}{8}\times(2x+3)$$

> గమనించండి
> $2x+3\neq 0$ (ఎందుకు?)

LHS వైపున $(2x+3)$ ను కొట్టివేయగా, అప్పుడు,

$$x+1=\frac{3(2x+3)}{8}$$

ఇప్పుడు మనకు సాధించుట తెలిసిన రేఖీయ సమీకరణం ఉంది.

ఇరు వైపులా 8చే గుణించగా

$$8(x+1) = 3(2x+3)$$

లేదా $8x + 8 = 6x + 9$

లేదా $8x = 6x + 9 - 8$

లేదా $8x = 6x + 1$

లేదా $8x - 6x = 1$

లేదా $2x = 1$

లేదా $x = \frac{1}{2}$

> అడ్డ గుణకారం చేయడం ద్వారా ఈ సోపానాన్ని మనం నేరుగా పొందగలం.
> $\frac{x+1}{2x+3} \nearrow\!\!\!\!\swarrow \frac{3}{8}$

సాధన $x=\frac{1}{2}$.

సరిచూచుట: LHS యొక్క లవం $=\frac{1}{2}+1=\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}$

LHS యొక్క హారం $= 2x+3 = 2\times\frac{1}{2}+3 = 1+3 = 4$

LHS = numerator ÷ denominator = $\frac{3}{2} \div 4 = \frac{3}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$

LHS = RHS.

Example 19: Present ages of Anu and Raj are in the ratio 4:5. Eight years from now the ratio of their ages will be 5:6. Find their present ages.

Solution: Let the present ages of Anu and Raj be $4x$ years and $5x$ years respectively.

After eight years. Anu's age = $(4x + 8)$ years;

After eight years, Raj's age = $(5x + 8)$ years.

Therefore, the ratio of their ages after eight years = $\frac{4x+8}{5x+8}$

This is given to be 5 : 6

Therefore, $\frac{4x+8}{5x+8} = \frac{5}{6}$

Cross-multiplication gives $6(4x + 8) = 5(5x + 8)$

or $24x + 48 = 25x + 40$

or $24x + 48 - 40 = 25x$

or $24x + 8 = 25x$

or $8 = 25x - 24x$

or $8 = x$

Therefore, Anu's present age = $4x = 4 \times 8 = 32$ years

Raj's present age = $5x = 5 \times 8 = 40$ years

EXERCISE 2.6

Solve the following equations.

1. $\frac{8x-3}{3x} = 2$
2. $\frac{9x}{7-6x} = 15$
3. $\frac{z}{z+15} = \frac{4}{9}$
4. $\frac{3y+4}{2-6y} = \frac{-2}{5}$
5. $\frac{7y+4}{y+2} = \frac{-4}{3}$
6. The ages of Hari and Harry are in the ratio 5:7. Four years from now the ratio of their ages will be 3:4. Find their present ages.
7. The denominator of a rational number is greater than its numerator by 8. If the numerator is increased by 17 and the denominator is decreased by 1, the number obtained is $\frac{3}{2}$. Find the rational number.

LHS = లవము ÷ హారము = $\frac{3}{2} \div 4 = \frac{3}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$

LHS = RHS.

ఉదాహరణ 19: అను మరియు రాజ్‌ల ప్రస్తుత వయస్సులు 4:5 నిష్పత్తిలో ఉన్నాయి. 8 సంవత్సరాల తర్వాత వారి వయస్సుల నిష్పత్తి 5:6 అయిన వారి ప్రస్తుత వయస్సులు కనుగొనండి.

సాధన: అను మరియు రాజ్‌ల ప్రస్తుత వయస్సులు వరుసగా $4x$ సం॥ మరియు $5x$ సం॥ అనుకుందాం.

8 సంవత్సరాల తర్వాత అను వయస్సు = $(4x + 8)$ సంవత్సరాలు

8 సంవత్సరాల తర్వాత రాజ్ వయస్సు = $(5x + 8)$ సంవత్సరాలు

8 సంవత్సరాల తర్వాత వారి వయస్సుల నిష్పత్తి $= \frac{4x+8}{5x+8}$ ఇది $5:6$ అని ఇవ్వబడింది.

కావున $\frac{4x+8}{5x+8} = \frac{5}{6}$

అడ్డ గుణకారం చేయగా $6(4x + 8) = 5(5x + 8)$

లేదా $24x + 48 = 25x + 40$

లేదా $24x + 48 - 40 = 25x$

లేదా $24x + 8 = 25x$

లేదా $8 = 25x - 24x$

లేదా $8 = x$

కావున, అను ప్రస్తుత వయస్సు = $4x = 4 \times 8 = 32$ సంవత్సరాలు

రాజ్ ప్రస్తుత వయస్సు = $5x = 5 \times 8 = 40$ సంవత్సరాలు

అభ్యాసం 2.6

క్రింది సమీకరణాలు సాధించండి.

1. $\frac{8x-3}{3x} = 2$ **2.** $\frac{9x}{7-6x} = 15$ **3.** $\frac{z}{z+15} = \frac{4}{9}$

4. $\frac{3y+4}{2-6y} = \frac{-2}{5}$ **5.** $\frac{7y+4}{y+2} = \frac{-4}{3}$

6. హరి మరియు హ్యారీ ల వయస్సులు 5:7 నిష్పత్తిలో ఉన్నాయి. నాలుగు సంవత్సరాల తర్వాత వారి వయస్సుల నిష్పత్తి 3:4. వారి ప్రస్తుత వయస్సులు కనుగొనండి.

7. ఒక అకరణీయ సంఖ్య యొక్క హారము దాని లవం కంటే 8 ఎక్కువ. లవాన్ని 17 ఎక్కువ చేసి, హారాన్ని 1 తగ్గించిన వచ్చే సంఖ్య $\frac{3}{2}$ అయితే ఆ అకరణీయ సంఖ్యను కనుగొనండి.

WHAT HAVE WE DISCUSSED?

1. An algebraic equation is an equality involving variables. It says that the value of the expression on one side of the equality sign is equal to the value of the expression on the other side.
2. The equations we study in Classes VI, VII and VIII are linear equations in one variable. In such equations, the expressions which form the equation contain only one variable. Further, the equations are linear, i.e., the highest power of the variable appearing in the equation is 1.
3. A linear equation may have for its solution any rational number.
4. An equation may have linear expressions on both sides. Equations that we studied in Classes VI and VII had just a number on one side of the equation.
5. Just as numbers, variables can, also, be transposed from one side of the equation to the other.
6. Occasionally, the expressions forming equations have to be simplified before we can solve them by usual methods. Some equations may not even be linear to begin with, but they can be brought to a linear form by multiplying both sides of the equation by a suitable expression.
7. The utility of linear equations is in their diverse applications; different problems on numbers, ages, perimeters, combination of currency notes, and so on can be solved using linear equations.

మనం ఏమి చర్చించుకున్నాం?

1. చరరాశులతో కూడిన సమానత్వమే బీజీయ సమీకరణం. ఒక వైపున గల సమాసం యొక్క విలువ, మరోవైపున గల సమాసం యొక్క విలువకు సమానం అనే విషయాన్ని ఇది తెలియచేస్తుంది.
2. 6, 7, 8 తరగతులలో మనం నేర్చుకున్నవి ఏక చరరాశిలో రేఖీయసమీకరణాలు. ఇటువంటి సమీకరణాలలో సమీకరణాన్ని ఏర్పరచే సమాసాలు ఒక చరరాశిని మాత్రమే కలిగి ఉంటాయి. అంతే గాక ఈ సమీకరణాలు రేఖీయాలు, అంటే సమీకరణంలోని చరరాశి యొక్క గరిష్ట ఘాతాంకం '1'.
3. ఒక రేఖీయ సమీకరణం యొక్క సాధన ఏ అకరణీయ సంఖ్య అయినా కావచ్చు.
4. సమీకరణంలో రెండు వైపులా రేఖీయ సమాసం ఉండవచ్చు. ఒక వైపున సంఖ్య మాత్రమే ఉన్న సమీకరణాలను మనం 6, 7 తరగతులలో నేర్చుకున్నాం.
5. సంఖ్యల లాగానే చరరాశులు కూడా సమీకరణాలలో ఒక వైపు నుంచి మరోవైపుకు పక్షాంతరం చెందుతాయి.
6. తరచుగా, సమాసములతో ఏర్పడు సమీకరణములను సాధారణ పద్ధతులలో సాధించుటకు ముందుగా, వాటిని సూక్ష్మీకరించవలెను. కొన్ని సమీకరణములు మొదట్లో రేఖీయం కానప్పటికి, ఆ సమీకరణాలను రెండు వైపులా తగిన సమాసంతో గుణించటం ద్వారా, రేఖీయ రూపంలోకి తేవచ్చును.
7. రేఖీయ సమీకరణాల యొక్క ఉపయోగం విభిన్న సందర్భాలలో ఉంటుంది. సంఖ్యలు, వయస్సులు, చుట్టుకొలత, రకరకాల నగదు సంయోగాలు మొదలైన వివిధ సమస్యలను రేఖీయ సమీకరణాలను ఉపయోగించి సాధించవచ్చు.

Understanding Quadrilaterals

CHAPTER 3

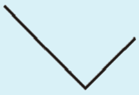
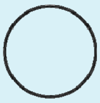
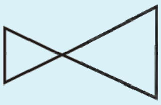
0852CH03

3.1 Introduction

You know that the paper is a model for a **plane surface**. When you join a number of points without lifting a pencil from the paper (and without retracing any portion of the drawing other than single points), you get a **plane curve**.

Try to recall different varieties of curves you have seen in the earlier classes.

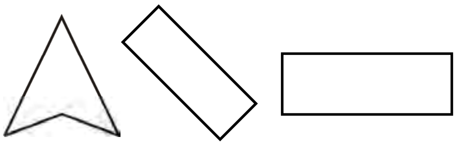
Match the following: (Caution! A figure may match to more than one type).

Figure	Type
(1) 	(a) Simple closed curve
(2)	(b) A closed curve that is not simple
(3) 	(c) Simple curve that is not closed
(4) 	(d) Not a simple curve

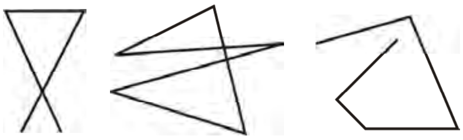
Compare your matchings with those of your friends. Do they agree?

3.2 Polygons

A simple closed curve made up of only line segments is called a **polygon**.



Curves that are polygons



Curves that are not polygons

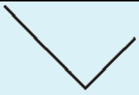
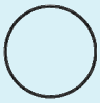
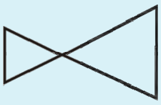
చతుర్భుజాలను అవగాహన చేసుకోవడం

అధ్యాయం
3

X7T7P6

3.1 పరిచయం

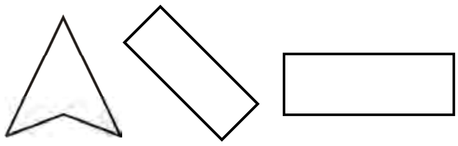
కాగితం అనేది **సమతలమునకు** ఒక నమూనా అని మీకు తెలుసు. ఒక కాగితంపై పెన్సిల్‌ను ఎత్తకుండా (ఆ పటంలో ఏ రేఖయినా తిరిగి అదే రేఖపై గీయకుండా ఒకే బిందువు వద్ద ఖండించబడే విధంగా) గీయబడే పటం ఒక **సమతల వక్రరేఖ** అవుతుంది.
క్రింది తరగతులలో మీరు చూసిన వివిధ రకాల వక్రరేఖలను జ్ఞాపకం చేసుకోవడానికి ప్రయత్నించండి క్రింది వాటిని జతపరచండి: (గమనిక! ఒక పటం ఒకటి కంటే ఎక్కువ రకాలతో జతపరచవచ్చును).

పటం	రకం
(1) 	(a) సరళ సంవృత వక్రం
(2)	(b) సరళం కాని సంవృత వక్రం
(3) 	(c) సంవృతం కాని సరళ వక్రం
(4) 	(d) సరళ వక్రం కాదు

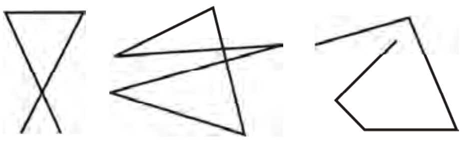
మీ స్నేహితుల జవాబులతో మీ జవాబులు పోల్చి చూడండి. ఒకే విధంగా ఉన్నాయని వారు అంగీకరించారా?

3.2 బహుభుజులు

రేఖా ఖండాలచే ఏర్పడిన సరళ సంవృత పటాన్ని **బహుభుజి** అని అంటారు.



బహుభుజులైన వక్రాలు

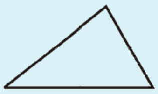
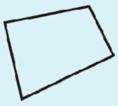
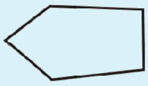
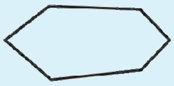
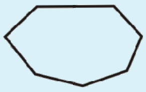
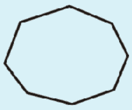
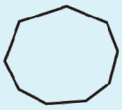
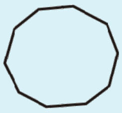


బహుభుజులు కాని వక్రాలు

Try to give a few more examples and non-examples for a polygon.
Draw a rough figure of a polygon and identify its sides and vertices.

3.2.1 Classification of polygons

We classify polygons according to the number of sides (or vertices) they have.

Number of sides or vertices	Classification	Sample figure
3	Triangle	
4	Quadrilateral	
5	Pentagon	
6	Hexagon	
7	Heptagon	
8	Octagon	
9	Nonagon	
10	Decagon	
⋮	⋮	⋮
n	n-gon	

3.2.2 Diagonals

A diagonal is a line segment connecting two non-consecutive vertices of a polygon (Fig 3.1).

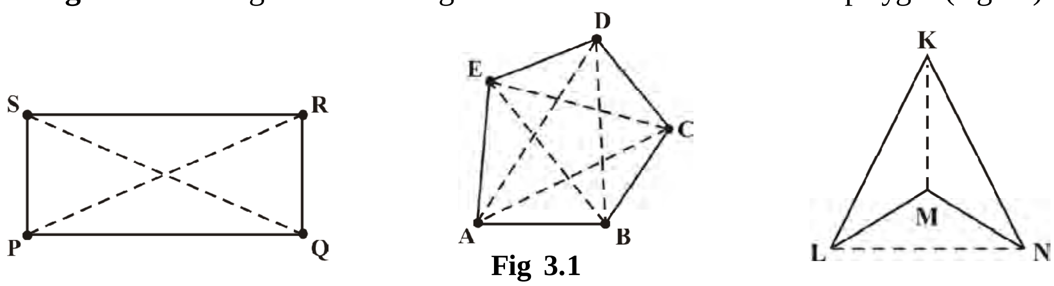
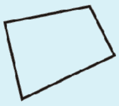
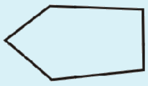
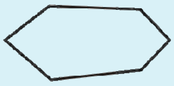
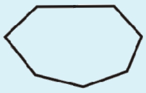
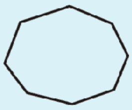
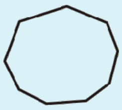
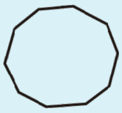


Fig 3.1

బహుభుజికి కొన్ని ఉదాహరణలు మరియు ఉదాహరణలు కాని వాటిని ఇవ్వడానికి ప్రయత్నించండి.
ఒక బహుభుజి చిత్తుపటాన్ని గీచి దాని భుజాలను, శీర్షాలను గుర్తించండి.

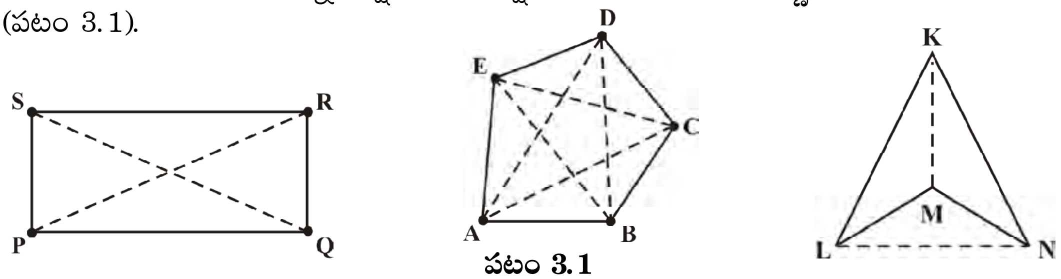
3.2.1 బహుభుజుల వర్గీకరణ

మనం బహుభుజులను అవి కల్గి ఉన్న భుజాలు (లేదా శీర్షాలు) సంఖ్యను ఆధారంగా వర్గీకరిస్తాం.

భుజాల సంఖ్య లేదా శీర్షాల సంఖ్య	వర్గీకరణ	నమూన పటం
3	త్రిభుజం	
4	చతుర్భుజం	
5	పంచ భుజి	
6	షడ్భుజి	
7	సప్త భుజి	
8	అష్ట భుజి	
9	నవ భుజి	
10	దశ భుజి	
⋮	⋮	⋮
n	n-భుజి	

3.2.2 కర్ణములు

ఒక బహుభుజిలో రెండు ఆసన్న శీర్షాలు కాని శీర్షాలను కలిపే రేఖాఖండం **కర్ణం** అవుతుంది (పటం 3.1).

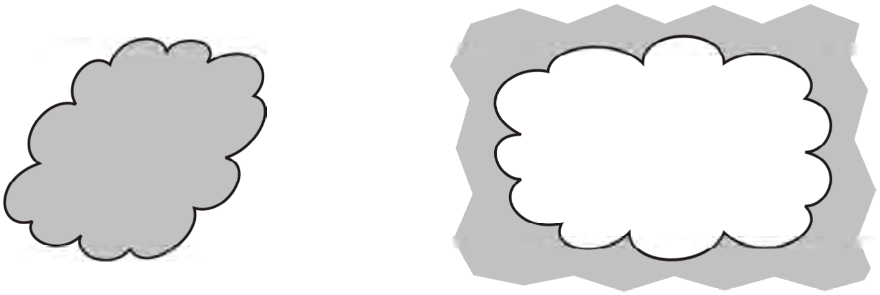


పటం 3.1

Can you name the diagonals in each of the above figures? (Fig 3.1)

Is $\overline{PQ}$ a diagonal? What about $\overline{LN}$?

You already know what we mean by **interior** and **exterior** of a closed curve (Fig 3.2).

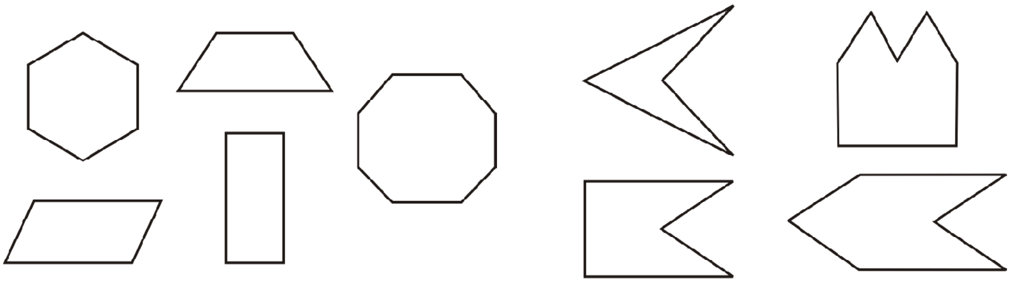


Interior **Fig 3.2** **Exterior**

The interior has a boundary. Does the exterior have a boundary? Discuss with your friends.

3.2.3 Convex and concave polygons

Here are some convex polygons and some concave polygons. (Fig 3.3)



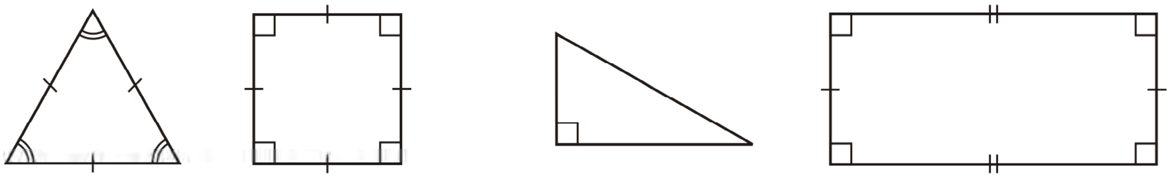
Convex polygons **Fig 3.3** **Concave polygons**

Can you find how these types of polygons differ from one another? Polygons that are convex have no portions of their diagonals in their exteriors or any line segment joining any two different points, in the interior of the polygon, lies wholly in the interior of it . Is this true with concave polygons? Study the figures given. Then try to describe in your own words what we mean by a convex polygon and what we mean by a concave polygon. Give two rough sketches of each kind.

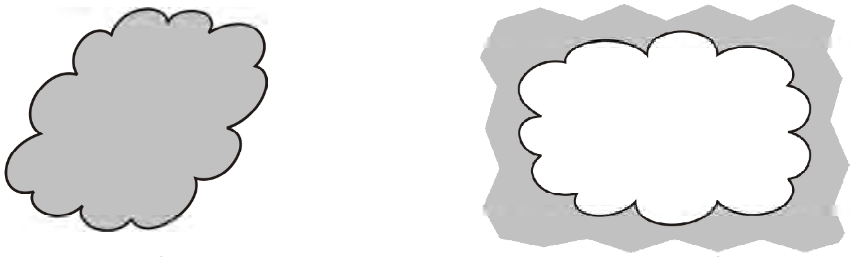
In our work in this class, we will be dealing with convex polygons only.

3.2.4 Regular and irregular polygons

A regular polygon is both 'equiangular' and 'equilateral'. For example, a square has sides of equal length and angles of equal measure. Hence it is a regular polygon. A rectangle is equiangular but not equilateral. Is a rectangle a regular polygon? Is an equilateral triangle a regular polygon? Why?



పై పటాలలో కర్ణాల పేర్లు చెప్పగలరా? (పటం 3.1) $\overline{PQ}$ అనేది ఒక కర్ణం అవుతుందా? $\overline{LN}$ గురించి ఏమి చెప్పగలవు?
ఒక సంవృత పటం యొక్క **అంతర, బాహ్య** ప్రదేశాలంటే ఏమిటో మీకు ఇంతకు ముందే తెలుసు (పటం 3.2).

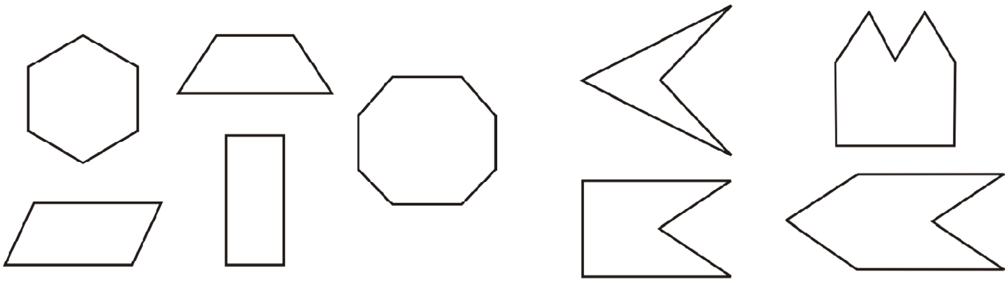


అంతర ప్రదేశం   **పటం 3.2**   **బాహ్య ప్రదేశం**

అంతర ప్రదేశం ఒక సరిహద్దును కల్గి ఉంటుంది. బాహ్య ప్రదేశం సరిహద్దును కల్గి ఉంటుందా? మీ స్నేహితులతో చర్చించండి.

3.2.3. కుంభాకార మరియు పుటాకార బహుభుజులు

ఇక్కడ కొన్ని కుంభాకార మరియు పుటాకార బహుభుజులు ఉన్నాయి. (పటం 3.3)

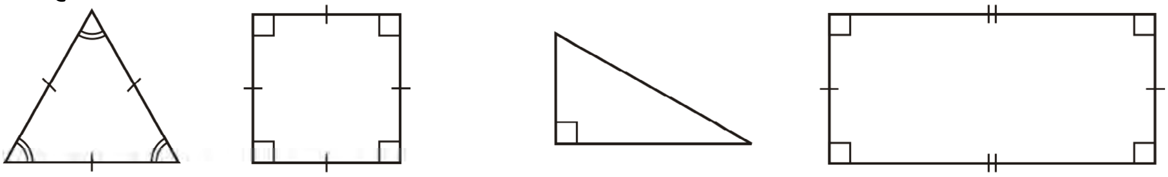


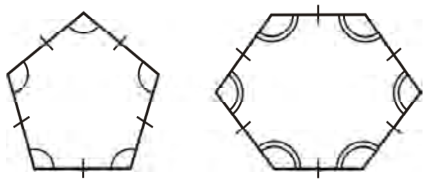
కుంభాకార బహుభుజులు   **పటం 3.3**   **పుటాకార బహుభుజులు**

పై బహుభుజులు ఒక దానికి ఒకటి ఏ విధంగా విభిన్నమైనవో మీరు గుర్తించగలరా? కుంభాకార బహుభుజుల కర్ణాల యొక్క ఏ భాగమైన బహుభుజి బాహ్య ప్రదేశంలో ఉండవు లేదా అంతర ప్రదేశంలో ఉన్న ఏ రెండు వేర్వేరు బిందువులను కలిపినను వచ్చే రేఖా ఖండం పూర్తిగా ఆ బహుభుజి యొక్క అంతరంలోనే ఉండును. పుటాకార బహుభుజుల విషయంలో ఇది నిజమవుతుందా? పై పటాలను పరిశీలించండి. కుంభాకార, పుటాకార బహుభుజులను మీ సొంత మాటలతో వివరించండి. ప్రతి రకానికి చెందిన రెండు చిత్తు పటాలను గీయండి.
ఈ తరగతిలో మనం కుంభాకార బహుభుజుల గురించి మాత్రమే నేర్చుకుంటాము.

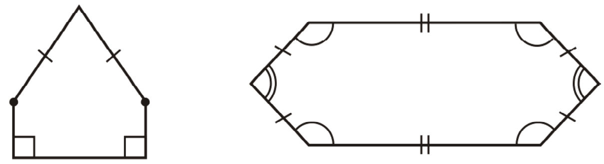
3.2.4 క్రమ మరియు క్రమేతర బహుభుజులు

ఒక బహుభుజిలో అన్ని భుజాలు సమానంగాను మరియు అన్ని కోణాలు సమానంగా ఉంటే దానిని **క్రమ బహుభుజి** అని అంటారు. ఉదాహరణకు చతురస్రంలో అన్ని భుజాలు సమానం మరియు అన్ని కోణాలు సమానం కనుక అది క్రమ బహుభుజి అవుతుంది. దీర్ఘ చతురస్రంలో అన్ని కోణాలు సమానంగా ఉన్నప్పటికీ అన్ని భుజాలు సమానం కావు. దీర్ఘ చతురస్రం క్రమ బహుభుజి అవుతుందా? సమబాహు త్రిభుజం క్రమ బహుభుజి అవుతుందా? ఎందుకు?





Regular polygons



Polygons that are not regular

[**Note:** Use of or indicates segments of equal length].

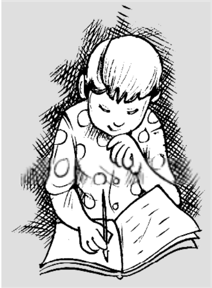
In the previous classes, have you come across any quadrilateral that is equilateral but not equiangular? Recall the quadrilateral shapes you saw in earlier classes – Rectangle, Square, Rhombus etc.

Is there a triangle that is equilateral but not equiangular?

3.2.5 Angle sum property

Do you remember the angle-sum property of a triangle? The sum of the measures of the three angles of a triangle is 180°. Recall the methods by which we tried to visualise this fact. We now extend these ideas to a quadrilateral.

DO THIS



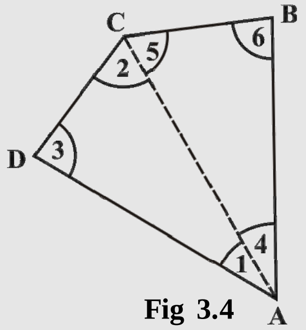


Fig 3.4

1. Take any quadrilateral, say ABCD (Fig 3.4). Divide it into two triangles, by drawing a diagonal. You get six angles 1, 2, 3, 4, 5 and 6.

   Use the angle-sum property of a triangle and argue how the sum of the measures of $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ and $\angle D$ amounts to 180° + 180° = 360°.

2. Take four congruent card-board copies of any quadrilateral ABCD, with angles as shown [Fig 3.5 (i)]. Arrange the copies as shown in the figure, where angles $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$ meet at a point [Fig 3.5 (ii)].

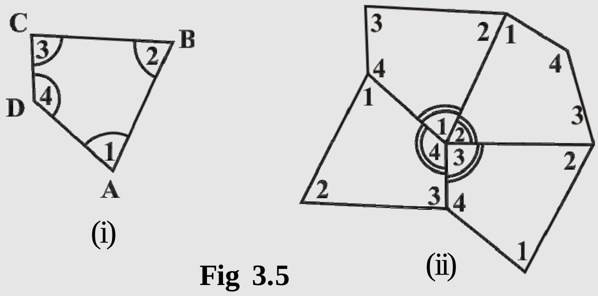


Fig 3.5

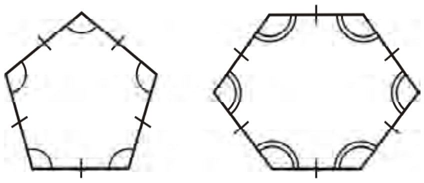
For doing this you may have to turn and match appropriate corners so that they fit.

What can you say about the sum of the angles $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ and $\angle 4$?

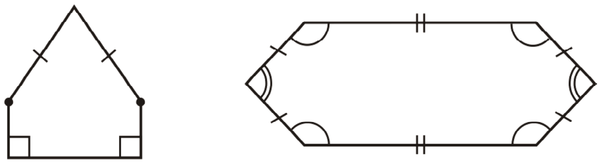
[**Note:** We denote the angles by $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$, etc., and their respective measures by $m\angle 1$, $m\angle 2$, $m\angle 3$, etc.]

The sum of the measures of the four angles of a quadrilateral is___________.

You may arrive at this result in several other ways also.



క్రమ బహుభుజులు



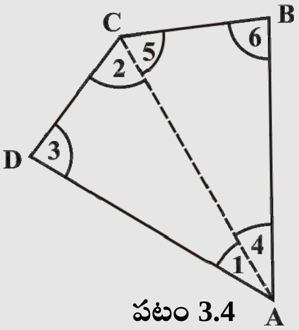
క్రమేతర బహుభుజులు

[గమనిక: లేదా ఇవి భుజాలు సమాన పొడవులు కల్గి ఉన్నాయని సూచిస్తాయి].
క్రింది తరగతులలో అన్నీ సమాన భుజాలు కలిగి ఉండి, సమాన కోణాలు లేని చతుర్భుజం మీరు గమనించారా? క్రింది తరగతులలో చతుర్భుజాల ఆకారాలను గుర్తు తెచ్చుకోండి. దీర్ఘచతురస్రం, చతురస్రం, సమచతుర్భుజం మొదలైనవి.
సమాన భుజాలు కల్గి ఉండి, సమాన కోణాలు కల్గి ఉండని త్రిభుజం ఉంటుందా?

3.2.5 కోణాల మొత్తం ధర్మం

మీకు త్రిభుజంలో కోణాల మొత్తం ధర్మం జ్ఞాపకమున్నదా? త్రిభుజంలో మూడు అంతర కోణాల మొత్తం 180^0 ఉంటుంది. ఈ నిజాన్ని నిరూపించడానికి దృశ్యీకరించిన పద్ధతులను గుర్తు చేసుకోండి. ఈ పద్ధతులను ఇప్పుడు మనం చతుర్భుజానికి విస్తరిస్తున్నాము.

ఇవి చేయండి

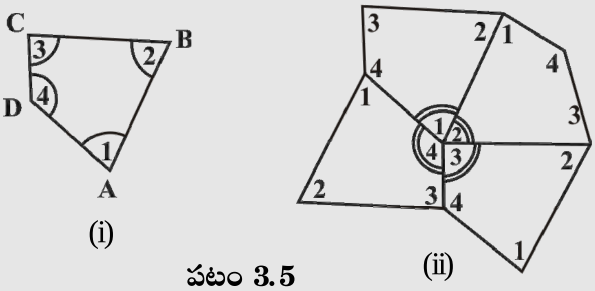


పటం 3.4

1. ఏదైనా చతుర్భుజంABCDను తీసుకోండి (పటం 3.4) కర్ణం గీయడం ద్వారా దానిని రెండు త్రిభుజాలుగా విభజించండి. మీకు ఆరు కోణాలు 1,2,3,4,5 మరియు 6లు లభిస్తాయి.

   త్రిభుజాల యొక్క కోణాల మొత్తం ధర్మం ఉపయోగించి $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ మరియు $\angle D$ కోణాల మొత్తం $180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$ ఎందుకు అవుతుందో చర్చించండి.

2. పటం 3.5(i) చూపిన కోణాలతో ABCD చతుర్భుజానికి సర్వసమానమైన 4 అట్ట ముక్కలను తీసుకోండి. $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$ లు ఒకే బిందువు వద్ద కలుసుకొనే విధంగా ఆ సర్వసమాన చతుర్భుజాలను (పటం 3.5(ii)) లో చూపించిన విధంగా అమర్చండి.



పటం 3.5

పటం ఈ విధంగా రావడానికి, మీరు పటాలను త్రిప్పుతూ సరైన మూలలు జత చేస్తే ఈ అమరిక వస్తుంది.

$\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ మరియు $\angle 4$ కోణాల గురించి మీరు ఏమి చెప్తారు?
[గమనిక : మనం కోణాలను $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ మొదలగు వానితో సూచిస్తాము. ఆ కోణముల యొక్క వరుస కొలతలను $m\angle 1$, $m\angle 2$, $m\angle 3$ మొదలగు వానితో సూచిస్తాము.]
ఒక చతుర్భుజంలో నాలుగు కోణాల మొత్తం __________.
మీరు పై ఫలితాన్ని ఇంకా అనేక విధాలుగా కూడా పొందవచ్చును.

3. As before consider quadrilateral ABCD (Fig 3.6). Let P be any point in its interior. Join P to vertices A, B, C and D. In the figure, consider ΔPAB. From this we see $x = 180° - m\angle 2 - m\angle 3$; similarly from ΔPBC, $y = 180° - m\angle 4 - m\angle 5$, from ΔPCD, $z = 180° - m\angle 6 - m\angle 7$ and from ΔPDA, $w = 180° - m\angle 8 - m\angle 1$. Use this to find the total measure $m\angle 1 + m\angle 2 + ... + m\angle 8$, does it help you to arrive at the result? Remember $\angle x + \angle y + \angle z + \angle w = 360°$.

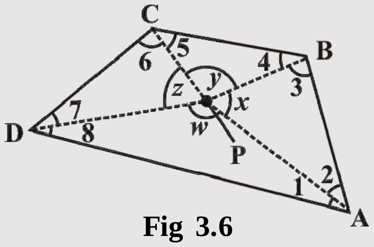


Fig 3.6

4. These quadrilaterals were convex. What would happen if the quadrilateral is not convex? Consider quadrilateral ABCD. Split it into two triangles and find the sum of the interior angles (Fig 3.7).

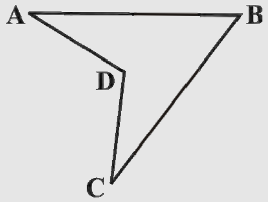
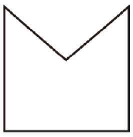
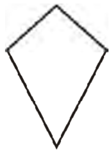


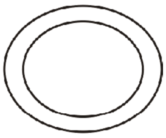
Fig 3.7

EXERCISE 3.1

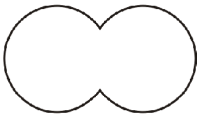
1. Given here are some figures.

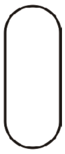

(1)


(2)


(3)

(4)


(5)


(6)

(7)

(8)

Classify each of them on the basis of the following.

(a) Simple curve (b) Simple closed curve (c) Polygon

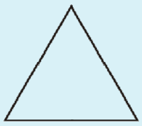
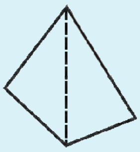
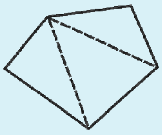
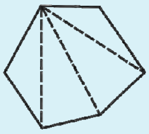
(d) Convex polygon (e) Concave polygon

2. How many diagonals does each of the following have?

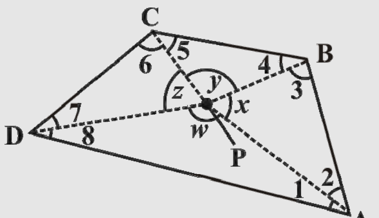
(a) A convex quadrilateral (b) A regular hexagon (c) A triangle

3. What is the sum of the measures of the angles of a convex quadrilateral? Will this property hold if the quadrilateral is not convex? (Make a non-convex quadrilateral and try!)

4. Examine the table. (Each figure is divided into triangles and the sum of the angles deduced from that.)

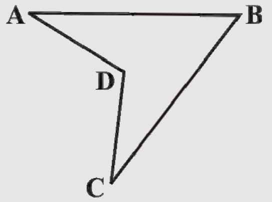
Figure				
Side	3	4	5	6
Angle sum	180°	$2 \times 180°$ $= (4 - 2) \times 180°$	$3 \times 180°$ $= (5 - 2) \times 180°$	$4 \times 180°$ $= (6 - 2) \times 180°$

3. ఇంతకు ముందు వలె చతుర్భుజం ABCD ను (పటం 3.6) తీసుకోండి. దాని అంతరంలో ఒక బిందువు P తీసుకొనండి. P బిందువును A,B,C,D శీర్షాలకు కలుపుము. పటం నుండి ΔPAB ను తీసుకోండి. దీని నుండి $x = 180° - m\angle 2 - m\angle 3$; అదే విధంగా ΔPBC, $y = 180° - m\angle 4 - m\angle 5$, ΔPCD నుండి $z = 180° - m\angle 6 - m\angle 7$ మరియు ΔPDA నుండి $w = 180° - m\angle 8 - m\angle 1$. వీటని $m\angle 1 + m\angle 2 + ... + m\angle 8$ ను కనుగొనడానికి ఉపయోగించండి. ఇది మనకు కావలసిన ఫలితం పొందడానికి సహాయపడుతుందా? ఇక్కడ $\angle x + \angle y + \angle z + \angle w = 360°$ అని గుర్తుచేసుకోండి.



పటం 3.6

4. ఈ చతుర్భుజాలు కుంభాకార బహుభుజులుగా ఉన్నాయి. చతుర్భుజం కుంభాకార బహుభుజి కాని సందర్భంలో ఏమి జరగవచ్చును. చతుర్భుజం ABCD ను తీసుకోండి. దానిని రెండు త్రిభుజాలుగా విభజించి తరువాత అంతర కోణాల మొత్తాన్ని కనుగొనండి (పటం 3.7).



పటం 3.7

అభ్యాసం 3.1

1. ఇక్కడ కొన్ని పటాలు ఇవ్వబడినవి.

(1) (2) (3) (4)

(5) (6) (7) (8)

క్రింది వాటి ఆధారంగా పై పటాలను వర్గీకరించండి

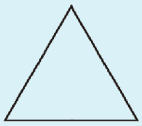
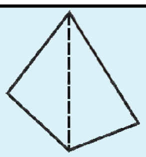
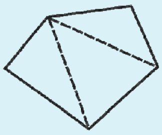
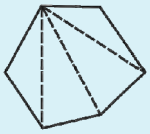
(a) సరళ వక్రరేఖ (b) సరళ సంవృత వక్రరేఖ (c) బహుభుజి
(d) కుంభాకార బహుభుజి (e) పుటాకార బహుభుజి

2. క్రింది ప్రతి పటం ఎన్ని కర్ణాలు కల్గి ఉంటుంది?

(a) ఒక కుంభాకార చతుర్భుజం (b) ఒక క్రమ షడ్భుజి (c) ఒక త్రిభుజం

3. ఒక కుంభాకార చతుర్భుజం యొక్క అంతర కోణాల మొత్తం ఎంత? ఈ ధర్మం కుంభాకార చతుర్భుజం కాని వాటికి కూడా వర్తిస్తుందా? (ఒక కుంభాకారం కాని చతుర్భుజం గీచి ప్రయత్నించండి!)

4. క్రింది పట్టికను పరిశీలించండి (ప్రతి పటాన్ని త్రిభుజాలుగా విభజించండి, దాని నుండి అంతర కోణాల మొత్తం రాబట్టండి.)

పటం				
భుజం	3	4	5	6
కోణాలమొత్తం	180°	$2 \times 180°$ $= (4-2) \times 180°$	$3 \times 180°$ $= (5-2) \times 180°$	$4 \times 180°$ $= (6-2) \times 180°$

What can you say about the angle sum of a convex polygon with number of sides?

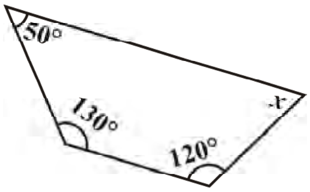
(a) 7 (b) 8 (c) 10 (d) n

5. What is a regular polygon?

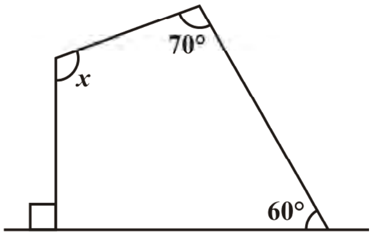
State the name of a regular polygon of

(i) 3 sides (ii) 4 sides (iii) 6 sides

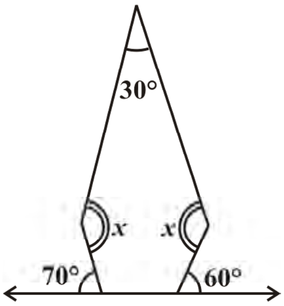
6. Find the angle measure x in the following figures.



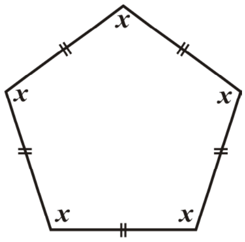
(a)



(b)

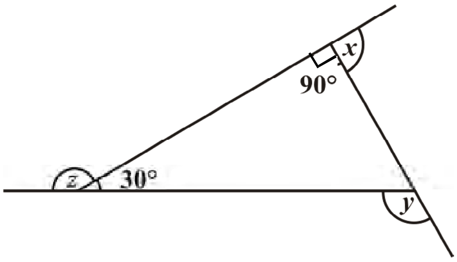


(c)

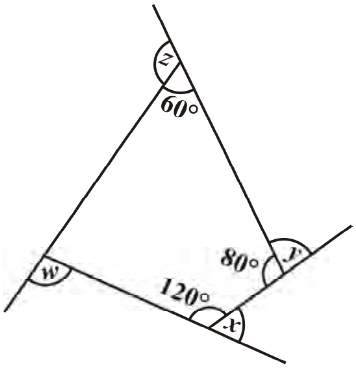


(d)

7.



(a) Find $x + y + z$



(b) Find $x + y + z + w$

3.3 Sum of the Measures of the Exterior Angles of a Polygon

On many occasions a knowledge of exterior angles may throw light on the nature of interior angles and sides.

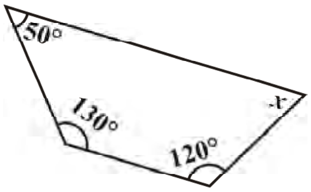
క్రింది ఇచ్చిన సంఖ్యలు భుజాలుగా కల్గిన కుంభాకార బహుభుజి యొక్క అంతర కోణాలమొత్తం గురించి నీవు ఏమి చెప్పగలవు?

(a) 7 (b) 8 (c) 10 (d) n

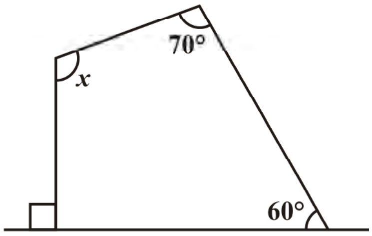
5. క్రమ బహుభుజి అనగా నేమి?
క్రింది సంఖ్యల భుజాలుగా కల్గిన క్రమ బహుభుజుల యొక్క పేర్లు తెలపండి.

(i) 3 భుజాలు (ii) 4 భుజాలు (iii) 6 భుజాలు

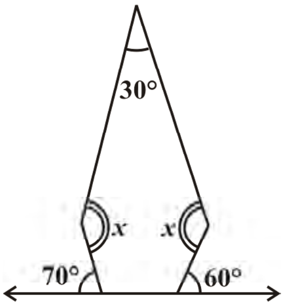
6. క్రింది పటాల నుండి కోణం యొక్క కొలత x ను కనుగొనండి.



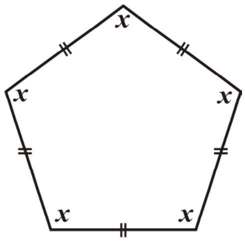
(a)



(b)

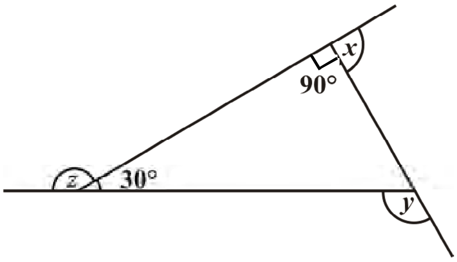


(c)

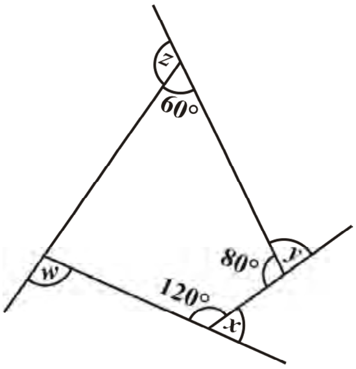


(d)

7.



(a) $x + y + z$ కనుగొనండి.



(b) $x + y + z + w$ కనుగొనండి.

3.3 ఒక బహుభుజి యొక్క బాహ్య కోణాల మొత్తం

అనేక సందర్భాలలో బాహ్యకోణాల పరిజ్ఞానం అనేది అంతర కోణాలు మరియు భుజాల యొక్క స్వభావంతో వెలుగులోనికి వస్తుంది.

DO THIS

Draw a polygon on the floor, using a piece of chalk. (In the figure, a pentagon ABCDE is shown) (Fig 3.8).

We want to know the total measure of angles, i.e, $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 4 + m\angle 5$. Start at A. Walk along $\overline{AB}$. On reaching B, you need to turn through an angle of $m\angle 1$, to walk along $\overline{BC}$. When you reach at C, you need to turn through an angle of $m\angle 2$ to walk along $\overline{CD}$. You continue to move in this manner, until you return to side AB. You would have in fact made one complete turn.

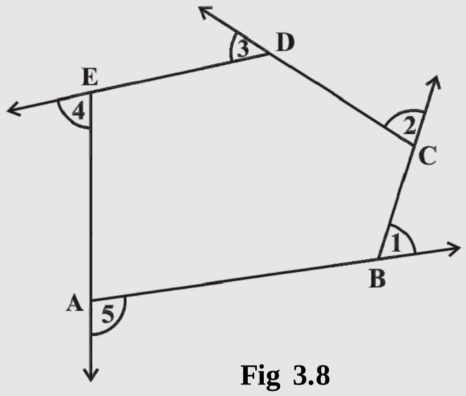


Fig 3.8

Therefore, $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 4 + m\angle 5 = 360°$

This is true whatever be the number of sides of the polygon.

Therefore, *the sum of the measures of the external angles of any polygon is 360°.*

Example 1: Find measure x in Fig 3.9.

Solution: $x + 90° + 50° + 110° = 360°$ (Why?)

$x + 250° = 360°$

$x = 110°$

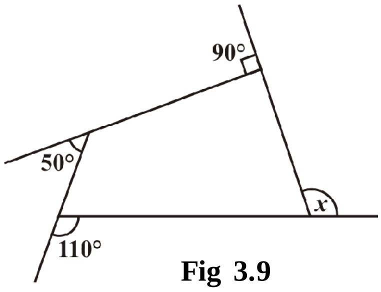


Fig 3.9

TRY THESE

Take a regular hexagon Fig 3.10.

1. What is the sum of the measures of its exterior angles x, y, z, p, q, r?
2. Is $x = y = z = p = q = r$? Why?
3. What is the measure of each?
   (i) exterior angle (ii) interior angle
4. Repeat this activity for the cases of
   (i) a regular octagon (ii) a regular 20-gon

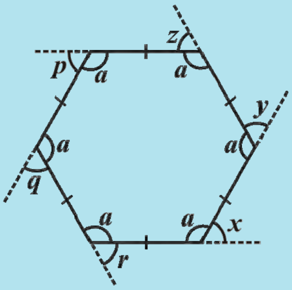


Fig 3.10

Example 2: Find the number of sides of a regular polygon whose each exterior angle has a measure of 45°.

Solution: Total measure of all exterior angles = 360°

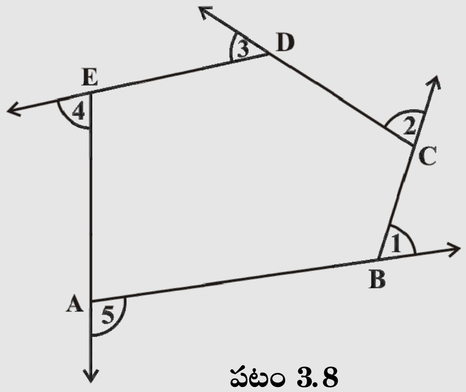
Measure of each exterior angle = 45°

Therefore, the number of exterior angles $= \frac{360}{45} = 8$

The polygon has 8 sides.

ఇవి చేయండి

ఒక సుద్ద ముక్క సహాయంతో నేలపై ఒక బహుభుజిని గీయండి (పటంలో ABCDE అనే బహుభుజి చూపబడింది.) (పటం 3.8) మనం కోణాల మొత్తం తెలుసుకోవాలనుకుంటున్నాము. అనగా $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 4 + m\angle 5$. A నుండి ప్రారంభించి $\overline{AB}$ వైపు నడవండి. Bను చేరుకున్న తరువాత $\overline{BC}$ వైపు నడవడానికి మీరు $m\angle 1$ అంత కోణం తిరగాలి. మీరు Cను చేరుకున్న తరువాత $\overline{CD}$ వైపు నడవడానికి $m\angle 2$ అంత కోణం తిరగాలి. మీరు AB వైపు తిరిగే వరకు ఇదే విధంగా ముందుకు కొనసాగండి. మీరు ఇప్పుడు ఒక పూర్తి భ్రమణం పూర్తి చేశారు.



పటం 3.8

కాబట్టి, $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 4 + m\angle 5 = 360°$

బహుభుజి యొక్క భుజాల సంఖ్య ఎంత అయినప్పటికి ఇది సత్యం.

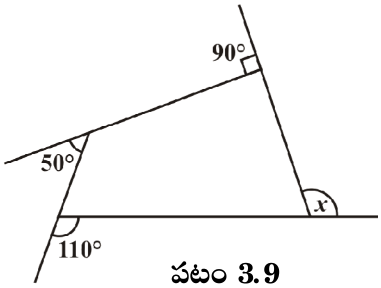
కావున, ***ఏ బహుభుజి యొక్క బాహ్యకోణాల మొత్తం అయిన 360°.***

ఉదాహరణ 1: పటం 3.9 లో x కొలతను కనుగొనండి.

సాధన: $x + 90° + 50° + 110° = 360°$ (ఎందుకు?)

$x + 250° = 360°$

$x = 110°$

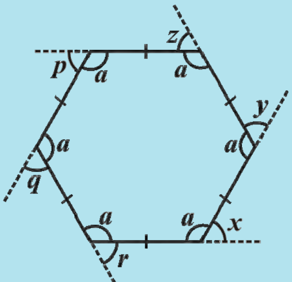


పటం 3.9

ప్రయత్నించండి

ఒక క్రమ షడ్భుజిని తీసుకొనండి (పటం 3.10)

1. క్రమ షడ్భుజి యొక్క బాహ్య కోణాలు x, y, z, p, q, r ల మొత్తం ఎంత?
2. $x = y = z = p = q = r$ అవుతుందా? ఎందుకు?
3. కింది ప్రతిదాని యొక్క కొలత ఎంత?
   (i) బాహ్యకోణం (ii) అంతరకోణం
4. ఈ కృత్యాన్ని కింది వాటితో చేయండి.
   (i) క్రమ అష్టభుజి (ii) 20 భుజాలు కలిగిన క్రమ బహుభుజి



పటం 3.10

ఉదాహరణ 2: ప్రతి బాహ్య కోణం 45° గా గల క్రమ బహుభుజి యొక్క భుజాల సంఖ్యను కనుగొనండి.

సాధన: బాహ్యకోణాల యొక్క మొత్తం కొలత = 360°

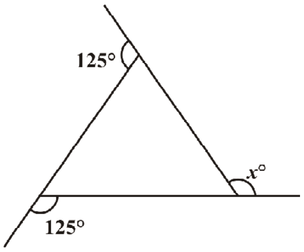
ప్రతి బాహ్యకోణం యొక్క కొలత = 45°

కావున బాహ్యకోణాల సంఖ్య $= \dfrac{360}{45} = 8$

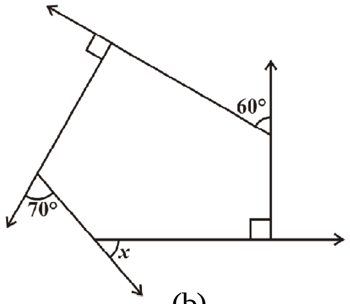
కావున బహుభుజి యొక్క భుజాల సంఖ్య 8.

EXERCISE 3.2

1. Find x in the following figures.



(a)



(b)

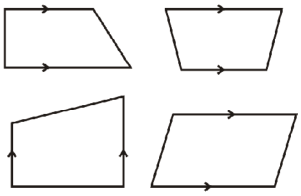
2. Find the measure of each exterior angle of a regular polygon of
   (i) 9 sides (ii) 15 sides
3. How many sides does a regular polygon have if the measure of an exterior angle is 24°?
4. How many sides does a regular polygon have if each of its interior angles is 165°?
5. (a) Is it possible to have a regular polygon with measure of each exterior angle as 22°?
   (b) Can it be an interior angle of a regular polygon? Why?
6. (a) What is the minimum interior angle possible for a regular polygon? Why?
   (b) What is the maximum exterior angle possible for a regular polygon?

3.4 Kinds of Quadrilaterals

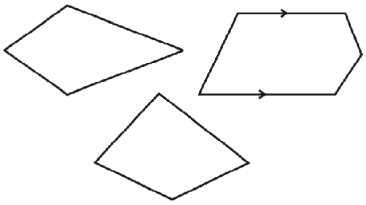
Based on the nature of the sides or angles of a quadrilateral, it gets special names.

3.4.1 Trapezium

Trapezium is a quadrilateral with a pair of parallel sides.



These are trapeziums



These are not trapeziums

Study the above figures and discuss with your friends why some of them are trapeziums while some are not. (**Note:** *The arrow marks indicate parallel lines*).

DO THIS

1. Take identical cut-outs of congruent triangles of sides 3 cm, 4 cm, 5 cm. Arrange them as shown (Fig 3.11).

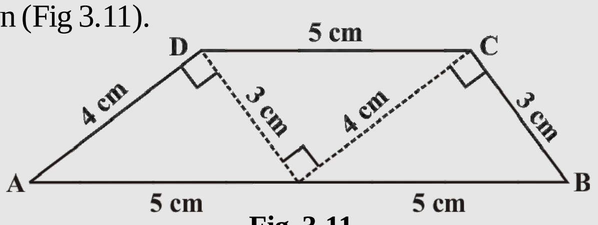
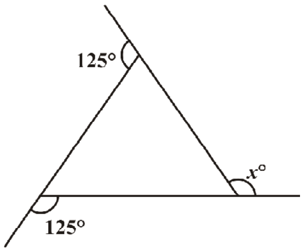


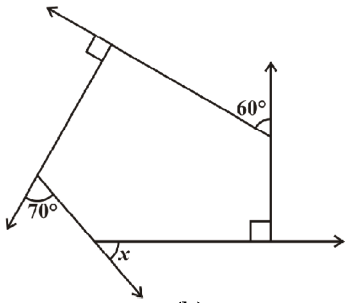
Fig 3.11

అభ్యాసం 3.2

1. క్రింది పటాల నుండి x విలువను కనుగొనండి.



(a)



(b)

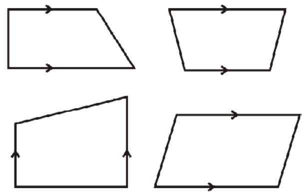
2. క్రింది భుజాలు కల్గిన క్రమ బహుభుజి యొక్క ప్రతి బాహ్యకోణం కొలతను కనుగొనండి.
   (i) 9 భుజాలు (ii) 15 భుజాలు
3. ఒక క్రమ బహుభుజి యొక్క ప్రతి బాహ్యకోణం కొలత 24^0 అయితే ఆ క్రమ బహుభుజి యొక్క భుజాల సంఖ్యను కనుగొనండి.
4. ఒక క్రమ బహుభుజి యొక్క ప్రతి అంతరకోణం కొలత 165^0 అయిన అది ఎన్ని భుజాలను కల్గి ఉండును.
5. (a) ప్రతి బాహ్య కోణం కొలత 22^0 ఉండునట్లు క్రమ బహుభుజి ఉండుట సాధ్యమేనా?
   (b) ఈ కోణం క్రమ బహుభుజి యొక్క అంతరకోణం అవుతుందా? ఎందువల్ల?
6. (a) ఒక క్రమ బహుభుజికి సాధ్యమయ్యే కనిష్ట అంతర కోణం కొలత ఎంత? ఎందుకు?
   (b) ఒక క్రమ బహుభుజికి సాధ్యమయ్యే గరిష్ట బాహ్యకోణం కొలత ఎంత?

3.4 చతుర్భుజాల రకాలు

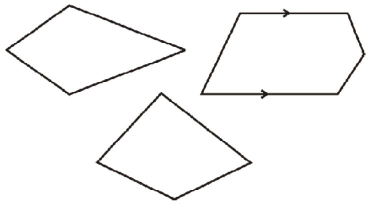
చతుర్భుజం యొక్క భుజాలు లేదా కోణాల స్వభావం ఆధారంగా దానికి ప్రత్యేకమైన పేర్లు వచ్చాయి.

3.4.1 సమలంబ చతుర్భుజం (ట్రెపీజియం)

ఒక జత సమాంతర భుజాలు గల చతుర్భుజం సమలంబ చతుర్భుజం.



ఇవి సమలంబ చతుర్భుజాలు

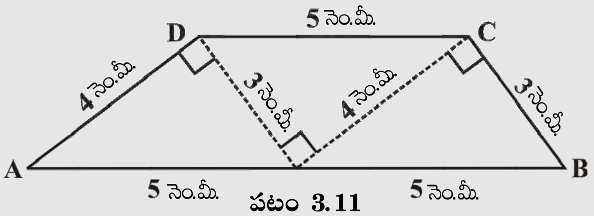


ఇవి సమలంబ చతుర్భుజాలు కావు

పై పటాలను పరిశీలించి ఎందుకు కొన్ని సమలంబ చతుర్భుజాలు అవుతాయి, కొన్ని కావు. మీ స్నేహితులతో చర్చించండి. (**గమనిక :** *బాణం గుర్తులు సమాంతర రేఖలను సూచించును*)

ఇవి చేయండి

1. 3 సెం.మీ, 4 సెం.మీ, 5 సెం.మీ కొలతలుగా గల మూడు సర్వసమాన త్రిభుజాలను కత్తిరించి వాటిని పటంలో చూపిన విధంగా అమర్చండి (పటం 3.11).



పటం 3.11

You get a trapezium. (Check it!) Which are the parallel sides here? Should the non-parallel sides be equal?

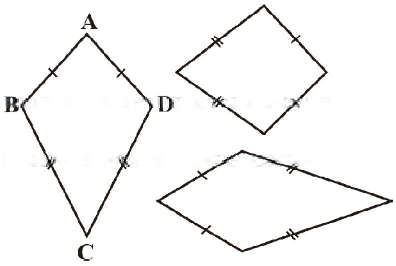
You can get two more trapeziums using the same set of triangles. Find them out and discuss their shapes.

2. Take four set-squares from your and your friend's instrument boxes. Use different numbers of them to place side-by-side and obtain different trapeziums.

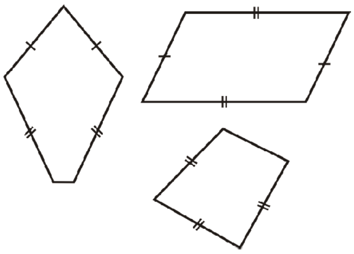
If the non-parallel sides of a trapezium are of equal length, we call it an *isosceles trapezium*. Did you get an isoceles trapezium in any of your investigations given above?

3.4.2 Kite

Kite is a special type of a quadrilateral. The sides with the same markings in each figure are equal. For example AB = AD and BC = CD.



These are kites



These are not kites

Study these figures and try to describe what a kite is. Observe that

(i) A kite has 4 sides (It is a quadrilateral).

(ii) There are exactly two **distinct consecutive pairs** of sides of equal length.

Check whether a square is a kite.

DO THIS

Take a thick white sheet.
Fold the paper once.
Draw two line segments of different lengths as shown in Fig 3.12.
Cut along the line segments and open up.
You have the shape of a kite (Fig 3.13).
Has the kite any line symmetry?

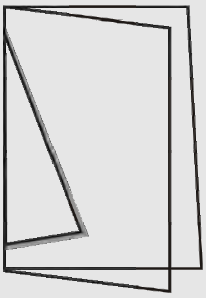


Fig 3.12

Show that ΔABC and ΔADC are congruent. What do we infer from this?

Fold both the diagonals of the kite. Use the set-square to check if they cut at right angles. Are the diagonals equal in length?

Verify (by paper-folding or measurement) if the diagonals bisect each other.

By folding an angle of the kite on its opposite, check for angles of equal measure.

Observe the diagonal folds; do they indicate any diagonal being an angle bisector?

Share your findings with others and list them. A summary of these results are given elsewhere in the chapter for your reference.

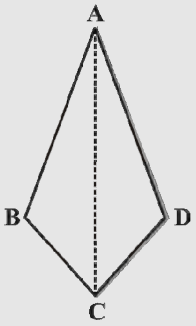


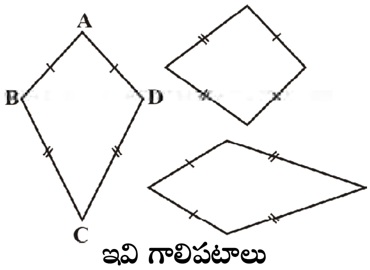
Fig 3.13

మీకు ఒక సమలంబ చతుర్భుజం వస్తుంది. (సరిచూడండి!) ఇక్కడ ఏవి సమాంతర భుజాలు? అసమాంతర భుజాలు సమానంగా ఉండాలా?
ఈ త్రిభుజాలను ఉపయోగించి మీరు మరో రెండు సమలంబ చతుర్భుజాలు పొందగలుగుతారు. వాటిని కనుగొని వాటి ఆకారాలు గురించి చర్చించండి.

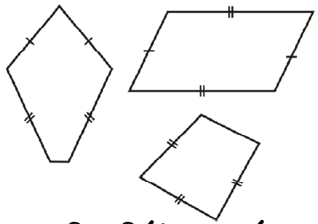
2. మీ మరియు మీ స్నేహితుల జ్యామితీయ పెట్టెలనుండి నాలుగు మూల మట్టాలను తీసుకోండి వాటిని వేరు వేరు సంఖ్యలలో తీసుకొని ప్రక్క ప్రక్కన ఉంచడం ద్వారా మీరు వేరు వేరు సమలంబ చతుర్భుజాలను పొందవచ్చు.
ఒక సమలంబ చతుర్భుజంలో అసమాంతర భుజాలు సమానమైతే దానిని *సమద్విబాహు సమలంబ చతుర్భుజం* అని అంటారు. పైన మీరు చేసిన పరిశోధనలో మీరు సమద్విబాహు సమలంబ చతుర్భుజాన్ని పొంది ఉన్నారా?

3.4.2 గాలిపటం

గాలిపటం ఒక ప్రత్యేకమైన చతుర్భుజం. ప్రతి పటంలో ఒకే విధమైన గుర్తులు గీచిన భుజాలు సమానం. ఉదాహరణకు AB = AD మరియు BC = CD.



ఇవి గాలిపటాలు



ఇవి గాలిపటాలు కావు

పై పటాలను పరిశీలించి గాలిపటం అంటే ఏమిటో వివరించడానికి ప్రయత్నించండి. వీటి ద్వారా గమనించేవి.

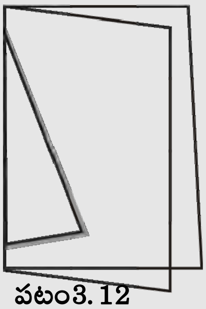
(i) గాలిపటం 4 భుజాలు కల్గి ఉండును. (ఇది ఒక చతుర్భుజం)

(ii) ఖచ్చితంగా సమాన పొడవులు కలిగిన రెండు **విభిన్న వరుస భుజాల జతలు** ఉంటాయి.

చతురస్రం గాలిపటం అవుతుందా. పరిశీలించండి.

ఇవి చేయండి

మందంగా ఉన్న ఒక తెల్లటి కాగితం తీసుకోండి.
కాగితాన్ని ఒకసారి మడవండి.
పటం3.12లో చూపినట్లుగా రెండు వేరు వేరు పొడవులు గల రేఖా ఖండాలను గీయండి.
రేఖాఖండాల వెంబడి కత్తిరించి తెరవండి.
మీరు ఒక గాలిపటం ఆకారం పొందుతారు. (పటం 3.13).
ఈ గాలి పటానికి ఏదైనా రేఖా సౌష్టవం ఉందా?

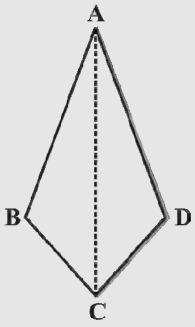


పటం3.12

ΔABC మరియు ΔADC లు సర్వసమానం అని చూపండి దీని నుండి మనం ఏమి చెప్పవచ్చును?

గాలిపటం యొక్క రెండు కర్ణాలను మడవండి. మూల మట్టాలను ఉపయోగించి వాటి కర్ణాలు లంబంగా ఉన్నాయో లేదో సరిచూడండి. కర్ణాల పొడవులు సమానంగా ఉన్నాయా?
కర్ణాలు పరస్పరం సమద్వి ఖండన చేసుకున్నాయో లేదో చూడండి. (కాగితాన్ని మడవడం ద్వారా లేదా కొలవడం ద్వారా)
గాలి పటం యొక్క ఒక కోణాన్ని దాని యొక్క అభిముఖ కోణంపై పడునట్లు మడవడం ద్వారా, ఏర్పడిన అభిముఖ కోణాలు సమానంగా ఉన్నాయా? కర్ణాలను మడిచినప్పుడు, ఏ కర్ణమైనా కోణ సమద్విఖండనరేఖ అవుతుందా? పరిశీలించండి.

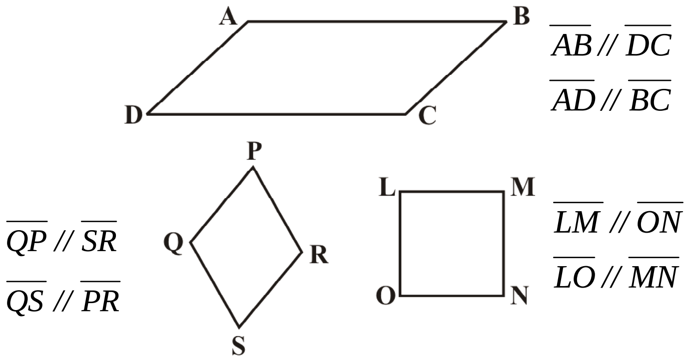
మీరు కనుగొన్న విషయాలను మిగిలిన వారికి తెలియపరచి, ఆ విషయాలను క్రోడీకరించండి.
ఈ ఫలితాల సారాంశాన్ని ఈ అధ్యాయంలో మరొక చోట మీ పరిశీలన కొరకు ఇవ్వబడినది.



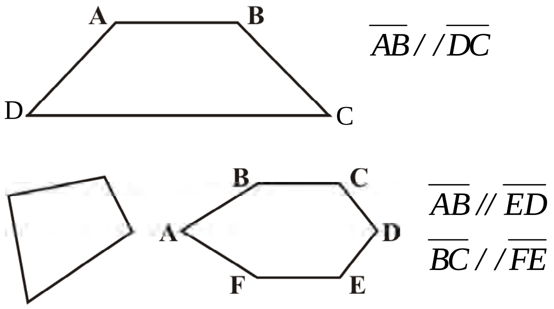
పటం3.13

3.4.3 Parallelogram

A parallelogram is a quadrilateral. As the name suggests, it has something to do with parallel lines.



These are parallelograms



These are not parallelograms

Study these figures and try to describe in your own words what we mean by a parallelogram. Share your observations with your friends.

Check whether a rectangle is also a parallelogram.

DO THIS

Take two different rectangular cardboard strips of different widths (Fig 3.14).

Strip 1 **Fig 3.14** **Strip 2**

Place one strip horizontally and draw lines along its edge as drawn in the figure (Fig 3.15).

Now place the other strip in a slant position over the lines drawn and use this to draw two more lines as shown (Fig 3.16).

Fig 3.15

These four lines enclose a quadrilateral. This is made up of two pairs of parallel lines (Fig 3.17). It is a parallelogram.

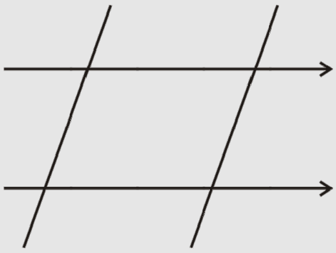


Fig 3.16

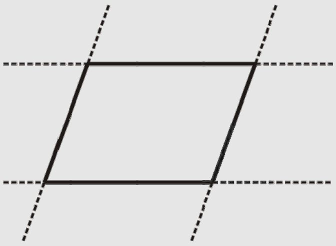
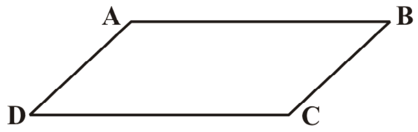


Fig 3.17

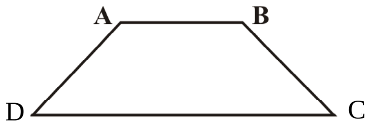
3.4.3 సమాంతర చతుర్భుజం

సమాంతర చతుర్భుజం ఒక చతుర్భుజం. దాని పేరులో ఉన్నట్లే సమాంతర రేఖలు దీనిలో ప్రముఖ పాత్ర వహిస్తాయి.



$\overline{AB} // \overline{DC}$

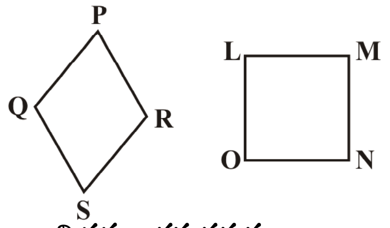
$\overline{AD} // \overline{BC}$



$\overline{AB} // \overline{DC}$

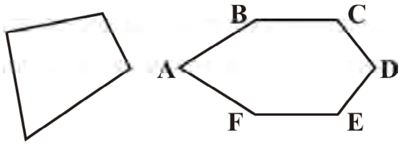
$\overline{QP} // \overline{SR}$

$\overline{QS} // \overline{PR}$



$\overline{LM} // \overline{ON}$

$\overline{LO} // \overline{MN}$



$\overline{AB} // \overline{ED}$

$\overline{BC} // \overline{FE}$

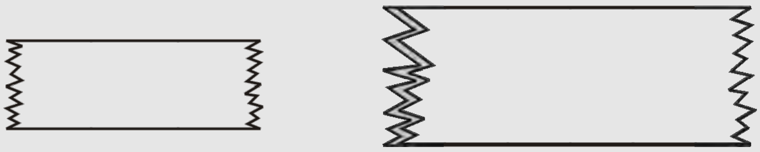
ఇవి సమాంతర చతుర్భుజాలు **ఇవి సమాంతర చతుర్భుజాలు కావు**

పై పటాలను అధ్యయనం చేసి సమాంతర చతుర్భుజం అంటే ఏమిటో మీ సొంత మాటలతో వివరించడానికి ప్రయత్నించండి. మీ పరిశీలనలను మీ స్నేహితులతో పంచుకోండి.

దీర్ఘచతురస్రం, సమాంతర చతుర్భుజం కూడా అవుతుందేమో చూడండి.

ఇవి చేయండి

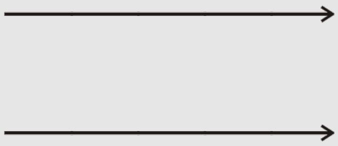
రెండు విభిన్న వెడల్పులు గల అట్టలతో తయారు చేసిన దీర్ఘచతురస్రాకార పట్టీలను తీసుకోండి (పటం 3.14)



పట్టీ 1 **పటం 3.14** **పట్టీ 2**

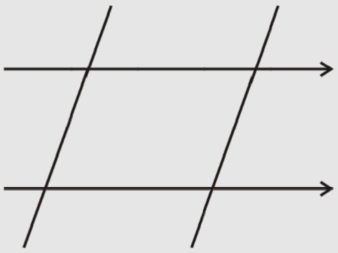
ఒక పట్టీ అడ్డంగా ఉంచి దాని అంచుల వెంబడి రేఖలను గీయండి పటం 3.15 లో చూపిన విధంగా

ఇప్పుడు రెండవ పట్టీను కొంచెం ఏటవాలుగా ఉంచి, ముందు గీచిన రేఖలపై మరొక రెండు రేఖలు పటం 3.16 లో చూపిన విధంగా గీయండి.

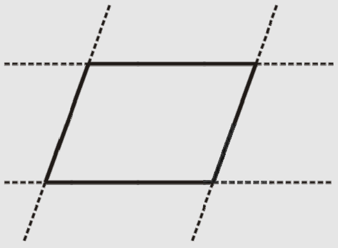


పటం 3.15

ఈ నాలుగు రేఖలు ఒక చతుర్భుజాన్ని ఏర్పరుచును. ఈ చతుర్భుజం రెండు జతల సమాంతర రేఖలచే ఏర్పడినది. ఇది ఒక సమాంతర చతుర్భుజం (పటం3.17)



పటం 3.16



పటం 3.17

A parallelogram is a quadrilateral whose opposite sides are parallel.

3.4.4 Elements of a parallelogram

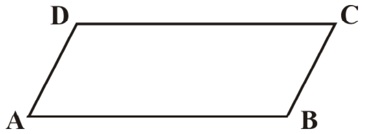


Fig 3.18

There are four sides and four angles in a parallelogram. Some of these are equal. There are some terms associated with these elements that you need to remember.

Given a parallelogram ABCD (Fig 3.18).

$\overline{AB}$ and $\overline{DC}$, are **opposite sides**. $\overline{AD}$ and $\overline{BC}$ form another pair of opposite sides.

$\angle$A and $\angle$C are a pair of **opposite angles**; another pair of opposite angles would be $\angle$B and $\angle$D.

$\overline{AB}$ and $\overline{BC}$ are **adjacent sides**. This means, one of the sides starts where the other ends. Are $\overline{BC}$ and $\overline{CD}$ adjacent sides too? Try to find two more pairs of adjacent sides.

$\angle$A and $\angle$B are **adjacent angles**. They are at the ends of the same side. $\angle$B and $\angle$C are also adjacent. Identify other pairs of adjacent angles of the parallelogram.

DO THIS

Take cut-outs of two identical parallelograms, say ABCD and A′B′C′D′ (Fig 3.19).

Fig 3.19

Here $\overline{AB}$ is same as $\overline{A'B'}$ except for the name. Similarly the other corresponding sides are equal too.

Place $\overline{A'B'}$ over $\overline{DC}$. Do they coincide? What can you now say about the lengths $\overline{AB}$ and $\overline{DC}$?

Similarly examine the lengths $\overline{AD}$ and $\overline{BC}$. What do you find?

You may also arrive at this result by measuring $\overline{AB}$ and $\overline{DC}$.

Property: *The opposite sides of a parallelogram are of equal length.*

TRY THESE

Take two identical set squares with angles 30° – 60° – 90° and place them adjacently to form a parallelogram as shown in Fig 3.20. Does this help you to verify the above property?

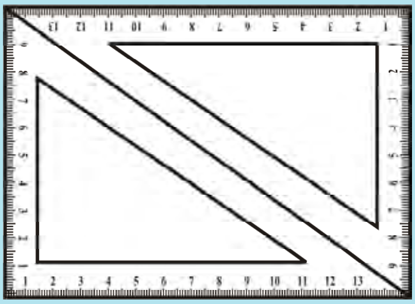


Fig 3.20

You can further strengthen this idea through a logical argument also.

Consider a parallelogram ABCD (Fig 3.21). Draw any one diagonal, say $\overline{AC}$.

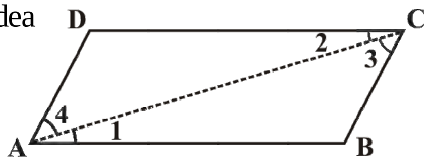
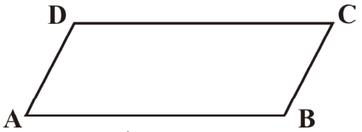


Fig 3.21

సమాంతర చతుర్భుజం అనేది ఎదురెదురు భుజాలు సమాంతరంగా ఉన్న ఒక చతుర్భుజం.

3..4.4 సమాంతర చతుర్భుజంలోని అంశాలు



పటం 3.18

సమాంతర చతుర్భుజంలో నాలుగు భుజాలు, నాలుగు కోణాలు ఉంటాయి. వీటిలో కొన్ని సమానాలు. వీటికి సంబంధించిన కొన్ని పదాలను మీరు గుర్తుంచుకోవలిసిన అవసరం ఉంది.

ఇవ్వబడిన సమాంతర చతుర్భుజము ABCD (పటం 3.18) లో

$\overline{AB}$ మరియు $\overline{DC}$ లు ఒక జత **ఎదురెదురు భుజాలు** $\overline{AD}$ మరియు $\overline{BC}$ లు మరొక జత ఎదురెదురు భుజాలు.

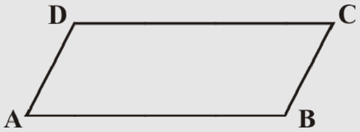
$\angle A$ మరియు $\angle C$ లు ఒక జత **ఎదురెదురు కోణాలు**. అలాగే $\angle B$ మరియు $\angle D$ లు మరొక జత ఎదురెదురు కోణాలు అవుతాయి.

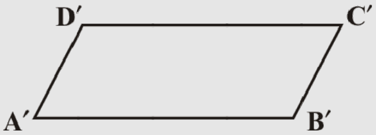
$\overline{AB}$ మరియు $\overline{BC}$ లు **ఆసన్న భుజాలు**, ఆసన్నమనగా ఒక భుజం యొక్క అంత్య బిందువు నుండి మరొక భుజం ప్రారంభం అవుతుందని అర్థం. $\overline{BC}$ మరియు $\overline{CD}$ లు కూడా ఆసన్న భుజాలు అవుతాయా? ఇంకా రెండు జతల ఆసన్న భుజాలు వుంటే కనుగొనడానికి ప్రయత్నించండి.

$\angle A$ మరియు $\angle B$ లు **ఆసన్న కోణాలు.** అవి ఒకే భుజం యొక్క అంత్య బిందువుల వద్ద ఉన్నాయి. $\angle B$ మరియు $\angle C$ లు కూడా ఆసన్న కోణాలు. ఈ సమాంతర చతుర్భుజంలో మిగిలిన జతల ఆసన్న కోణాల జతను గుర్తించండి.

ఇవి చేయండి

ABCD మరియు A′B′C′D′ (పటము 3.19)లు ఒకే విధమైన సమాంతర చతుర్భుజాల అట్ట నమూనాలు తీసుకోండి.



పటం 3.19


ఇక్కడ పటంలో $\overline{AB}$ అనునది $\overline{A'B'}$ కొలతకు సమానంగా ఉంది, పేరు మాత్రమే వేరు. అదే విధంగా మిగిలిన అనురూప భుజాలు కూడా సమానం.

$\overline{A'B'}$ ను $\overline{DC}$ పైన ఉంచుము. అవి ఏకీభవించాయా? అయితే $\overline{AB}$ మరియు $\overline{DC}$ పొడవులను గురించి ఏమి చెప్తారు?

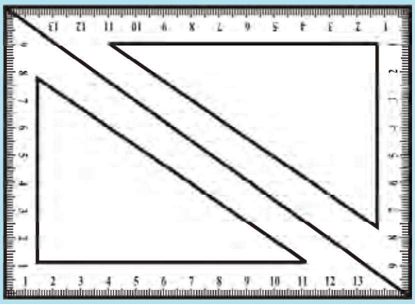
ఇదే విధంగా మీరు $\overline{AD}$ మరియు $\overline{BC}$ పొడవులను గమనించండి. ఏమి కనుగొన్నారు?

$\overline{AB}$ మరియు $\overline{DC}$ లను కొలవడం ద్వారా మీరు ఈ ఫలితాన్ని పొందవచ్చు.

ధర్మం: *సమాంతర చతుర్భుజంలో ఎదురెదురు భుజాలు సమాన కొలతలను కల్గి ఉంటాయి.*

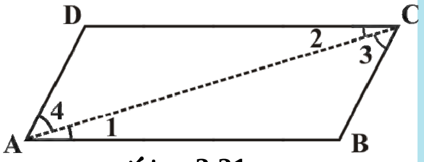
ప్రయత్నించండి

ఒకే విధమైన కోణాలను కల్గిన ($30^0–60^0–90^0$) రెండు మూల మట్టములను తీసుకొనుము. వాటిని (పటము 3.20)లో చూపినట్లు అమర్చుము. పై ధర్మాన్ని సరిచూచుటకు మీకు ఇది సహాయపడుతుందా?


పటం 3.20

మీరు ఈ ఆలోచనను సమంజసమైన తర్కం ద్వారా బలపరచవచ్చును.

పక్కనున్న ABCD సమాంతర చతుర్భుజంను (పటము 3.21) పరిశీలించుము. ఏదైనా ఒక కర్ణమును గీయము. అది $\overline{AC}$ అనుకొనుము.



పటం 3.21

Looking at the angles,

$\angle 1 = \angle 2$ and $\angle 3 = \angle 4$ (Why?)

Since in triangles ABC and ADC, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$

and $\overline{AC}$ is common, so, by ASA congruency condition,

Δ ABC $\cong$ Δ CDA (How is ASA used here?)

This gives AB = DC and BC = AD.

Example 3: Find the perimeter of the parallelogram PQRS (Fig 3.22).

Solution: In a parallelogram, the opposite sides have same length.

Therefore, PQ = SR = 12 cm and QR = PS = 7 cm

So, Perimeter = PQ + QR + RS + SP

= 12 cm + 7 cm + 12 cm + 7 cm = 38 cm

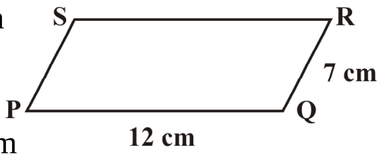


Fig 3.22

3.4.5 Angles of a parallelogram

We studied a property of parallelograms concerning the (opposite) sides. What can we say about the angles?

DO THIS

Let ABCD be a parallelogram (Fig 3.23). Copy it on a tracing sheet. Name this copy as A′B′C′D′. Place A′B′C′D′ on ABCD. Pin them together at the point where the diagonals meet. Rotate the transparent sheet by 180°. The parallelograms still concide; but you now find A′ lying exactly on C and vice-versa; similarly B′ lies on D and vice-versa.

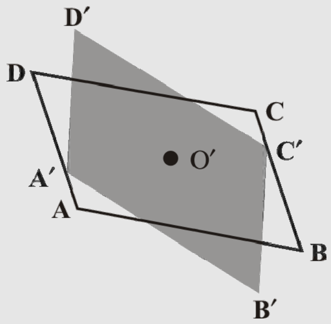


Fig 3.23

Does this tell you anything about the measures of the angles A and C? Examine the same for angles B and D. State your findings.

Property: *The opposite angles of a parallelogram are of equal measure.*

TRY THESE

Take two identical 30° – 60° – 90° set-squares and form a parallelogram as before. Does the figure obtained help you to confirm the above property?

You can further justify this idea through logical arguments.

If $\overline{AC}$ and $\overline{BD}$ are the diagonals of the parallelogram, (Fig 3.24) you find that

$\angle 1 = \angle 2$ and $\angle 3 = \angle 4$ (Why?)

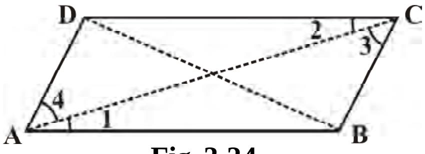


Fig 3.24

కోణములు పరిశీలించుము,

$\angle 1 = \angle 2$ మరియు $\angle 3 = \angle 4$ (ఎందువలన?)

Δ ABC మరియు Δ ADC లలో $\angle 1 = \angle 2, \angle 3 = \angle 4$ మరియు AC ఉమ్మడి భుజం, అందువలన కో. భు. కో సర్వసమాన నియమం నుండి

$\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (ఇక్కడ కో.భు.కో నియమం ఎలా ఉపయోగించబడింది?)

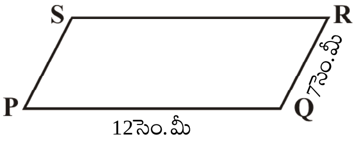
దీని నుండి AB=DC మరియు BC=AD .

ఉదాహరణ 3: PQRS సమాంతర చతుర్భుజం (పటం 3.22) యొక్క చుట్టు కొలత కనుగొనుము.

సాధన: సమాంతర చతుర్భజంలో ఎదురెదురు భుజాలు సమానంగా ఉంటాయి. అందువలన PQ= SR=12 సెం.మీ మరియు QR=PS=7 సెం.మీ అగును.

కావున చుట్టుకొలత = PQ + QR + RS + SP

=12 సెం.మీ+7సెం.మీ+12సెం.మీ+7సెం.మీ = 38సెం.మీ



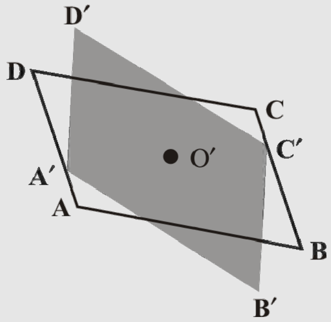
పటం 3.22

3.4.5 సమాంతర చతుర్భుజంలోని కోణాలు

మనము సమాంతర చతుర్భుజంలో ఎదురెదురు భుజాలకు సంబంధించిన ఒక ధర్మాన్ని గురించి తెలుసుకున్నాము. కోణాలు గురించి మనం ఏమి చెప్పవచ్చు?

ఇవి చేయండి

ABCD ఒక సమాంతర చతుర్భుజంను తీసుకొనుము. (పటం 3.23) దీనిని ట్రేసింగ్ పేపర్‌పై కాపీ చేయుము. దీనికి A′B′C′D′ అని పేరు పెట్టుము. A′B′C′D′ లను ABCD పైన ఉంచుము. రెండు పటములలో కర్ణాలు ఖండించుకున్నచోట ఒక పిన్ను గుచ్చుము. ఇప్పుడు ట్రేసింగ్ పేపరు 180^0 త్రిప్పుము. అయినప్పటికి సమాంతర చతుర్భజాలు A′B′C′D′ మరియు ABCD ఏకీభవించును. A′ బిందువు C బిందువు పైన మరియు B′ బిందువు D బిందువు పైన ఉండును. (ఈ లక్షణం విపర్యంగా ఉండును)



పటం 3.23

దీని నుండి A మరియు C కోణాల కొలతలు గురించి ఏమి చెప్పవచ్చును? అదే విధంగా B మరియు D కోణాల గురించి పరిశీలన చేయండి. మీ పరిశీలనలను తెలపండి.

ధర్మం : *సమాంతర చతుర్భుజంలో ఎదురెదురు కోణాలు సమాన కొలతలు కల్గి ఉంటాయి.*

ప్రయత్నించండి

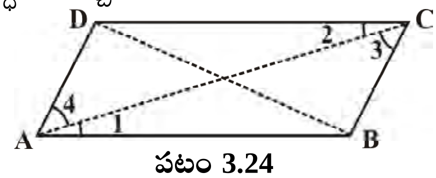
30° – 60° – 90° కోణాలు కలిగిన రెండు ఒకే లాంటి మూల మట్టాలను తీసుకొని ముందు చెప్పుకొన్న విధంగా ఒక సమాంతర చతుర్భుజంను తయారుచేయుము. ఇప్పుడు పొందిన అమరిక పై ధర్మం నిర్ధారించుటకు సహాయపడుతుందా?

మీరు తార్కిక వాదనల ద్వారా ఈ ఆలోచనను మరింత సమర్థించవచ్చు.

సమాంతర చతుర్భుజం ABCD లో (పటం 3.24)

$\overline{AC}$ మరియు $\overline{BD}$ కర్ణాలైతే $\angle 1 = \angle 2$

మరియు $\angle 3 = \angle 4$ అని గమనించవచ్చు (ఎందుకు?)



పటం 3.24

Studying Δ ABC and Δ ADC (Fig 3.25) separately, will help you to see that by ASA congruency condition,

$$\Delta \text{ ABC} \cong \Delta \text{ CDA} \qquad \text{(How?)}$$

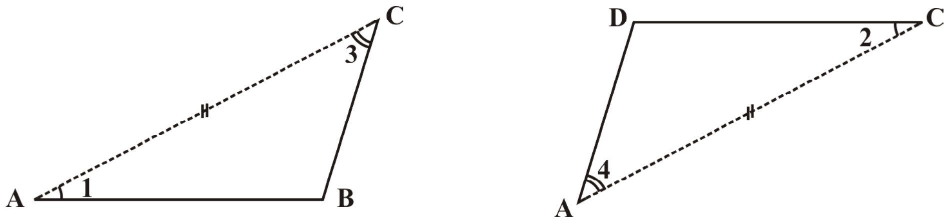


Fig 3.25

This shows that ∠B and ∠D have same measure. In the same way you can get $m\angle A = m\angle C$.

Alternatively, ∠1 = ∠2 and ∠3 = ∠4, we have, $m\angle A = \angle 1 + \angle 4 = \angle 2 + \angle 3 = m\angle C$

Example 4: In Fig 3.26, BEST is a parallelogram. Find the values *x*, *y* and *z*.

Solution: S is opposite to B.

So, $x = 100°$ (opposite angles property)

$y = 100°$ (measure of angle corresponding to $\angle x$)

$z = 80°$ (since $\angle y$, $\angle z$ is a linear pair)

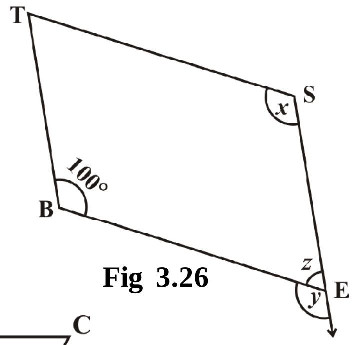


Fig 3.26

We now turn our attention to adjacent angles of a parallelogram.

In parallelogram ABCD, (Fig 3.27).

∠A and ∠D are supplementary since $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$ and with transversal $\overline{DA}$, these two angles are interior opposite.

∠A and ∠B are also supplementary. Can you say 'why'?

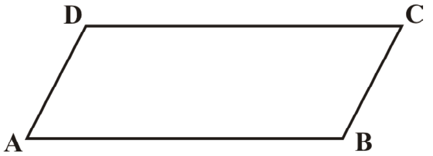


Fig 3.27

$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ and $\overline{BA}$ is a transversal, making ∠A and ∠B interior opposite.

Identify two more pairs of supplementary angles from the figure.

Property: *The adjacent angles in a parallelogram are supplementary.*

Example 5: In a parallelogram RING, (Fig 3.28) if $m\angle R = 70°$, find all the other angles.

Solution: Given $m\angle R = 70°$

Then $m\angle N = 70°$

because ∠R and ∠N are opposite angles of a parallelogram.

Since ∠R and ∠I are supplementary,

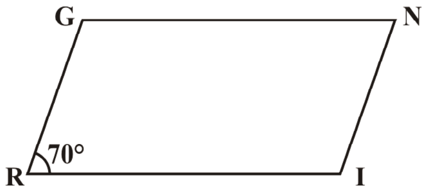


Fig 3.28

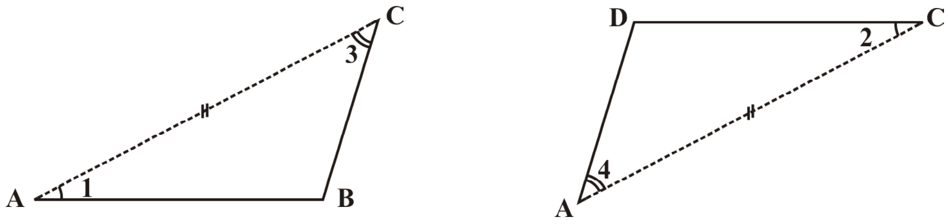
$$m\angle I = 180° - 70° = 110°$$

Also, $m\angle G = 110°$ since ∠G is opposite to ∠I

Thus, $m\angle R = m\angle N = 70°$ and $m\angle I = m\angle G = 110°$

పటము (3.25) Δ ABC మరియు Δ ADC లను విడివిడిగా పరిశీలించుట వలన కో.భు.కో సర్వసమాన నియమము చూచుటకు సహాయపడుతుంది.

$$\Delta ABC \cong \Delta CDA \text{ (ఎలా?)}$$



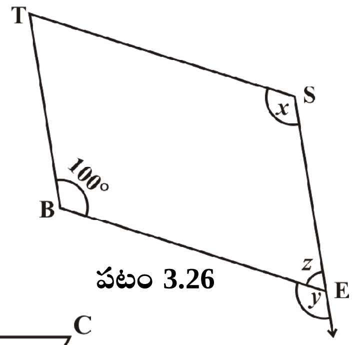
పటం 3.25

దీని నుండి మనకు ∠B మరియు ∠D సమానమని తెలియును. ఇదేవిధంగా మీరు $m\angle A = m\angle C$ అని పొందవచ్చు.

బదులుగా, $\angle 1 = \angle 2$ మరియు $\angle 3 = \angle 4$, దీని నుండి $m\angle A = \angle 1 + \angle 4 = \angle 2 + \angle 3 = m\angle C$

ఉదాహరణ 4: పటం 3.26 లో BEST ఒక సమాంతర చతుర్భుజం. x, y, z విలువలను కనుగొనుము.

సాధన: పటంలో S అనేది B కి అభిముఖంగా ఉంది.



పటం 3.26

అందువలన, $x = 100°$ (అభిముఖకోణాల ధర్మం)

$y = 100°$ ($\angle x$ యొక్క అనురూప కోణం కొలత)

$z = 80°$ ($\angle y, \angle z$ రేఖీయ ద్వయం)

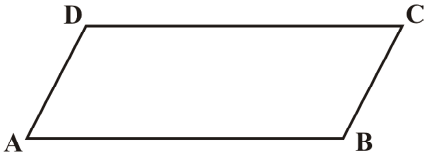
ఇప్పుడు సమాంతర చతుర్భుజంలోని ఆసన్న కోణాలను గమనిద్దాం.

ABCD సమాంతర చతుర్భుజం (పటం 3.27) లో

∠A మరియు ∠D సంపూరకాలు ఎందుకంటే

$\overline{DC} \parallel \overline{AB}$ మరియు $\overline{DA}$ తిర్యగ్రేఖ, ఈ రెండు కోణములు తిర్యగ్రేఖకు ఒకే వైపున గల అంతరాభిముఖ కోణములు, అలాగే

∠A మరియు ∠B లు సంపూరకాలు 'ఎందుకో' చెప్పగలరా?



పటం 3.27

$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ మరియు $\overline{BA}$ తిర్యగ్రేఖ, కావున ∠A మరియు ∠Bలు తిర్యగ్రేఖకు ఒకే వైపున గల అంతరాభిముఖ కోణాలు అయ్యాయి. ఇంకా రెండు సంపూరక కోణాల జతలను పటం నుండి గుర్తించండి.

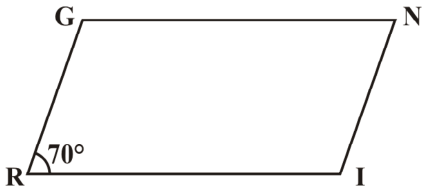
ధర్మం: *సమాంతర చతుర్భుజంలో ఆసన్న కోణాలు సంపూరకాలు.*

ఉదాహరణ 5: సమాంతర చతుర్భుజం RING (పటం 3.28) లో $m\angle R = 70°$ అయిన మిగిలిన కోణాలను కనుగొనండి.

సాధన: $m\angle R = 70°$

దాని నుండి $m\angle N = 70°$

ఎందుకంటే ∠R మరియు ∠N లు సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క ఎదురెదురు కోణాలు ∠R మరియు ∠I లు సంపూరకాలు



పటం 3.28

$$m\angle I = 180° - 70° = 110°$$

కావున, $m\angle G = 110°$, ∠G అనేది ∠I కు అభిముఖం

ఎందుకంటే, $m\angle R = m\angle N = 70°$ మరియు $m\angle I = m\angle G = 110°$

THINK, DISCUSS AND WRITE

After showing $m\angle R = m\angle N = 70°$, can you find $m\angle I$ and $m\angle G$ by any other method?

3.4.6 Diagonals of a parallelogram

The diagonals of a parallelogram, in general, are not of equal length. (Did you check this in your earlier activity?) However, the diagonals of a parallelogram have an interesting property.

DO THIS

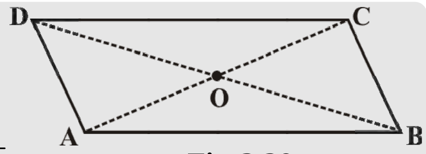


Fig 3.29

Take a cut-out of a parallelogram, say, ABCD (Fig 3.29). Let its diagonals $\overline{AC}$ and $\overline{DB}$ meet at O.

Find the mid point of $\overline{AC}$ by a fold, placing C on A. Is the mid-point same as O?

Does this show that diagonal $\overline{DB}$ bisects the diagonal $\overline{AC}$ at the point O? Discuss it with your friends. Repeat the activity to find where the mid point of $\overline{DB}$ could lie.

Property: *The diagonals of a parallelogram bisect each other (at the point of their intersection, of course!)*

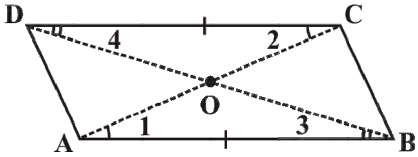


Fig 3.30

To argue and justify this property is not very difficult. From Fig 3.30, applying ASA criterion, it is easy to see that

Δ AOB $\cong$ Δ COD (How is ASA used here?)

This gives AO = CO and BO = DO

Example 6: In Fig 3.31 HELP is a parallelogram. (Lengths are in cms). Given that OE = 4 and HL is 5 more than PE? Find OH.

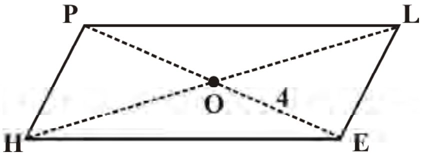


Fig 3.31

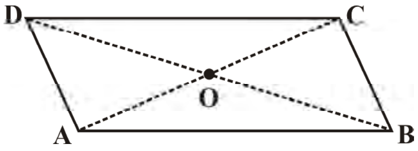
Solution : If OE = 4 then OP also is 4 (Why?)

So PE = 8, (Why?)

Therefore HL = 8 + 5 = 13

Hence $OH = \frac{1}{2} \times 13 = 6.5$ (cms)

EXERCISE 3.3



1. Given a parallelogram ABCD. Complete each statement along with the definition or property used.

   (i) AD = ... (ii) $\angle$ DCB = ...

   (iii) OC = ... (iv) $m\angle DAB + m\angle CDA$ = ...

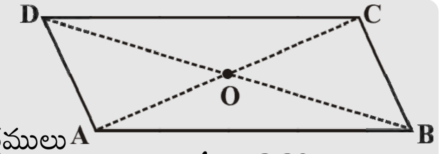
ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి

$m\angle R = m\angle N = 70°$ అని చూపిన తరువాత $m\angle I$ మరియు $m\angle G$ లను వేరే పద్ధతిలో కనుగొనగలవా?

3.4.6 సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క కర్ణాలు

సాధారణంగా సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క కర్ణముల పొడవులు సమానంగా ఉండవు. (ఈ విషయాన్ని మీరు ఇంతకు ముందు ఎప్పుడైనా పరిశీలించారా?) ఏదైనప్పటికి సమాంతర చతుర్భుజ కర్ణాలు ఆసక్తికరమైన ధర్మాన్ని కలిగి ఉన్నాయి.

ఇవి చేయండి



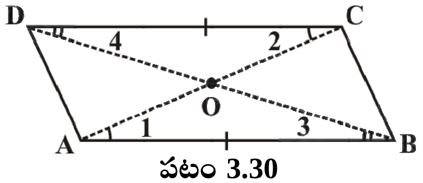
పటం 3.29

ఒక కత్తిరించిన సమాంతర చతుర్భుజం తీసుకోండి. దానిని ABCD (పటం 3.29) అని అనుకోండి దాని కర్ణములు $\overline{AC}$ మరియు $\overline{DB}$ లు O బిందువు వద్ద ఖండించుకొనును.

C బిందువు A పై ఉండునట్లు కాగితంను మడిచి $\overline{AC}$ యొక్క మధ్య బిందువును కనుగొనుము. దాని మధ్య బిందువు O అయినదా?

ఇది కర్ణము $\overline{DB}$, కర్ణము $\overline{AC}$ ను O బిందువు వద్ద సమద్విఖండన చేసినట్లు చూపుతోందా? దీనిని మీ తరగతి స్నేహితులతో చర్చించండి. $\overline{DB}$ మధ్య బిందువు ఎక్కడ ఉందో కనుగొనుటకు ఈ కృత్యమును మరలా చేయండి.

ధర్మము: *సమాంతర చతుర్భుజంలో కర్ణములు పరస్పరం సమద్విఖండన చేసుకుంటాయి. (బహుశా! వాటి ఖండన బిందువు వద్ద)*



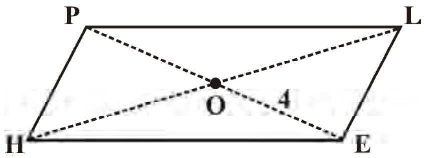
పటం 3.30

ఈ ధర్మాన్ని నిరూపించడం మరియు సమర్థించడం పెద్ద కష్టమేమి కాదు. పటం 3.30, కో.భు.కో స్వీకృతం ఉపయోగించి దీన్ని సులభతరం చేయవచ్చును.

$\Delta AOB \cong \Delta COD$ (ఇక్కడ కో.భు.కో నియమం ఎలా ఉపయోగించబడింది?)

దీని నుండి AO = CO మరియు BO = DO

ఉదాహరణ 6: పటము 3.31లో HELP ఒక సమాంతర చతుర్భుజం OE = 4 మరియు HL, PE కంటే 5 ఎక్కువ అయిన OH కనుగొనుము? (భుజాల కొలతలు సెం.మీ.లలో ఇవ్వబడినవి.)



పటం 3.31

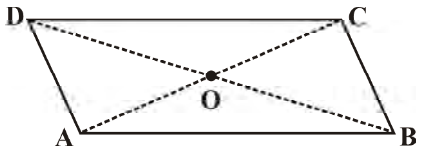
సాధన: OE =4 అయితే OP=4 అవుతుంది (ఎందుకు?)

అందువలన PE = 8, (ఎందుకు?)

కాబట్టి HL = 8 + 5 = 13

అదేవిధంగా $OH = \frac{1}{2} \times 13 = 6.5$ (సెం.మీ.)

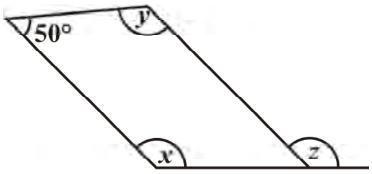
అభ్యాసం 3.3



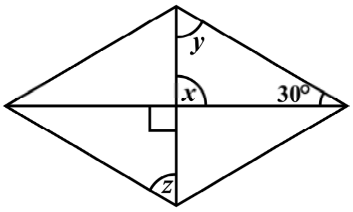
1. సమాంతర చతుర్భుజం ABCD ఇవ్వబడింది. క్రింది ఖాళీలను పూరించండి. ఉపయోగించిన నిర్వచనం లేదా ధర్మాన్ని తెలుపండి.
   (i) AD = ... (ii) $\angle$ DCB = ...
   (iii) OC = ... (iv) $m\angle DAB + m\angle CDA$ = ...

2. Consider the following parallelograms. Find the values of the unknowns *x*, *y*, *z*.

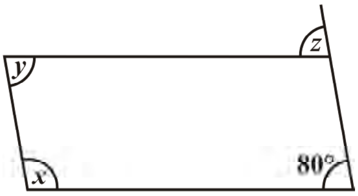
(i)



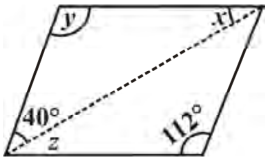
(ii)



(iii)



(iv)



(v)

3. Can a quadrilateral ABCD be a parallelogram if

(i) $\angle D + \angle B = 180°$? (ii) AB = DC = 8 cm, AD = 4 cm and BC = 4.4 cm?

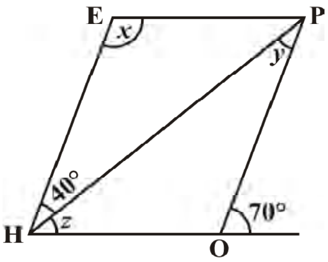
(iii) $\angle A = 70°$ and $\angle C = 65°$?

4. Draw a rough figure of a quadrilateral that is not a parallelogram but has exactly two opposite angles of equal measure.

5. The measures of two adjacent angles of a parallelogram are in the ratio 3 : 2. Find the measure of each of the angles of the parallelogram.

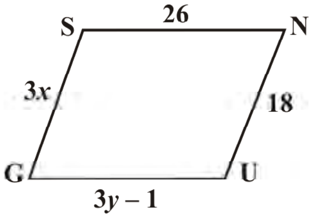
6. Two adjacent angles of a parallelogram have equal measure. Find the measure of each of the angles of the parallelogram.

7. The adjacent figure HOPE is a parallelogram. Find the angle measures *x*, *y* and *z*. State the properties you use to find them.

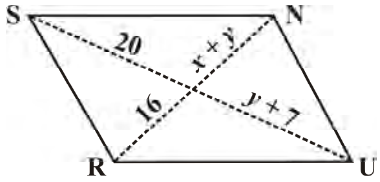


8. The following figures GUNS and RUNS are parallelograms. Find *x* and *y*. (Lengths are in cm)

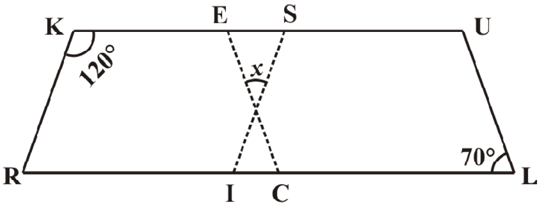
(i)



(ii)



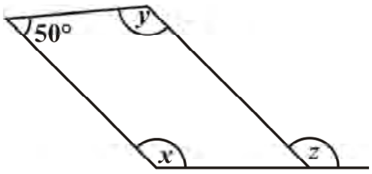
9.



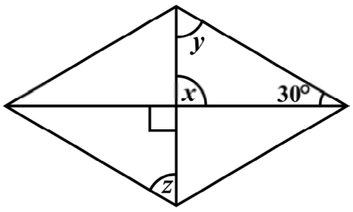
In the above figure both RISK and CLUE are parallelograms. Find the value of *x*.

2. క్రింద ఇవ్వబడిన సమాంతర చతుర్భుజంలో తెలియని రాశులైన x, y, z విలువలను కనుగొనండి.

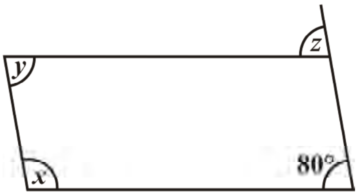
(i)



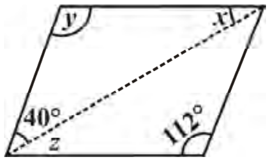
(ii)



(iii)



(iv)



(v)

3. ABCD చతుర్భుజం క్రింది విధంగా ఉన్నపుడు అది సమాంతర చతుర్భుజం అవుతుందా?

(i) $\angle D + \angle B = 180°$? (ii) AB = DC = 8 సెం.మీ., AD = 4 సెం.మీ. మరియు BC = 4.4 సెం.మీ.?

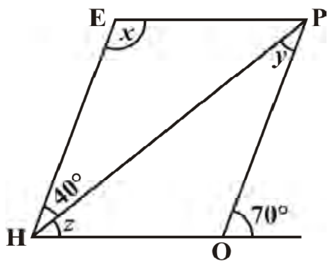
(iii) $\angle A = 70°$ మరియు $\angle C = 65°$?

4. రెండు ఎదురెదురు కోణముల కొలతలు సమానంగా ఉన్న సమాంతర చతుర్భుజం కాని ఒక చతుర్భుజం యొక్క చిత్తుపటం గీయుము.

5. ఒక సమాంతర చతుర్భుజంలో రెండు ఆసన్న కోణాల నిష్పత్తి 3:2 అయిన సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క ప్రతి కోణం కొలతను కనుగొనుము.

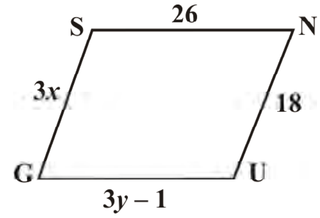
6. ఒక సమాంతర చతుర్భుజంలో రెండు ఆసన్న కోణములు సమానంగా ఉన్నాయి. అయిన సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క ప్రతికోణం కొలతను కనుగొనుము.

7. ప్రక్క పటం HOPE సమాంతర చతుర్భుజంలో x, y మరియు z కొలతలను కనుగొనుము. వాటిని కనుగొనుటలో ఉపయోగించిన ధర్మాలను తెల్పుము ?

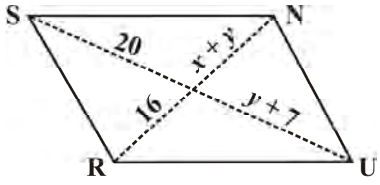


8. క్రింది ఇవ్వబడిన పటాలు GUNS మరియు RUNS సమాంతర చతుర్భుజాలు వానిలో x మరియు y కొలతలను కనుగొనుము. (పొడవులు సెం.మీ. లలో ఉన్నవి.)

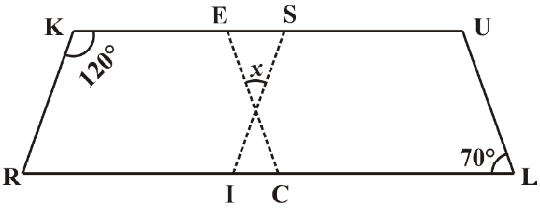
(i)



(ii)



9.



పై చిత్రంలో RISK మరియు CLUE లు సమాంతర చతుర్భుజాలు అయిన x విలువలను కనుగొనుము.

10. Explain how this figure is a trapezium. Which of its two sides are parallel? (Fig 3.32)

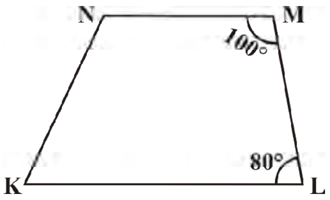


Fig 3.32

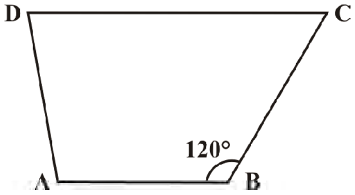


Fig 3.33

11. Find $m\angle C$ in Fig 3.33 if $\overline{AB} \,//\, \overline{DC}$.

12. Find the measure of $\angle P$ and $\angle S$ if $\overline{SP} \,//\, \overline{RQ}$ in Fig 3.34. (If you find $m\angle R$, is there more than one method to find $m\angle P$?)

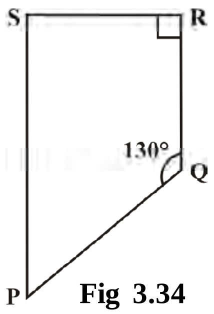


Fig 3.34

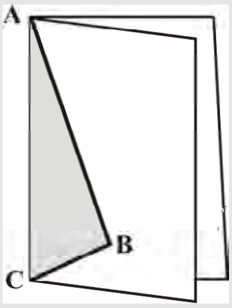
3.5 Some Special Parallelograms

3.5.1 Rhombus

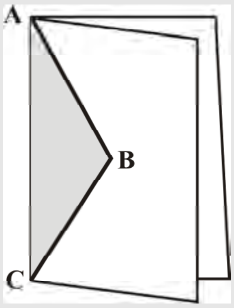
We obtain a Rhombus (which, you will see, is a parallelogram) as a special case of kite (which is not a a parallelogram).

DO THIS

Recall the paper-cut kite you made earlier.



Kite-cut



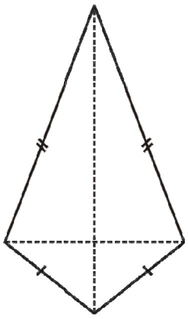
Rhombus-cut

When you cut along ABC and opened up, you got a kite. Here lengths AB and BC were different. If you draw AB = BC, then the kite you obtain is called a **rhombus**.

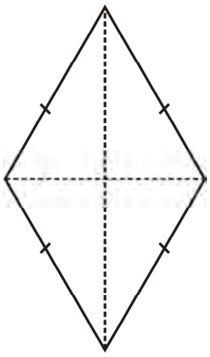
Note that the sides of rhombus are all of same length; this is not the case with the kite.

A rhombus is a quadrilateral with sides of equal length.

Since the opposite sides of a rhombus have the same length, it is also a parallelogram. So, *a rhombus has all the properties of a parallelogram and also that of a kite*. Try to list them out. You can then verify your list with the check list summarised in the book elsewhere.

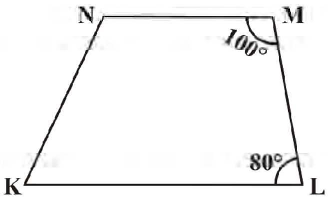


Kite

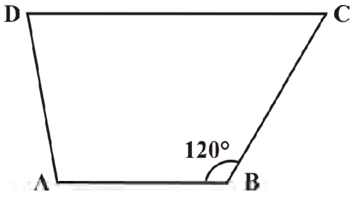


Rhombus

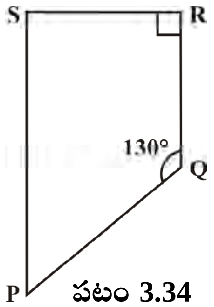
10. పటం 3.32 సమలంబ చతుర్భుజం ఎలా అవుతుందో వివరించండి. ఇందులో ఏ రెండు భుజాలు సమాంతరంగా ఉన్నాయి?



పటం 3.32



పటం 3.33



పటం 3.34

11. పటం 3.33లో $\overline{AB} \,//\, \overline{DC}$ అయితే $m\angle C$ విలువ కనుగొనండి.

12. పటం 3.34లో $\overline{SP} \,//\, \overline{RQ}$ అయితే $\angle P$ మరియు $\angle S$ కొలతలు కనుగొనండి. ($m\angle R$ విలువ కనుగొన్నట్లయితే $m\angle P$ని కనుగొనుటకు ఒకటి కన్నా ఎక్కువ విధానాలు కలవా?)

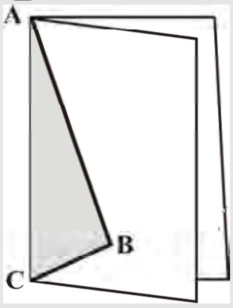
3.5. కొన్ని ప్రత్యేక సమాంతర చతుర్భుజాలు

3.5.1 సమ చతుర్భుజం (రాంబస్)

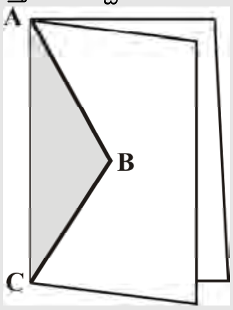
ఒక ప్రత్యేక సందర్భంలో గాలిపటం (ఇది సమాంతర చతుర్భుజం కాదు) నుండి సమచతుర్భుజం (ఇది సమాంతర చతుర్భుజంను పోలి ఉంటుంది) ను పొందుతాము.

ఇవి చేయండి

కాగితంను కత్తిరించి మీరు తయారు చేసిన గాలి పటాలను గుర్తుకు తెచ్చుకోండి.



గాలిపటం ఆకారపు కత్తిరింపు



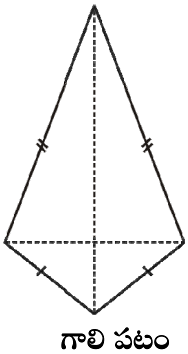
సమచతుర్భుజం ఆకారపు కత్తిరింపు

ABC అంచు వెంబడి కత్తిరించి తెరిచినప్పుడు మీకు గాలిపటం వస్తుంది. ఇక్కడ AB మరియు BC లు రెండు వేర్వేరు కొలతలను కల్గి ఉన్నాయి. AB = BC అయ్యేటట్లుగా గీయ గలిగితే మీరు పొందిన గాలిపటంను **రాంబస్** అంటాం.

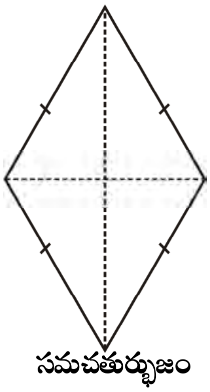
సమ చతుర్భుజంలో భుజాలన్ని సమానమైన పొడవులు కలిగి ఉండుటను గమనించండి, అది గాలిపటం విషయంలో మాత్రం సరికాదు.

ఒక చతుర్భుజంలో భుజాలన్నియు సమానములైనా అది సమ చతుర్భుజం.

ఎదురెదురు భుజాలు సమానంగా ఉండుట వలన సమ చతుర్భుజం, ఒక సమాంతర చతుర్భుజం కూడా అవుతుంది. అందువలన సమ చతుర్భుజం, సమాంతర చతుర్భుజం మరియు గాలిపటం యొక్క అన్ని లక్షణాలు కలిగి ఉంటుంది. వాటి జాబితాలను తయారు చేయడానికి ప్రయత్నించండి. మీ జాబితాను ఈ పుస్తకంలో ఎక్కడైనా ఒకచోట క్రోడీకరించిన జాబితాతో సరిచూడండి.



గాలి పటం



సమచతుర్భుజం

The most useful property of a rhombus is that of its diagonals.

Property: *The diagonals of a rhombus are perpendicular bisectors of one another.*

DO THIS

Take a copy of rhombus. By paper-folding verify if the point of intersection is the mid-point of each diagonal. You may also check if they intersect at right angles, using the corner of a set-square.

Here is an outline justifying this property using logical steps.

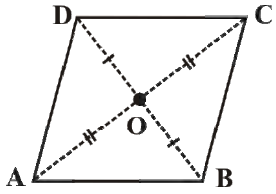


Fig 3.35

ABCD is a rhombus (Fig 3.35). Therefore it is a parallelogram too.

Since diagonals bisect each other, OA = OC and OB = OD.

We have to show that $m\angle AOD = m\angle COD = 90°$

It can be seen that by SSS congruency criterion

$$\Delta AOD \cong \Delta COD$$

Since AO = CO (Why?)
AD = CD (Why?)
OD = OD

Therefore, $m\angle AOD = m\angle COD$

Since $\angle AOD$ and $\angle COD$ are a linear pair,

$$m\angle AOD = m\angle COD = 90°$$

Example 7:

RICE is a rhombus (Fig 3.36). Find x, y, z. Justify your findings.

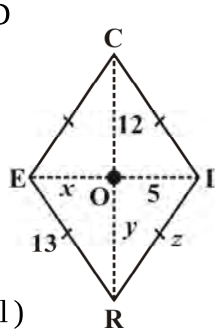


Fig 3.36

Solution:

x = OE	y = OR	z = side of the rhombus
= OI (diagonals bisect)	= OC (diagonals bisect)	= 13 (all sides are equal)
= 5	= 12	

3.5.2 A rectangle

A rectangle is a parallelogram with equal angles (Fig 3.37).

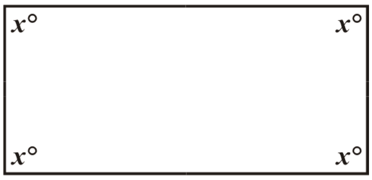


Fig 3.37

What is the full meaning of this definition? Discuss with your friends.

If the rectangle is to be equiangular, what could be the measure of each angle?

Let the measure of each angle be $x°$.

Then $4x° = 360°$ (Why)?

Therefore, $x° = 90°$

Thus each angle of a rectangle is a right angle.

So, a rectangle is a parallelogram in which every angle is a right angle.

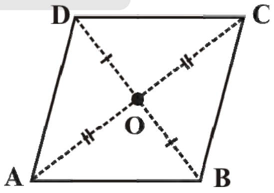
Being a parallelogram, the rectangle has opposite sides of equal length and its diagonals bisect each other.

సమ చతుర్భుజం యొక్క ధర్మాలలో కర్ణాల ధర్మం అత్యంత ఉపయోగకరమైనది.

ధర్మం : *సమ చతుర్భుజం యొక్క కర్ణాలు పరస్పరం లంబ సమద్విఖండన చేసుకుంటాయి.*

ఇవి చేయండి

సమచతుర్భుజాకారపు కాగితము తీసుకోండి. కాగితము మడిచి నప్పుడు కర్ణముల ఖండన బిందువు, ప్రతి కర్ణము యొక్క మధ్య బిందువు అవుతుందో లేదో సరిచూడండి మరియు కర్ణములు లంబంగా ఖండించుకున్నాయో లేదో మూలమట్టములను ఉపయోగించి సరిచూడండి.



పటం 3.35

ఈ లక్షణం నిజమని తార్కిక భావన ద్వారా ఇచ్చట నిరూపించబడినది.
ABCD ఒక సమ చతుర్భుజము (పటం 3.35) కావున అది సమాంతర చతుర్భుజం కూడా అయింది. కర్ణములు పరస్పరం సమద్విఖండన చేసుకుంటాయి. కావున OA=OC మరియు ఇప్పుడు OB=OD $m\angle AOD = m\angle COD = 90°$ అని చూపాలి.
భు.భు.భు సర్వ సమానత్వ నియమం ద్వారా చూపవచ్చు.

$$\Delta AOD \cong \Delta COD$$

AO = CO (ఎందుకు?)
AD = CD (ఎందుకు?)
OD = OD

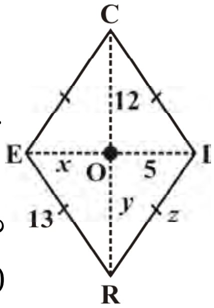
అందువలన, $m\angle AOD = m\angle COD$

$\angle AOD$ మరియు $\angle COD$ లు రేఖీయ ద్వయము కావున

$$m\angle AOD = m\angle COD = 90°$$

ఉదాహరణ 7:

RICE ఒక సమ చతుర్భుజం (పటం 3.36) x, y, z లను కనుగొనుము. మీ సమాధానాన్ని సమర్థించండి.



పటం 3.36

సాధన:

x = OE	y = OR	z = సమ చతుర్భుజం యొక్క భుజం
= OI (కర్ణాల సమద్విఖండన)	= OC (కర్ణాల సమద్విఖండన)	= 13 (అన్ని భుజాలు సమానం)
= 5	= 12	

3.5.2 దీర్ఘచతురస్రం

పటం3.37

ఒక సమాంతర చతుర్భుజంలోని అన్ని కోణాలు సమానమైతే అది దీర్ఘచతురస్రం అగును (పటము 3.37).

ఈ నిర్వచనం యొక్క పూర్తి అర్థమేమిటి? దీని గురించి నీ స్నేహితులతో చర్చించుము.

దీర్ఘచతురస్రంలోని అన్ని కోణాలు సమానమైన ప్రతి కోణం కొలత ఎంత ఉండాలి?

దీర్ఘ చతురస్రం యొక్క ప్రతి కోణం కొలత x^0 అనుకొనుము.

అప్పుడు $4x° = 360°$ (ఎందువలన)?

కాబట్టి, $x° = 90°$

ప్రతి కోణం లంబకోణమయ్యే సమాంతర చతుర్భుజమే దీర్ఘచతురస్రం అవుతుంది.
కనుక, దీర్ఘచతురస్రం యొక్క ప్రతి కోణం లంబ కోణం.

దీర్ఘచతురస్రం, సమాంతర చతుర్భుజం కావున ఎదురెదురు భుజాలు సమానంగా ఉండి దాని కర్ణాలు సమద్విఖండన చేసుకుంటాయి.

In a parallelogram, the diagonals can be of different lengths. (Check this); but surprisingly the rectangle (being a special case) has diagonals of equal length.

Property: *The diagonals of a rectangle are of equal length.*

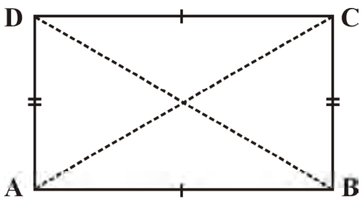


Fig 3.38

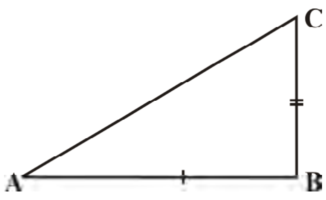


Fig 3.39

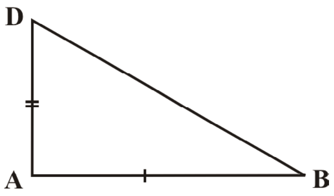


Fig 3.40

This is easy to justify. If ABCD is a rectangle (Fig 3.38), then looking at triangles ABC and ABD separately [(Fig 3.39) and (Fig 3.40) respectively], we have

$$\Delta \text{ABC} \cong \Delta \text{ABD}$$

This is because AB = AB (Common)

BC = AD (Why?)

$m\angle B = m\angle A = 90°$ (Why?)

The congruency follows by SAS criterion.

Thus AC = BD

and *in a rectangle the diagonals, besides being equal in length bisect each other* (Why?)

Example 8: RENT is a rectangle (Fig 3.41). Its diagonals meet at O. Find x, if OR = $2x + 4$ and OT = $3x + 1$.

Solution: $\overline{\text{OT}}$ is half of the diagonal $\overline{\text{TE}}$,

$\overline{\text{OR}}$ is half of the diagonal $\overline{\text{RN}}$.

Diagonals are equal here. (Why?)

So, their halves are also equal.

Therefore $3x + 1 = 2x + 4$

or $x = 3$

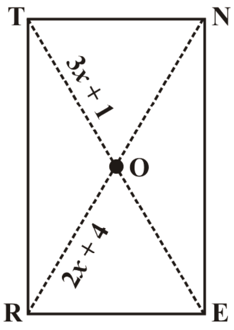


Fig 3.41

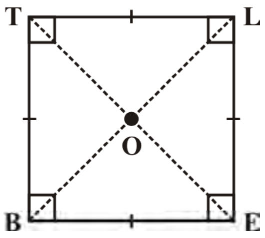
3.5.3 A square

A square is a rectangle with equal sides.

This means a square has all the properties of a rectangle with an additional requirement that all the sides have equal length.

The square, like the rectangle, has diagonals of equal length.

In a rectangle, there is no requirement for the diagonals to be perpendicular to one another, (Check this).



BELT is a square, BE = EL = LT = TB

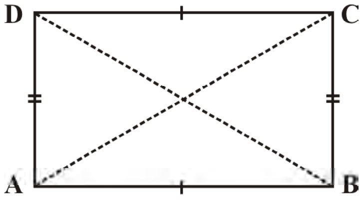
$\angle$B, $\angle$E, $\angle$L, $\angle$T are right angles.

BL = ET and $\overline{\text{BL}} \perp \overline{\text{ET}}$.

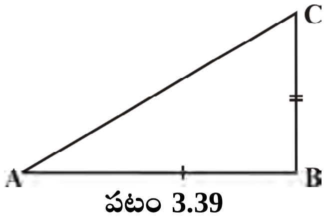
OB = OL and OE = OT.

సమాంతర చతుర్భుజంలో కర్ణాలు విభిన్న పొడవులు కలిగి ఉంటాయి. (సరిచూడండి) కానీ ఆశ్చర్యకరంగా (ఒక ప్రత్యేక సందర్భంలో) దీర్ఘ చతురస్రంలో కర్ణాలు సమాన పొడవులను కలిగి ఉంటాయి.

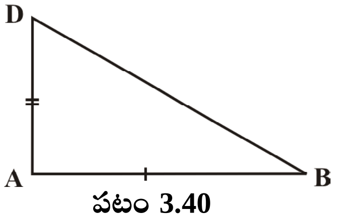
ధర్మం: *దీర్ఘచతురస్రంలో కర్ణములు సమానంగా ఉంటాయి.*



పటం 3.38



పటం 3.39



పటం 3.40

దీనిని నిరూపించడం సులభం ABCD ఒక దీర్ఘచతురస్రం అయినచో (పటం 3.38) త్రిభుజం ABC మరియు త్రిభుజం ABD లను (పటం 3.39 మరియు పటం 3.40) ప్రత్యేకంగా గమనించినప్పుడు

$$\Delta ABC \cong \Delta ABD$$

అది ఏ విధంగా అంటే	$AB = AB$	(ఉమ్మడి భుజం)
	$BC = AD$	(ఎందుకు?)
	$m\angle B = m\angle A = 90°$	(ఎందుకు?)

భు.కో.భు సర్వసమాన నియమాన్ని అనుసరించి,

$$AC = BD$$

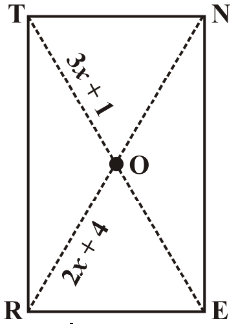
మరియు *దీర్ఘచతురస్రంలో కర్ణములు సమానంగా ఉండుటయే కాక పరస్పరం సమద్విఖండన చేసుకుంటాయి.* (ఎందుకు?)

ఉదాహరణ 8: (పటం 3.41) RENT ఒక దీర్ఘచతురస్రం దీని కర్ణములు బిందువు O వద్ద ఖండించుకుంటాయి. $OR = 2x + 4$ మరియు $OT = 3x + 1$ అయిన x విలువ కనుగొనండి.

సాధన: $\overline{OT}$ భుజం $\overline{TE}$ లో సగం ఉంటుంది. అలాగే $\overline{OR}$ భుజం $\overline{RN}$ లో సగం ఉంటుంది. ఇక్కడ కర్ణాలు సమానం (ఎందుకు?)
కావున వాటి సగాలు కూడా సమానం

కాబట్టి $3x + 1 = 2x + 4$

లేదా $x = 3$



పటం 3.41

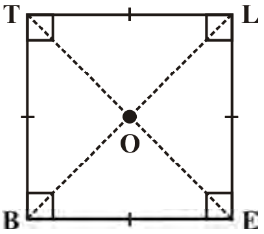
3.5.3 చతురస్రం

చతురస్రం భుజములన్నీ సమానంగా కలిగిన ఒక దీర్ఘ చతురస్రం.

దీని అర్థం చతురస్రం అనేది దీర్ఘచతురస్రం యొక్క లక్షణాలన్నింటిని కలిగి ఉండి వాటితోపాటు భుజాల కొలతలు సమానం అనే ప్రత్యేక లక్షణాన్ని కలిగి ఉంటుంది.

చతురస్రంలో, దీర్ఘచతురస్రంలో వలే కర్ణాలు సమానం.

దీర్ఘచతురస్రంలో కర్ణాలు ఒకదానికొకటి లంబంగా ఉండవలసిన అవసరంలేదు, (గమనించండి).



BELT ఒక చతురస్రం, $BE = EL = LT = TB$
$\angle B, \angle E, \angle L, \angle T$ లు లంబకోణాలు

$BL = ET$ మరియు $\overline{BL} \perp \overline{ET}$.

$OB = OL$ మరియు $OE = OT$.

In a square the diagonals.

(i) bisect one another (square being a parallelogram)
(ii) are of equal length (square being a rectangle) and
(iii) are perpendicular to one another.

Hence, we get the following property.

Property: *The diagonals of a square are perpendicular bisectors of each other.*

DO THIS

Take a square sheet, say PQRS (Fig 3.42).

Fold along both the diagonals. Are their mid-points the same?

Check if the angle at O is 90° by using a set-square.

This verifies the property stated above.

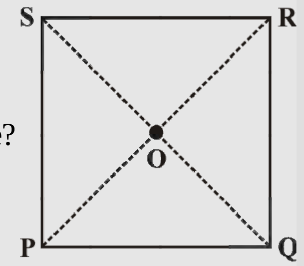


Fig 3.42

We can justify this also by arguing logically:

ABCD is a square whose diagonals meet at O (Fig 3.43).

OA = OC (Since the square is a parallelogram)

By SSS congruency condition, we now see that

Δ AOD $\cong$ Δ COD (How?)

Therefore, $m\angle AOD = m\angle COD$

These angles being a linear pair, each is right angle.

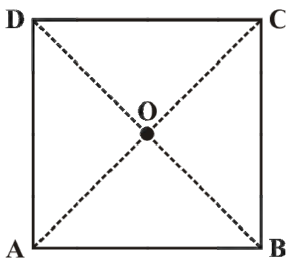
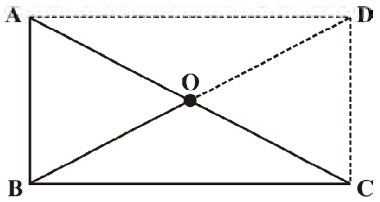


Fig 3.43

EXERCISE 3.4

1. State whether True or False.
   (a) All rectangles are squares
   (b) All rhombuses are parallelograms
   (c) All squares are rhombuses and also rectangles
   (d) All squares are not parallelograms.
   (e) All kites are rhombuses.
   (f) All rhombuses are kites.
   (g) All parallelograms are trapeziums.
   (h) All squares are trapeziums.
2. Identify all the quadrilaterals that have.
   (a) four sides of equal length (b) four right angles
3. Explain how a square is.
   (i) a quadrilateral (ii) a parallelogram (iii) a rhombus (iv) a rectangle
4. Name the quadrilaterals whose diagonals.
   (i) bisect each other (ii) are perpendicular bisectors of each other (iii) are equal
5. Explain why a rectangle is a convex quadrilateral.
6. ABC is a right-angled triangle and O is the mid point of the side opposite to the right angle. Explain why O is equidistant from A, B and C. (The dotted lines are drawn additionally to help you).



చతురస్రంలోని కర్ణాలు.

(i) పరస్పరం సమద్విఖండన చేసుకుంటాయి. (చతురస్రం ఒక సమాంతర చతుర్భుజం కనుక)

(ii) సమానంగా ఉంటాయి (చతురస్రం ఒక దీర్ఘచతురస్రం కనుక) మరియు

(iii) పరస్పరం లంబంగా ఉంటాయి.

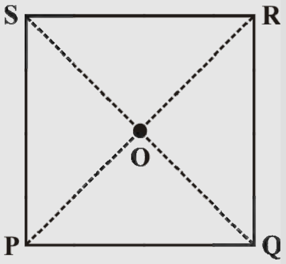
కావున, మనము ఈ క్రింది ధర్మాన్ని పొందగలుగుతాము.

ధర్మం : *చతురస్రంలో కర్ణాలు పరస్పరం లంబ సమద్విఖండన చేసుకుంటాయి*

ఇవి చేయండి

ఒక చతురస్రాకారపు అట్ట PQRS ను తీసుకోండి. (పటము 3.42) వాటి కర్ణముల వెంబడి మడవండి. దాని మధ్య బిందువు ఒకటేనా? O బిందువు వద్ద కోణము 90° ఉందునట్లు మూల మట్టమునుపయోగించి సరిచూడండి.

ఇది పైన చెప్పిన ధర్మాన్ని సరిచూస్తుంది.



పటం 3.42

ఈ ధర్మాన్ని తార్కికంగా కూడా సమర్థించవచ్చు:

ABCD చతురస్రములో కర్ణాలు O బిందువు వద్ద కలుస్తాయి. (పటం 3.43).

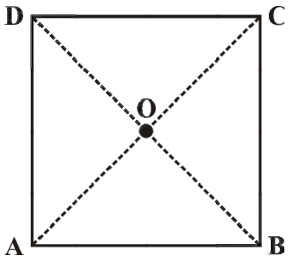
OA =OC (చతురస్రము ఒక సమాంతర చతుర్భుజం కావున)

భు.భు.భు సర్వసమానత్వ నియమం నుండి

$$\Delta AOD \cong \Delta COD \quad \text{(ఎలా?)}$$

అందువలన, $m\angle AOD = m\angle COD$

అయితే ఈ కోణాలు రేఖీయ ద్వయం కావడం వలన, ప్రతీ కోణం లంబకోణం.



పటం 3.43

అభ్యాసం 3.4

1. క్రింది ఇచ్చిన వాక్యాలు సత్యమో, అసత్యమో తెల్పండి.

(a) దీర్ఘచతురస్రాలన్నీ, చతురస్రాలు

(b) సమ చతుర్భుజాలన్నీ సమాంతర చతుర్భుజాలు.

(c) చతురస్రాలన్నీ సమచతుర్భుజాలు మరియు దీర్ఘచతురస్రాలు.

(d) చతురస్రాలన్నీ సమాంతర చతుర్భుజాలు కావు.

(e) గాలి పటాలన్నీ సమచతుర్భుజాలు.

(f) సమచతుర్భుజములన్నీ గాలిపటాలు.

(g) సమాంతర చతుర్భుజాలన్నీ సమలంబ చతుర్భుజాలు.

(h) చతురస్రాలన్నీ సమలంబ చతుర్భుజాలు.

2. క్రింది ధర్మాలను కలిగి ఉన్న చతుర్భుజాలను గుర్తించండి

(a) 4 భుజాలు సమానం (b) 4 లంబ కోణాలు

3. చతురస్రము క్రింది వాటికి ఎలా సరిపోతుందో వివరించండి

(i) చతుర్భుజము (ii) సమాంతర చతుర్భుజం (iii) సమచతుర్భుజం (iv) దీర్ఘచతురస్రం

4. కర్ణాల ఆధారంగా కింది చతుర్భుజాలను పేర్కొనండి.

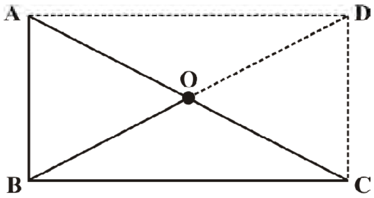
(i) పరస్పరం సమద్విఖండన చేసుకుంటాయి.

(ii) పరస్పరం లంబ సమద్విఖండన చేసుకుంటాయి (iii) సమానంగా ఉంటాయి.

5. దీర్ఘచతురస్రము ఒక కుంభాకార చతుర్భుజము కావడానికి కారణాలు వివరించండి.

6. ABC అనునది ఒక లంబకోణ త్రిభుజం. లంబకోణానికి అభిముఖ భుజం యొక్క మధ్య బిందువు O. A, B మరియు C లకు O బిందువు ఎందుకు సమాన దూరంలో ఉంటుందో వివరించండి.

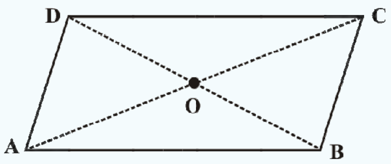
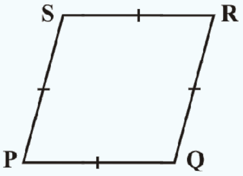
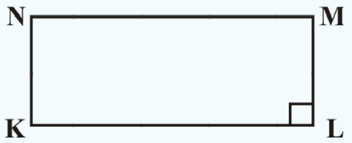
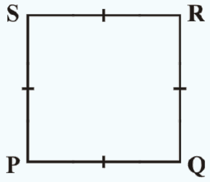
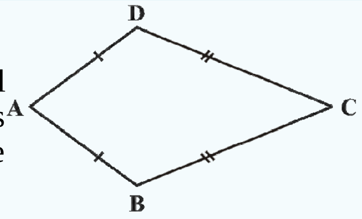
(సహాయము కొరకు చుక్కల గీతలు గీయబడినవి).



THINK, DISCUSS AND WRITE

1. A mason has made a concrete slab. He needs it to be rectangular. In what different ways can he make sure that it is rectangular?
2. A square was defined as a rectangle with all sides equal. Can we define it as rhombus with equal angles? Explore this idea.
3. Can a trapezium have all angles equal? Can it have all sides equal? Explain.

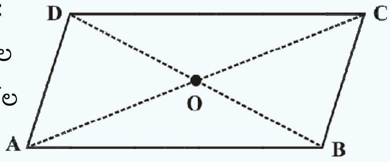
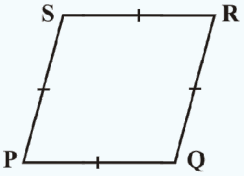
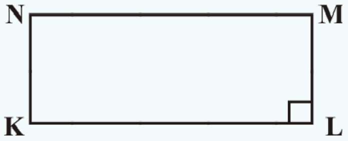
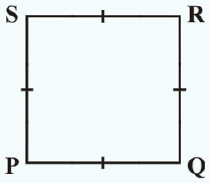
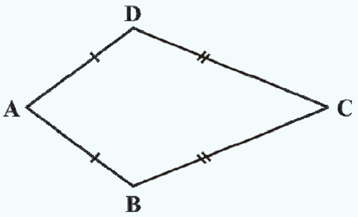
WHAT HAVE WE DISCUSSED?

Quadrilateral	Properties
Parallelogram: A quadrilateral with each pair of opposite sides parallel. 	(1) Opposite sides are equal. (2) Opposite angles are equal. (3) Diagonals bisect one another.
Rhombus: A parallelogram with sides of equal length. 	(1) All the properties of a parallelogram. (2) Diagonals are perpendicular to each other.
Rectangle: A parallelogram with a right angle. 	(1) All the properties of a parallelogram. (2) Each of the angles is a right angle. (3) Diagonals are equal.
Square: A rectangle with sides of equal length. 	All the properties of a parallelogram, rhombus and a rectangle.
Kite: A quadrilateral with exactly two pairs of equal consecutive sides 	(1) The diagonals are perpendicular to one another (2) One of the diagonals bisects the other. (3) In the figure $m\angle B = m\angle D$ but $m\angle A \neq m\angle C$.

ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి

1. ఒక తాపీమేస్త్రి కాంక్రీటు శ్లాబును తయారు చేశాడు. అతనికి అది ఒక దీర్ఘచతురస్రాకారములో ఉండాలి. ఏయే విధానాల ద్వారా అది దీర్ఘచతురస్రాకారమని నిర్ధారించుకుంటాడు?
2. ఒక చతురస్రము సమాన భుజాలు కలిగిన దీర్ఘచతురస్రమని నిర్వచించబడింది. దానిని సమాన కోణాలు కలిగిన సమచతుర్భుజమని నిర్వచించగలవా? మీ ఆలోచలనను విశదీకరించండి.
3. ఒక సమలంబ చతుర్భుజంలో అన్ని కోణాలు సమానమా? అన్ని భుజాలు సమానంగా ఉంటాయా? వివరించండి.

మనం ఏమి చర్చించుకున్నాం?

చతుర్భుజం	ధర్మాలు
సమాంతర చతుర్భుజము: ప్రతి ఎదురెదురు భుజాల జతలు సమాంతరంగా గల చతుర్భుజం 	(1) ఎదురెదురు భుజాలు సమానం. (2) ఎదురెదురు కోణాలు సమానం. (3) కర్ణములు పరస్పరం సమద్విఖండన చేసుకుంటాయి.
సమ చతుర్భుజం: భుజాలన్నీ సమానంగా గల సమాంతర చతుర్భుజం 	(1) సమాంతర చతుర్భుజ ధర్మాలన్నీ వర్తించును. (2) కర్ణములు పరస్పరం లంబంగా ఉంటాయి.
దీర్ఘచతురస్రం: లంబకోణం గల సమాంతర చతుర్భుజం 	(1) సమాంతర చతుర్భుజ ధర్మాలన్నీ వర్తించును. (2) ప్రతి కోణం లంబకోణం. (3) కర్ణములు సమానం.
చతురస్రం: భుజాలన్నీ సమానంగా గల దీర్ఘచతురస్రం 	సమాంతర చతుర్భుజం, సమచతుర్భుజం మరియు దీర్ఘచతురస్రం ధర్మాలన్నీ వర్తించును.
గాలిపటం: ఖచ్చితంగా రెండు జతల వరుస భుజాలు సమానంగా గల చతుర్భుజం. 	(1) కర్ణాలు పరస్పరం లంబంగా ఉంటాయి. (2) ఒక కర్ణం మరొక కర్ణమును సమద్విఖండన చేస్తుంది. (3) ప్రక్క పటంలో $m\angle B = m\angle D$ కానీ $m\angle A \neq m\angle C$.

Practical Geometry

CHAPTER 4

0852CH04

4.1 Introduction

You have learnt how to draw triangles in Class VII. We require three measurements (of sides and angles) to draw a unique triangle.

Since three measurements were enough to draw a triangle, a natural question arises whether four measurements would be sufficient to draw a unique four sided closed figure, namely, a quadrilateral.

DO THIS

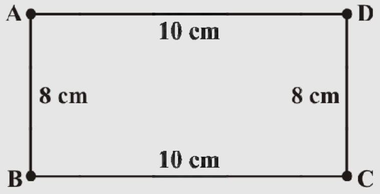


Fig 4.1

Take a pair of sticks of equal lengths, say 10 cm. Take another pair of sticks of equal lengths, say, 8 cm. Hinge them up suitably to get a rectangle of length 10 cm and breadth 8 cm.

This rectangle has been created with the 4 available measurements.

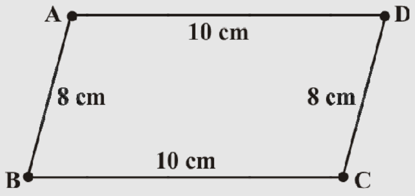


Fig 4.2

Now just push along the breadth of the rectangle. Is the new shape obtained, still a rectangle (Fig 4.2)? Observe that the rectangle has now become a parallelogram. Have you altered the lengths of the sticks? No! The measurements of sides remain the same.

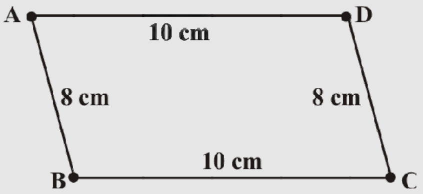


Fig 4.3

Give another push to the newly obtained shape in a different direction; what do you get? You again get a parallelogram, which is altogether different (Fig 4.3), yet the four measurements remain the same.

This shows that 4 measurements of a quadrilateral cannot determine it uniquely. Can 5 measurements determine a quadrilateral uniquely? Let us go back to the activity!

అధ్యాయం 4

ప్రయోగాత్మక జ్యామితి

G4X6T3

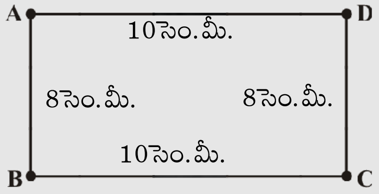
4.1 పరిచయం

7వ తరగతిలో త్రిభుజ నిర్మాణం గురించి నేర్చుకున్నారు. ఏకైక త్రిభుజాన్ని నిర్మించడానికి మనకు మూడు కొలతలు (భుజములు మరియు కోణములు) అవసరం.

త్రిభుజ నిర్మాణానికి మూడు కొలతలు సరిపోతాయి. కనుక నాలుగు భుజాలు కలిగిన ఏకైక సరళ సంవృత పటాన్ని అంటే చతుర్భుజాన్ని నిర్మించడానికి నాలుగు కొలతలు సరిపోతాయా అనే సహజమైన ప్రశ్న వస్తుంది.

ఇవి చేయండి

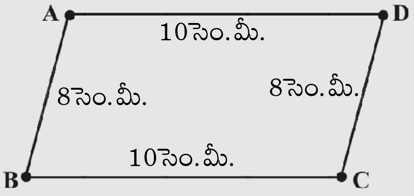
ఒక జత 10 సెం.మీ. పొడవు గల పుల్లలు మరియు మరొక జత 8 సెం.మీ. పొడవు గల పుల్లలు తీసుకోండి. ఈ నాలుగు పుల్లలను 10 సెం.మీ. పొడవు, 8 సెం.మీ. వెడల్పు గల దీర్ఘ చతురస్రాకారంలో ఉండేవిధంగా అమర్చి కట్టండి.



పటం 4.1

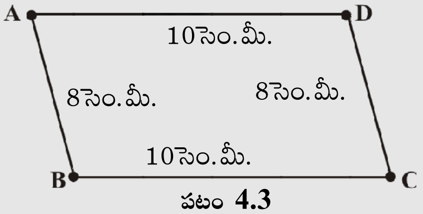
ఇచ్చిన 4 కొలతల నుండి ఈ దీర్ఘచతురస్రం ఏర్పడింది.

ఇప్పుడు ఈ దీర్ఘ చతురస్రం యొక్క వెడల్పు వెంబడి నొక్కండి. కొత్తగా ఏర్పడిన ఆకారం దీర్ఘ చతురస్రంగానే (పటం 4.2) ఉందా? ఇప్పుడు దీర్ఘచతురస్రం, సమాంతర చతుర్భుజంగా మారడాన్ని గమనించండి. పుల్లల కొలతలు మార్చారా? లేదు! వాటి కొలతలు అలాగే ఉన్నాయి.



పటం 4.2

ఇదే విధంగా ఈ సమాంతర చతుర్భుజాన్ని మరొక వైపుకు నొక్కండి. ఏం గమనించారు ? మరలా మరొక విధమైన సమాంతర చతుర్భుజం (పటం 4.3) ఏర్పడింది. ఇప్పుడు కూడా కొలతలు అలాగే ఉన్నాయి.



పటం 4.3

దీన్ని బట్టి ఒక ఏకైక చతుర్భుజ నిర్మాణానికి 4 కొలతలు సరిపోవని తెలుస్తున్నది. 5 కొలతలు ఒక ఏకైక చతుర్భుజానికి సరిపోతాయా? దీనిని తెలుసుకోవడానికి మరలా మొదటి కృత్యాన్ని చేద్దాం.

You have constructed a rectangle with two sticks each of length 10 cm and other two sticks each of length 8 cm. Now introduce another stick of length equal to BD and tie it along BD (Fig 4.4). If you push the breadth now, does the shape change? No! It cannot, without making the figure open. The introduction of the fifth stick has fixed the rectangle uniquely, i.e., there is no other quadrilateral (with the given lengths of sides) possible now.

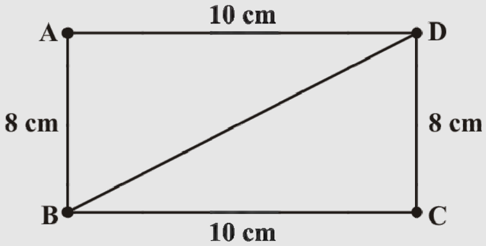


Fig 4.4

Thus, we observe that five measurements can determine a quadrilateral uniquely. But will any five measurements (of sides and angles) be sufficient to draw a unique quadrilateral?

THINK, DISCUSS AND WRITE

Arshad has five measurements of a quadrilateral ABCD. These are AB = 5 cm, ∠A = 50°, AC = 4 cm, BD = 5 cm and AD = 6 cm. Can he construct a unique quadrilateral? Give reasons for your answer.

4.2 Constructing a Quadrilateral

We shall learn how to construct a unique quadrilateral given the following measurements:

- When four sides and one diagonal are given.
- When two diagonals and three sides are given.
- When two adjacent sides and three angles are given.
- When three sides and two included angles are given.
- When other special properties are known.

Let us take up these constructions one-by-one.

4.2.1 When the lengths of four sides and a diagonal are given

We shall explain this construction through an example.

Example 1: Construct a quadrilateral PQRS where PQ = 4 cm, QR = 6 cm, RS = 5 cm, PS = 5.5 cm and PR = 7 cm.

Solution: [A rough sketch will help us in visualising the quadrilateral. We draw this first and mark the measurements.] (Fig 4.5)

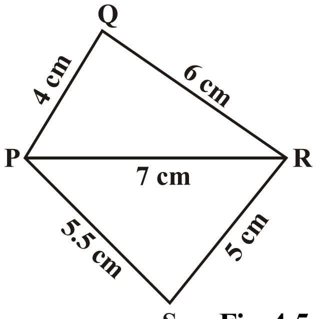
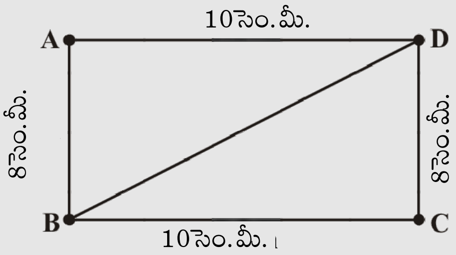


Fig 4.5

10 సెం.మీ. పొడవు గల ఒక జత పుల్లలు మరియు 8 సెం.మీ. పొడవు గల మరొక జత పుల్లలతో ఒక దీర్ఘచతురస్రం ఏర్పరిచితిరి. ఇప్పుడు కర్ణం BD పొడవుకు సమానమైన మరొక పుల్లను కర్ణం BD మీద ఉంచి కట్టండి (పటం 4.4). ఇప్పుడు దీర్ఘచతురస్రం యొక్క వెడల్పు వెంబడి నొక్కండి. ఆకారం మారిందా? లేదు. ఈ పటంలోని పుల్లలను వేరు చేస్తే తప్ప ఇది సాధ్యపడదు. ఐదవ పుల్లను ఉంచడం ద్వారా దీర్ఘ చతుర్రసం మరే ఇతర చతుర్భుజంగా మారకుండా ఏకైకంగా ఉంది. అనగా (ఇచ్చిన కొలతలతో) వేరే ఏ ఇతర చతుర్భుజము ఇప్పుడు సాధ్యం కాదు.



పటం 4.4

అందువలన, ఒక ఏకైక చతుర్భుజాన్ని నిర్మించడానికి 5 కొలతలు అవసరమవుతుందని మనం గమనించాము. అయితే ఏవైనా 5 కొలతలతో (భుజాలు మరియు కోణములు) ఏకైక చతుర్భుజ నిర్మాణం సాధ్యమవుతుందా?

ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి

అర్షద్‌కు ABCD చతుర్భుజం యొక్క 5 కొలతలు ఇవ్వబడ్డాయి. అవి AB = 5 సెం.మీ, $\angle A = 50°$, AC = 4 సెం.మీ, BD = 5 సెం.మీ మరియు AD = 6 సెం.మీ. ఈ కొలతలతో అతను ఏకైక చతుర్భుజాన్ని నిర్మించగలడా? మీ జవాబుకు తగిన కారణాలు తెలపండి?

4.2 చతుర్భుజాలను నిర్మించడం

మనం ఇప్పుడు క్రింది ఇచ్చిన కొలతలతో ఏకైక చతుర్భుజాలను నిర్మించడం ఎలాగో తెలుసుకుందాం:

- నాలుగు భుజాలు మరియు ఒక కర్ణం కొలత ఇచ్చినప్పుడు
- రెండు కర్ణాలు మరియు మూడు భుజాలు ఇచ్చినప్పుడు
- రెండు ఆసన్న భుజాలు మరియు మూడు కోణాలు ఇచ్చినప్పుడు
- మూడు భుజాలు మరియు వాటి మధ్య రెండు కోణాలు ఇచ్చినప్పుడు
- ఇతర ప్రత్యేక ధర్మాలు తెలిసినపుడు

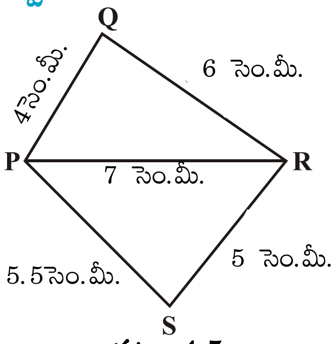
వీటి నిర్మాణాల గురించి ఒక్కొక్కటిగా నేర్చుకుందాం.

4.2.1 నాలుగు భుజాలు మరియు ఒక కర్ణం కొలత ఇచ్చినప్పుడు

ఈ నిర్మాణాన్ని ఒక ఉదాహరణ ద్వారా వివరిద్దాం.

ఉదాహరణ 1: PQ= 4 సెం.మీ., QR= 6 సెం.మీ., RS = 5 సెం.మీ, PS = 5.5 సెం.మీ. మరియు PR = 7 సెం.మీ. కొలతలతో PQRS చతుర్భుజం నిర్మించండి.

సాధన: [కావలసిన చతుర్భుజాన్ని గీయడానికి మనకు దాని చిత్తు పటం సహాయపడుతుంది. మొదట ఒక చిత్తుపటం గీచి కొలతలు గుర్తించాలి.] (పటం 4.5)



పటం 4.5

Step 1 From the rough sketch, it is easy to see that ΔPQR can be constructed using SSS construction condition. Draw ΔPQR (Fig 4.6).

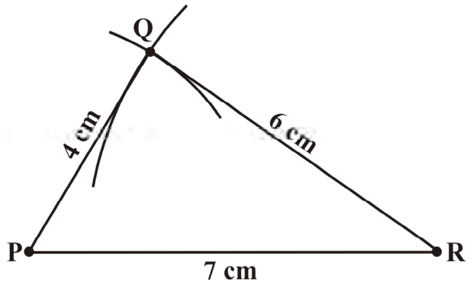


Fig 4.6

Step 2 Now, we have to locate the fourth point S. This 'S' would be on the side opposite to Q with reference to PR. For that, we have two measurements.

S is 5.5 cm away from P. So, with P as centre, draw an arc of radius 5.5 cm. (The point S is somewhere on this arc!) (Fig 4.7).

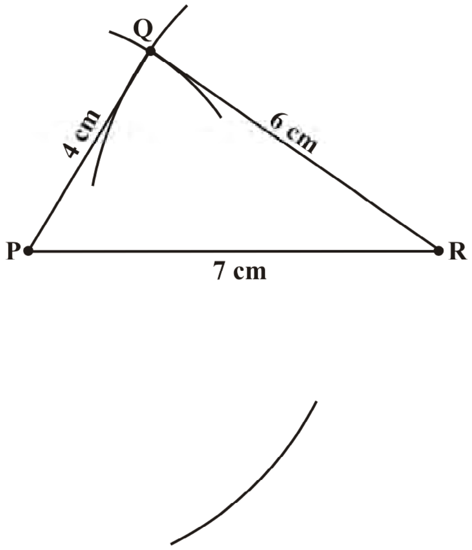


Fig 4.7

Step 3 S is 5 cm away from R. So with R as centre, draw an arc of radius 5 cm (The point S is somewhere on this arc also!) (Fig 4.8).

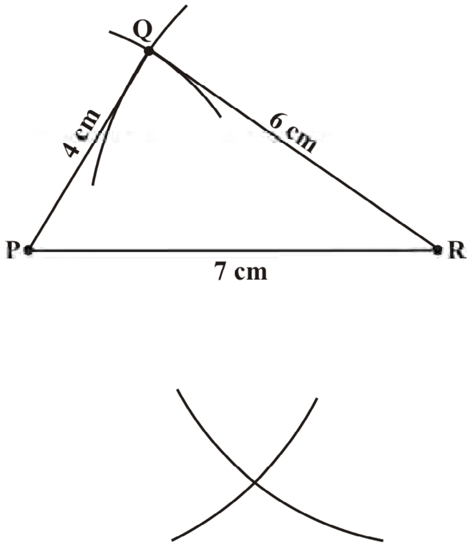
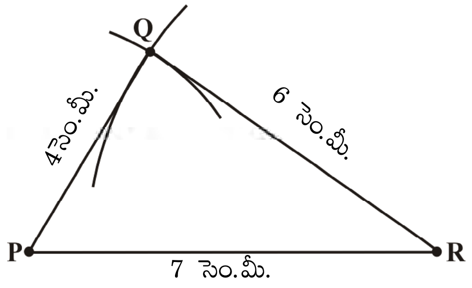


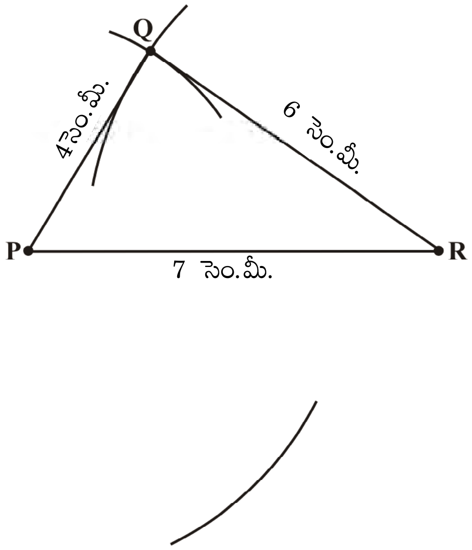
Fig 4.8

సోపానం 1 చిత్తుపటం నుండి భు.భు.భు. నియమం సహాయంతో ΔPQRను సులభంగా నిర్మించవచ్చు. ΔPQR ను నిర్మించండి (పటం 4.6).



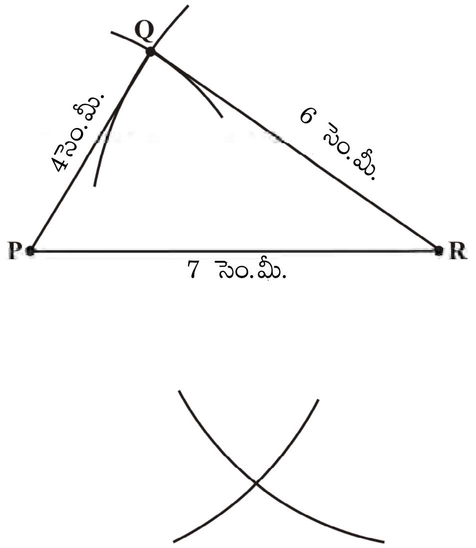
పటం 4.6

సోపానం 2 ఇప్పుడు మనం నాల్గవ బిందువు S ను గుర్తించాలి. 'S' బిందువు, PR భుజము దృష్ట్యా Q బిందువుకు అభిముఖంగా ఉంటుంది. దీనిని గుర్తించడానికి మనకు రెండు కొలతలు ఉన్నాయి.
S బిందువు P నుండి 5.5 సెం.మీ. దూరంలో ఉంది. కనుక P కేంద్రంగా 5.5 సెం.మీ. వ్యాసార్ధంతో ఒక చాపరేఖను గీయాలి. (S బిందువు ఈ చాపరేఖపై ఏదో ఒకచోట ఉంటుంది!) (పటం 4.7).



పటం 4.7

సోపానం 3 S బిందువు R నుండి 5 సెం.మీ. దూరంలో ఉంది. కనుక R కేంద్రంగా 5 సెం.మీ వ్యాసార్ధంతో ఒక చాపరేఖను గీయాలి. (S బిందువు ఈ చాపరేఖపై కూడా ఏదో ఒక చోట ఉంటుంది!) (పటం 4.8).



పటం 4.8

Step 4 S should lie on both the arcs drawn. So it is the point of intersection of the two arcs. Mark S and complete PQRS. PQRS is the required quadrilateral (Fig 4.9).

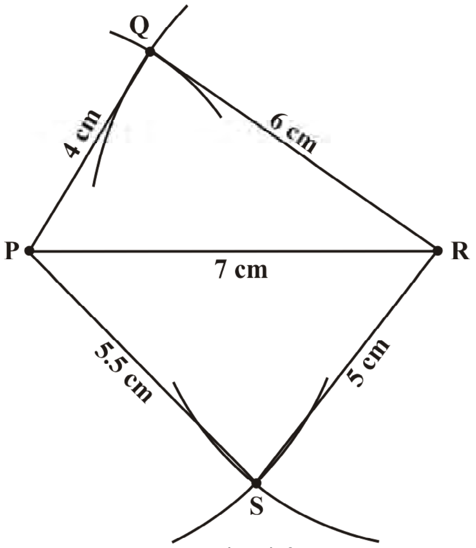


Fig 4.9

THINK, DISCUSS AND WRITE

(i) We saw that 5 measurements of a quadrilateral can determine a quadrilateral uniquely. Do you think any five measurements of the quadrilateral can do this?

(ii) Can you draw a parallelogram BATS where BA = 5 cm, AT = 6 cm and AS = 6.5 cm? Why?

(iii) Can you draw a rhombus ZEAL where ZE = 3.5 cm, diagonal EL = 5 cm? Why?

(iv) A student attempted to draw a quadrilateral PLAY where PL = 3 cm, LA = 4 cm, AY = 4.5 cm, PY = 2 cm and LY = 6 cm, but could not draw it. What is the reason?
[**Hint:** Discuss it using a rough sketch].

EXERCISE 4.1

1. Construct the following quadrilaterals.

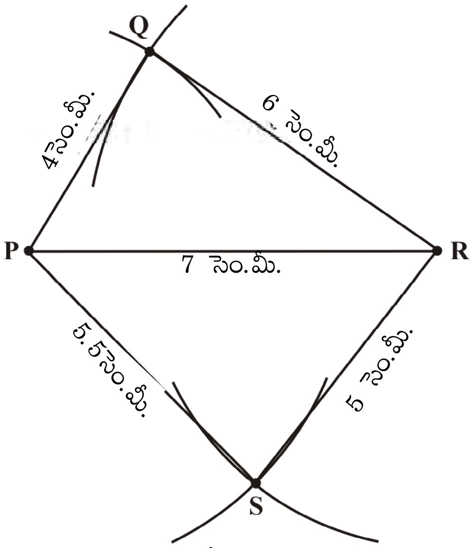
(i) Quadrilateral ABCD.
AB = 4.5 cm
BC = 5.5 cm
CD = 4 cm
AD = 6 cm
AC = 7 cm

(ii) Quadrilateral JUMP
JU = 3.5 cm
UM = 4 cm
MP = 5 cm
PJ = 4.5 cm
PU = 6.5 cm

(iii) Parallelogram MORE
OR = 6 cm
RE = 4.5 cm
EO = 7.5 cm

(iv) Rhombus BEST
BE = 4.5 cm
ET = 6 cm

సోపానం 4: S బిందువు గీచిన రెండు చాపరేఖలపై ఉండాలి కాబట్టి అది రెండు చాపరేఖల ఖండన బిందువు. దానిని S బిందువుగా గుర్తించాలి మరియు PQRS ను పూర్తి చేయాలి. ఇప్పుడు PQRS మనకు కావలసిన చతుర్భుజం (పటం 4.9).



పటం 4.9

ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి

(i) 5 కొలతలతో ఏకైక చతుర్భుజాన్ని నిర్మించవచ్చని తెలుసుకున్నాం. ఏవైనా 5 కొలతలతో ఈ ఏకైక చతుర్భుజం నిర్మించడం సాధ్యమని నీవు అనుకుంటున్నావా?

(ii) BA = 5 సెం.మీ, AT = 6 సెం.మీ మరియు AS = 6.5 సెం.మీ ఉండునట్లు సమాంతర చతుర్భుజం BATS నిర్మించగలరా ? ఏవిధంగా?

(iii) ZE = 3.5 సెం.మీ , కర్ణం EL = 5 సెం.మీ గల రాంబస్ ZEAL ను నిర్మించగలరా? ఏవిధంగా?

(iv) ఒక విద్యార్థి PL = 3 సెం.మీ , LA = 4 సెం.మీ, AY = 4.5 సెం.మీ, PY = 2 సెం.మీ మరియు LY = 6 సెం.మీ. ఉండునట్లు చతుర్భుజం PLAY ను నిర్మించడానికి ప్రయత్నించాడు. అయితే అది సాధ్యం కాలేదు. కారణమేమి? [**సూచన:** ఒక చిత్తుపటం సహాయంతో చర్చించండి].

అభ్యాసం - 4.1

1. కింది చతుర్భుజాలు నిర్మించండి.

(i) చతుర్భుజం ABCD
AB = 4.5 సెం.మీ.
BC = 5.5 సెం.మీ.
CD = 4 సెం.మీ.
AD = 6 సెం.మీ.
AC = 7 సెం.మీ.

(ii) చతుర్భుజం JUMP
JU = 3.5 సెం.మీ.
UM = 4 సెం.మీ.
MP = 5 సెం.మీ.
PJ = 4.5 సెం.మీ.
PU = 6.5 సెం.మీ.

(iii) సమాంతర చతుర్భుజం MORE
OR = 6 సెం.మీ.
RE = 4.5 సెం.మీ.
EO = 7.5 సెం.మీ.

(iv) రాంబస్ BEST
BE = 4.5 సెం.మీ.
ET = 6 సెం.మీ.

4.2.2 When two diagonals and three sides are given

When four sides and a diagonal were given, we first drew a triangle with the available data and then tried to locate the fourth point. The same technique is used here.

Example 2: Construct a quadrilateral ABCD, given that BC = 4.5 cm, AD = 5.5 cm, CD = 5 cm the diagonal AC = 5.5 cm and diagonal BD = 7 cm.

Solution:

Here is the rough sketch of the quadrilateral ABCD (Fig 4.10). Studying this sketch, we can easily see that it is possible to draw Δ ACD first (How?).

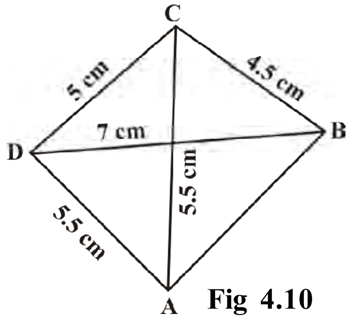


Fig 4.10

Step 1 Draw Δ ACD using SSS construction (Fig 4.11). (We now need to find B at a distance of 4.5 cm from C and 7 cm from D).

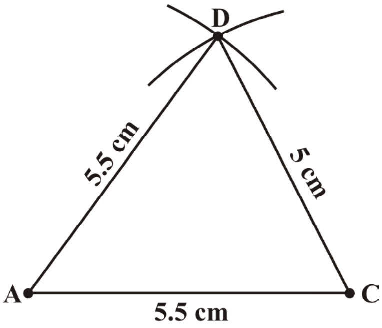


Fig 4.11

Step 2 With D as centre, draw an arc of radius 7 cm. (B is somewhere on this arc) (Fig 4.12).

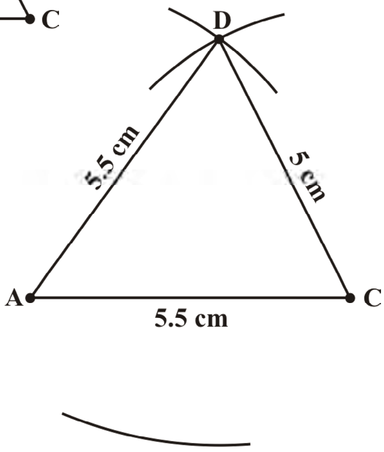


Fig 4.12

Step 3 With C as centre, draw an arc of radius 4.5 cm (B is somewhere on this arc also) (Fig 4.13).

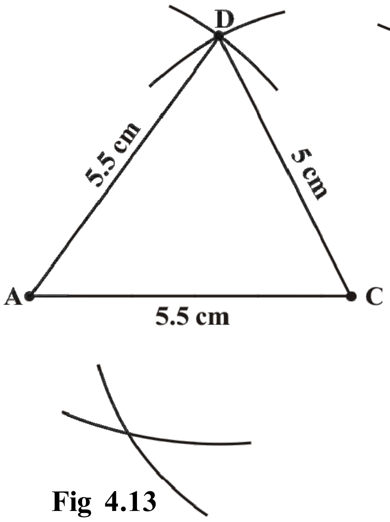


Fig 4.13

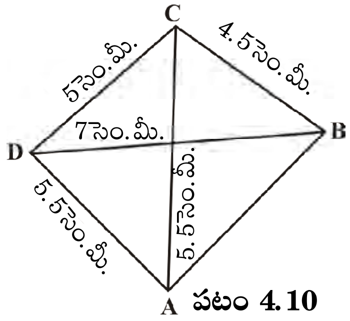
4.2.2 రెండు కర్ణాలు మరియు మూడు భుజాలు ఇచ్చినప్పుడు

నాలుగు భుజాలు మరియు ఒక కర్ణం ఇచ్చినప్పుడు మొదట అనుకూలంగా ఉండే కొలతలతో ఒక త్రిభుజం నిర్మించి, ఆ తరువాత నాల్గవ బిందువును గుర్తించడానికి ప్రయత్నించాము. అదే విధానాన్ని ఇక్కడ కూడా అనుసరిస్తాం.

ఉదాహరణ 2: BC = 4.5 సెం.మీ, AD = 5.5 సెం.మీ, CD = 5 సెం.మీ కర్ణం AC = 5.5 సెం.మీ మరియు కర్ణం BD =7 సెం.మీ ఉండునట్లు ABCD చతుర్భుజాన్ని నిర్మించండి?

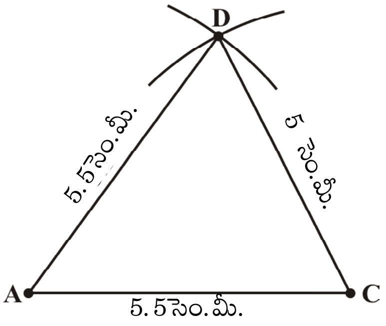
సాధన:

ఇక్కడున్న చిత్తుపటంతో చతుర్భుజం ABCD ఉంది (పటం 4.10). దీని నుండి మొదట ΔACD నిర్మించవచ్చని సులభంగా తెలుసుకోవచ్చును (ఎలా?).



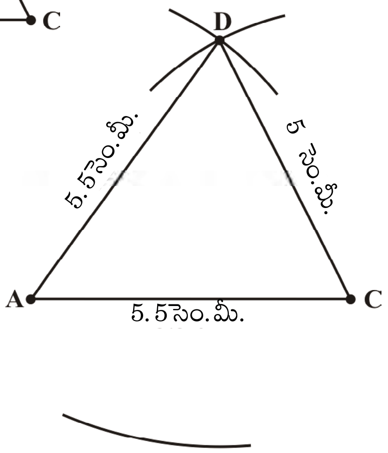
పటం 4.10

సోపానం 1: భు.భు.భు. నిర్మాణం ఆధారంగా ΔACD నిర్మించాలి (పటం 4.11). (ఇప్పుడు C బిందువు నుండి 4.5 సెం.మీ. మరియు D బిందువు నుండి 7 సెం.మీ. దూరంలో ఉన్న B బిందువును కనుగొనాలి).



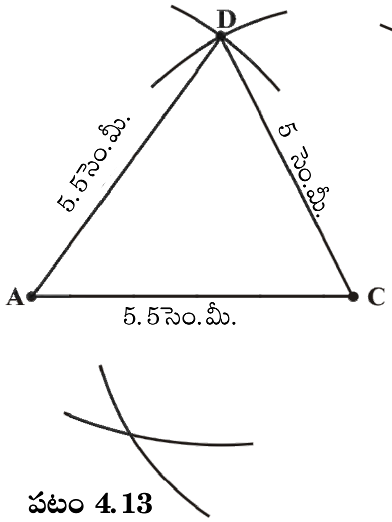
పటం 4.11

సోపానం 2: D కేంద్రంగా 7 సెం.మీ. వ్యాసార్థంతో ఒక చాపరేఖను గీయాలి. (B బిందువు ఈ చాపరేఖ పై ఏదో ఒక చోట ఉంటుంది) (పటం 4.12).



పటం 4.12

సోపానం 3: C కేంద్రంగా 4.5 సెం.మీ వ్యాసార్థంతో ఒక చాపరేఖను గీయాలి . (B బిందువు ఈ చాపరేఖపై ఏదో ఒక చోట ఉంటుంది) (పటం 4.13).



పటం 4.13

Step 4 Since B lies on both the arcs, B is the point intersection of the two arcs. Mark B and complete ABCD. ABCD is the required quadrilateral (Fig 4.14).

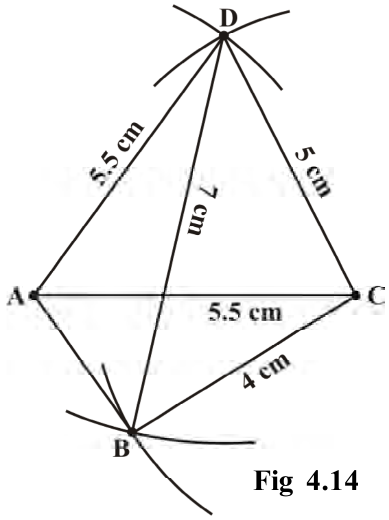


Fig 4.14

THINK, DISCUSS AND WRITE

1. In the above example, can we draw the quadrilateral by drawing Δ ABD first and then find the fourth point C?
2. Can you construct a quadrilateral PQRS with PQ = 3 cm, RS = 3 cm, PS = 7.5 cm, PR = 8 cm and SQ = 4 cm? Justify your answer.

EXERCISE 4.2

1. Construct the following quadrilaterals.

(i) quadrilateral LIFT

LI = 4 cm

IF = 3 cm

TL = 2.5 cm

LF = 4.5 cm

IT = 4 cm

(ii) Quadrilateral GOLD

OL = 7.5 cm

GL = 6 cm

GD = 6 cm

LD = 5 cm

OD = 10 cm

(iii) Rhombus BEND

BN = 5.6 cm

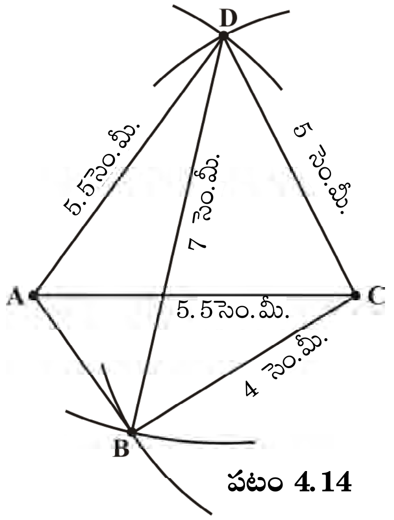
DE = 6.5 cm

4.2.3 When two adjacent sides and three angles are known

As before, we start with constructing a triangle and then look for the fourth point to complete the quadrilateral.

Example 3: Construct a quadrilateral MIST where MI = 3.5 cm, IS = 6.5 cm, ∠M = 75°, ∠I = 105° and ∠S = 120°.

సోపానం 4 B బిందువు గీచిన రెండు చాపరేఖలపై ఉంటుంది కనుక ఆ రెండు చాపరేఖల ఖండన బిందువు అవుతుంది.
B బిందువును గుర్తించి ABCD ని పూర్తి చేయాలి. ఇప్పుడు ABCD మనకు కావలసిన చతుర్భుజం అగును (పటం 4.14).



పటం 4.14

ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి

1. పై ఉదాహరణలో, మొదట Δ ABD ని నిర్మించి, తరువాత నాల్గవ బిందవు C ని కనుగొనడం ద్వారా చతుర్భుజం నిర్మించడం సాధ్యమా?
2. PQ=3 సెం.మీ, RS=3 సెం.మీ., PS=7.5 సెం.మీ., PR=8 సెం.మీ. మరియు SQ=4 సెం.మీ.గా ఉండునట్లు PQRS చతుర్భుజంను నిర్మించడం సాధ్యమా? మీ సమాధానాన్ని సమర్థించండి.

అభ్యాసం 4.2

1. కింది చతుర్భుజాలు నిర్మించండి.

(i) చతుర్భుజం LIFT
LI = 4 సెం.మీ.
IF = 3 సెం.మీ.
TL = 2.5 సెం.మీ.
LF = 4.5 సెం.మీ.
IT = 4 సెం.మీ.

(ii) చతుర్భుజం GOLD
OL = 7.5 సెం.మీ.
GL = 6 సెం.మీ.
GD = 6 సెం.మీ.
LD = 5 సెం.మీ.
OD = 10 సెం.మీ.

(iii) రాంబస్ BEND
BN = 5.6 సెం.మీ.
DE = 6.5 సెం.మీ.

4.2.3 రెండు ఆసన్న భుజాలు మరియు మూడు కోణాలు ఇచ్చినప్పుడు

ఇంతకు ముందువలే, ఇక్కడ కూడా మనం మొదట ఒక త్రిభుజం నిర్మించిన తరువాత నాల్గవ బిందువును కనుగొని చతుర్భుజాన్ని పూర్తిచేద్దాం.

ఉదాహరణ 3: MI = 3.5 సెం.మీ., IS = 6.5 సెం.మీ., $\angle M = 75°$, $\angle I = 105°$ మరియు $\angle S = 120°$ గల MIST చతుర్భుజంను నిర్మించండి.

Solution:

Here is a rough sketch that would help us in deciding our steps of construction. We give only hints for various steps (Fig 4.15).

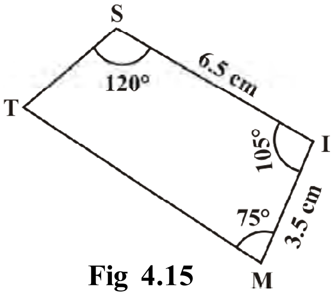


Fig 4.15

Step 1 How do you locate the points? What choice do you make for the base and what is the first step? (Fig 4.16)

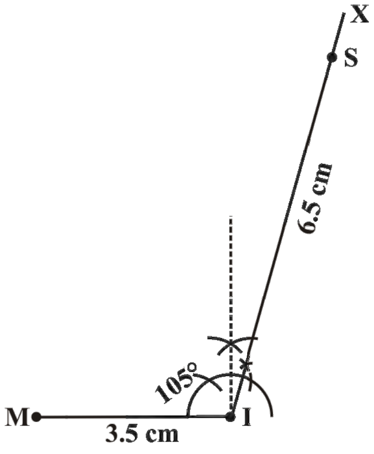


Fig 4.16

Step 2 Make $\angle ISY = 120°$ at S (Fig 4.17).

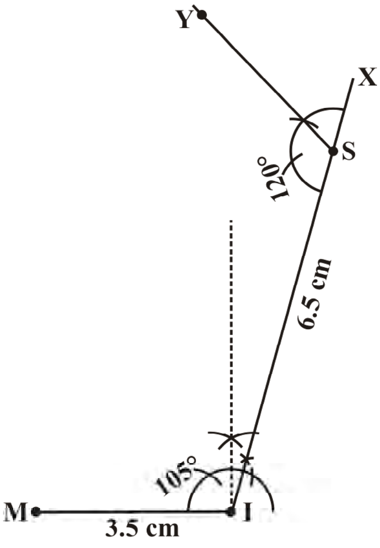
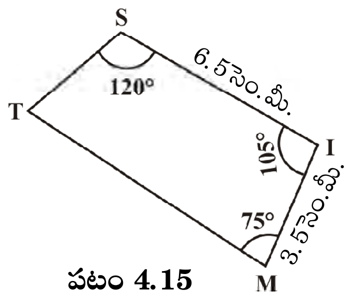


Fig 4.17

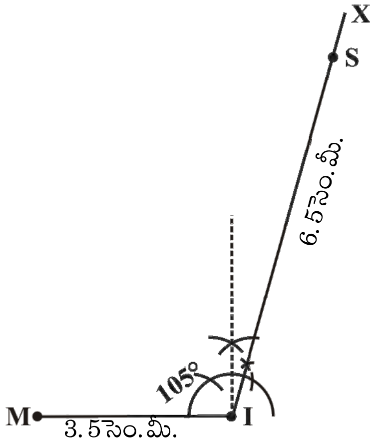
సాధన:

ఈ నిర్మాణంలో వివిధ సోపానాలు నిర్ధారించడానికి చిత్తుపటం మనకు సహాయపడుతుంది. వివిధ సోపానాలకు మనం సూచనలు మాత్రమే ఇస్తున్నాం (పటం 4.15).



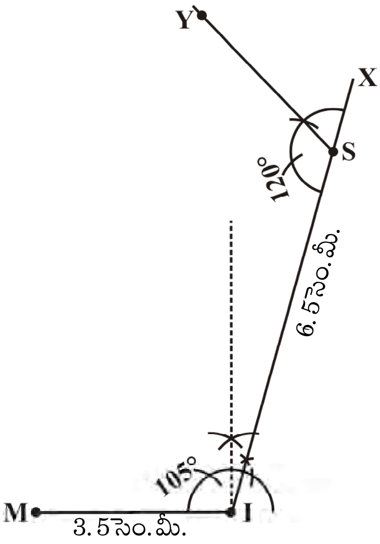
పటం 4.15

సోపానం 1 బిందువులను ఎలా గుర్తిస్తారు? దేనిని భూమిగా ఎంపిక చేసుకోవాలి మరియు మొదటి సోపానం ఏది? (పటం 4.16).



పటం 4.16

సోపానం 2 బిందువు S వద్ద $\angle ISY = 120°$ కోణం గీయండి (పటం 4.17).



పటం 4.17

Step 3 Make ∠IMZ = 75° at M. (where will SY and MZ meet?) Mark that point as T. We get the required quadrilateral MIST (Fig 4.18).

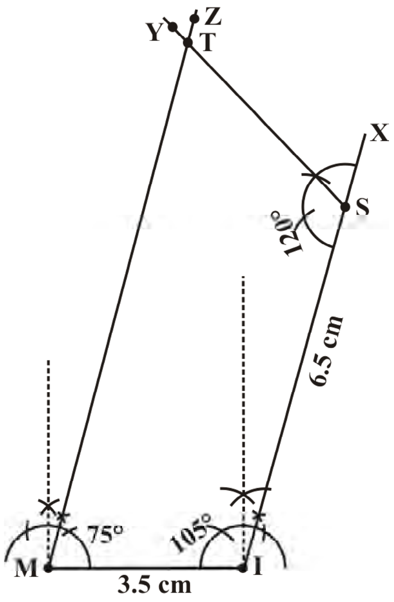


Fig 4.18

THINK, DISCUSS AND WRITE

1. Can you construct the above quadrilateral MIST if we have 100° at M instead of 75°?
2. Can you construct the quadrilateral PLAN if PL = 6 cm, LA = 9.5 cm, ∠P = 75°, ∠L =150° and ∠A = 140°? (**Hint:** Recall angle-sum property).
3. In a parallelogram, the lengths of adjacent sides are known. Do we still need measures of the angles to construct as in the example above?

EXERCISE 4.3

1. Construct the following quadrilaterals.

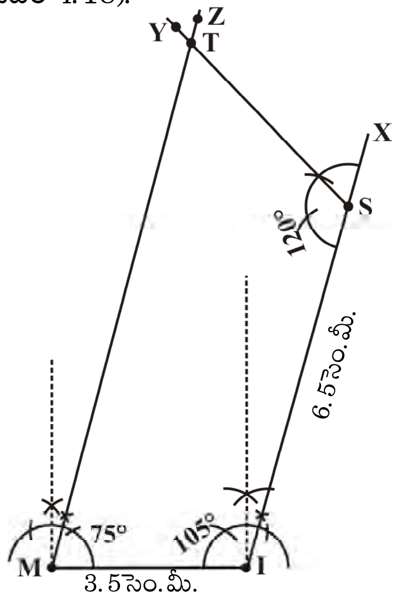
(i) Quadrilateral MORE
MO = 6 cm
OR = 4.5 cm
∠M = 60°
∠O = 105°
∠R = 105°

(ii) Quadrilateral PLAN
PL = 4 cm
LA = 6.5 cm
∠P = 90°
∠A = 110°
∠N = 85°

(iii) Parallelogram HEAR
HE = 5 cm
EA = 6 cm
∠R = 85°

(iv) Rectangle OKAY
OK = 7 cm
KA = 5 cm

సోపానం 3 బిందువు M వద్ద $\angle IMZ = 75°$ కోణం గీయండి. (SY మరియు MZ ఎక్కడ ఖండించుకుంటున్నాయి) ఈ ఖండన బిందువు Tగా గుర్తించాలి. ఇప్పుడు మనకు కావలసిన చతుర్భుజం MIST ఏర్పడుతుంది (పటం 4.18).



పటం 4.18

ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి

1. పై చతుర్భుజం MIST లో M వద్ద 75° కోణం బదులు 100° ఉంటే దానిని నిర్మించడం సాధ్యమేనా?
2. PL=6సెం.మీ., LA=9.5సెం.మీ., $\angle P=75°$, $\angle L=150°$ మరియు $\angle A=140°$ ఉండునట్లు చతుర్భుజం PLAN నిర్మించగలరా? (**సూచన:** కోణాల మొత్తం ధర్మాన్ని గుర్తుకు తెచ్చుకోండి).
3. ఒక సమాంతర చతుర్భుజంలో దాని ఆసన్న భుజాలు తెలిసినప్పటికీ పై ఉదాహరణలో నిర్మాణం చేయడానికి కోణాల కొలతలు కూడా అవసరమా?

అభ్యాసం 4.3

1. కింది చతుర్భుజాలు నిర్మించండి.

(i) చతుర్భుజం MORE
MO = 6 సెం.మీ.
OR = 4.5 సెం.మీ.
$\angle M = 60°$
$\angle O = 105°$
$\angle R = 105°$

(ii) చతుర్భుజం PLAN
PL = 4 సెం.మీ.
LA = 6.5 సెం.మీ.
$\angle P = 90°$
$\angle A = 110°$
$\angle N = 85°$

(iii) సమాంతర చతుర్భుజం HEAR
HE = 5 సెం.మీ.
EA = 6 సెం.మీ.
$\angle R = 85°$

(iv) దీర్ఘచతురస్రం OKAY
OK = 7 సెం.మీ.
KA = 5 సెం.మీ.

4.2.4 When three sides and two included angles are given

Under this type, when you draw a rough sketch, note carefully the "included" angles in particular.

Example 4: Construct a quadrilateral ABCD, where AB = 4 cm, BC = 5 cm, CD = 6.5 cm and ∠B = 105° and ∠C = 80°.

Solution:

We draw a rough sketch, as usual, to get an idea of how we can start off. Then we can devise a plan to locate the four points (Fig 4.19).

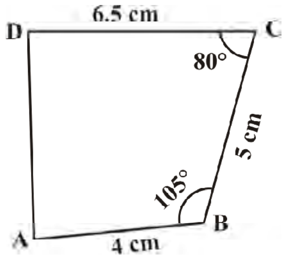


Fig 4.19

Step 1 Start with taking BC = 5 cm on B. Draw an angle of 105° along BX. Locate A 4 cm away on this. We now have B, C and A (Fig 4.20).

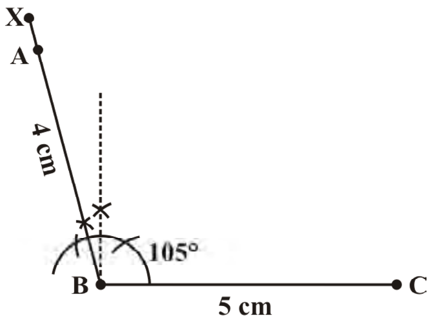


Fig 4.20

Step 2 The fourth point D is on CY which is inclined at 80° to BC. So make ∠BCY = 80° at C on BC (Fig 4.21).

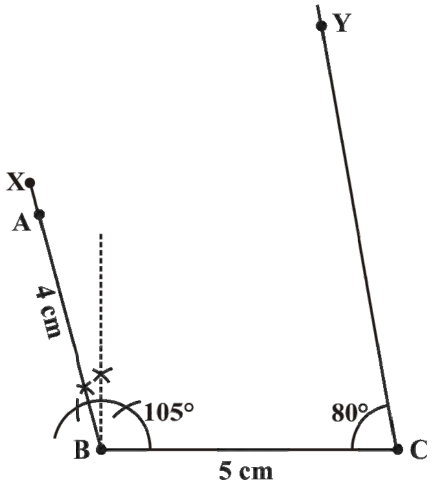
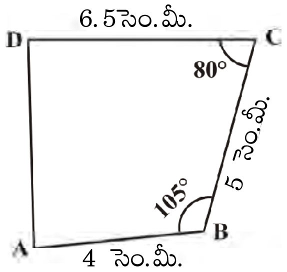


Fig 4.21

4.2.4 మూడు భుజాలు మరియు వాటి మధ్య రెండు కోణాలు ఇచ్చినప్పుడు

ఈ విధమైన నిర్మాణంలో మొదట గీచిన చిత్తుపటంలో ఇవ్వబడిన భుజాల మధ్య కోణాలను జాగ్రత్తగా గమనించాలి.

ఉదాహరణ4: AB = 4 సెం.మీ, BC = 5 సెం.మీ., CD=6.5సెం.మీ. మరియు $\angle B = 105°$ మరియు $\angle C = 80°$ గా ఉండునట్లు చతుర్భుజం ABCD ను నిర్మించండి.

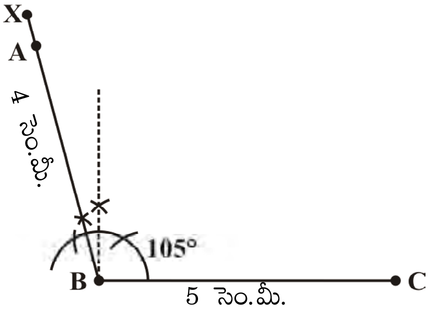


పటం 4.19

సాధన:

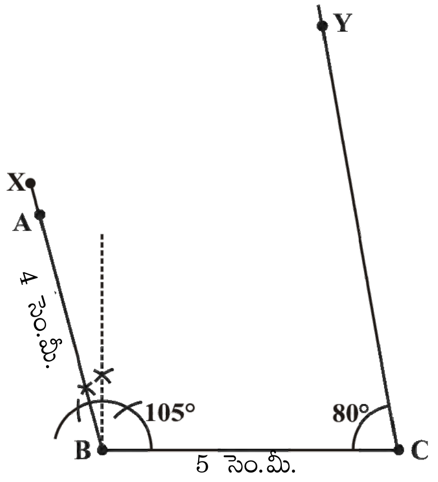
ఇంతకు ముందులాగే, ఒక చిత్తుపటం గీచి ప్రారంభిస్తాం. తరువాత మనం నాలుగు బిందువులను గుర్తించడానికి అనుసరించాల్సిన పద్ధతిని రూపొందించాం (పటం 4.19).

సోపానం 1 B తో ప్రారంభించి BC = 5 సెం.మీ. ఒక రేఖా ఖండం గీయాలి. BX వెంబడి 105° కోణంను గీయండి. దానిపై B నుండి 4 సెం.మీ. దూరంలో A బిందువును గుర్తించాలి. ఇప్పుడు మనకు B, C మరియు A బిందువులు ఉన్నాయి (పటం 4.20).



పటం 4.20

సోపానం 2 నాల్గవ బిందువు D, BC తో 80° కోణం చేస్తూ CY పైన ఉంటుంది. కాబట్టి BC పై C వద్ద $\angle BCY = 80°$ కోణంను నిర్మించాలి (పటం 4.21).



పటం 4.21

Step 3 D is at a distance of 6.5 cm on CY. With C as centre, draw an arc of length 6.5 cm. It cuts CY at D (Fig 4.22).

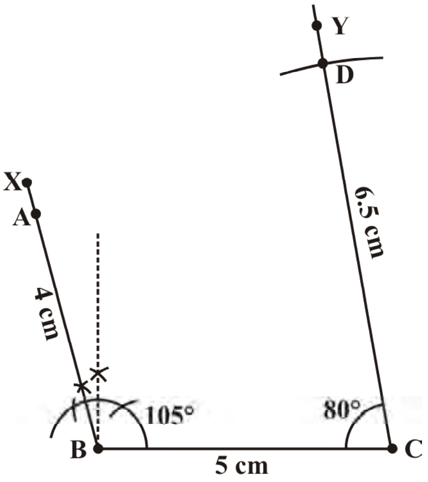


Fig 4.22

Step 4 Complete the quadrilateral ABCD. ABCD is the required quadrilateral (Fig 4.23).

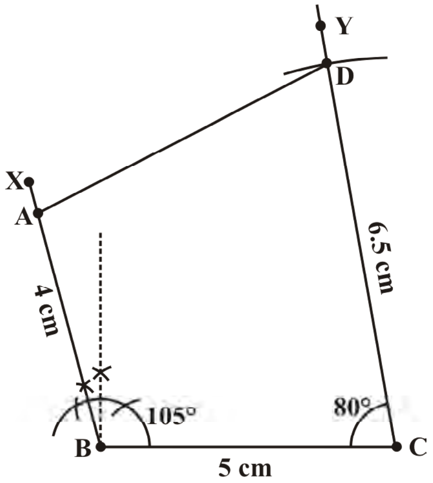


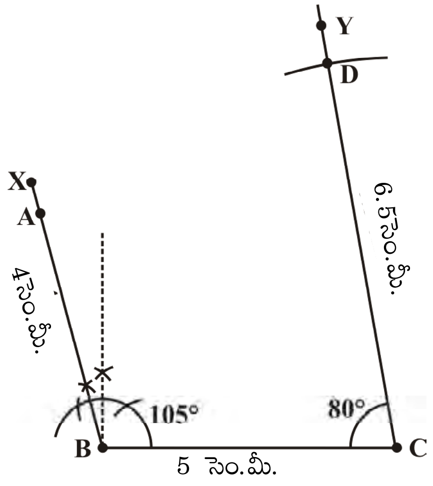
Fig 4.23

THINK, DISCUSS AND WRITE

1. In the above example, we first drew BC. Instead, what could have been be the other starting points?
2. We used some five measurements to draw quadrilaterals so far. Can there be different sets of five measurements (other than seen so far) to draw a quadrilateral? The following problems may help you in answering the question.
   (i) Quadrilateral ABCD with AB = 5 cm, BC = 5.5 cm, CD = 4 cm, AD = 6 cm and $\angle B = 80°$.
   (ii) Quadrilateral PQRS with PQ = 4.5 cm, $\angle P = 70°$, $\angle Q = 100°$, $\angle R = 80°$ and $\angle S = 110°$.

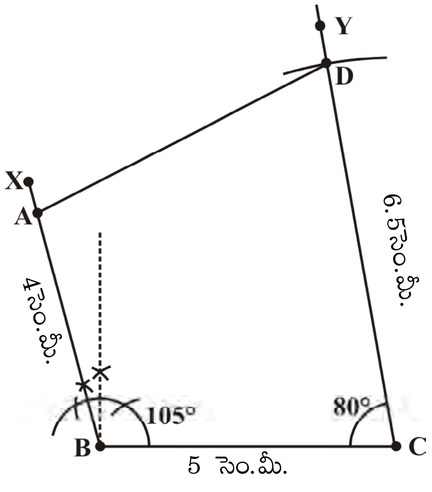
   Construct a few more examples of your own to find sufficiency/insufficiency of the data for construction of a quadrilateral.

సోపానం 3 CY పై 6.5 సెం.మీ దూరంలో D వుంటుంది. C కేంద్రంగా 6.5 సెం.మీ. పొడవుగల చాపాన్ని గీయాలి. అది CY ను D వద్ద ఖండించినది (పటం 4.22).



పటం 4.22

సోపానం 4 ఇప్పుడు ABCD చతుర్భుజాన్ని పూర్తి చేయండి. ఇదే మనకు కావలసిన ABCD చతుర్భుజం (పటం 4.23).



పటం 4.23

ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి

1. పై ఉదాహరణలో మొదట BC ని గీశాం. దానికి బదులు వేరే బిందువుల నుండి ప్రారంభిస్తే ఏమయ్యేది?
2. చతుర్భుజ నిర్మాణం కొరకు మనం ఇప్పటి వరకు ఐదు కొలతలు ఉపయోగించాం. వేరే ఏదైనా ఐదు కొలతలు (ఇప్పటి వరకు మనం చూడని వేరే కొలతలు) ఉపయోగించుకొని మనం చతుర్భుజం నిర్మించగలమా? ఈ ప్రశ్నకు సమాధానమివ్వడానికి కింది సమస్యలు సహాయపడతాయి.
   (i) AB = 5 సెం.మీ., BC = 5.5 సెం.మీ., CD = 4 సెం.మీ., AD = 6 సెం.మీ. మరియు $\angle B = 80°$ ఉండునట్లు చతుర్భుజం ABCD.
   (ii) PQ = 4.5 సెం.మీ., $\angle P = 70°$, $\angle Q = 100°$, $\angle R = 80°$ మరియు $\angle S = 110°$ ఉండునట్లు చతుర్భుజం PQRS.

చతుర్భుజ నిర్మాణానికి ఇచ్చిన కొలతలు సరిపోతాయా, సరిపోవా అని తెలుసుకోవడానికి మీరే మరికొన్ని ఉదాహరణలు తీసుకొని గీయండి.

EXERCISE 4.4

1. Construct the following quadrilaterals.

(i) Quadrilateral DEAR
DE = 4 cm
EA = 5 cm
AR = 4.5 cm
$\angle E = 60°$
$\angle A = 90°$

(ii) Quadrilateral TRUE
TR = 3.5 cm
RU = 3 cm
UE = 4 cm
$\angle R = 75°$
$\angle U = 120°$

4.3 Some Special Cases

To draw a quadrilateral, we used 5 measurements in our work. Is there any quadrilateral which can be drawn with less number of available measurements? The following examples examine such special cases.

Example 5: Draw a square of side 4.5 cm.

Solution: Initially it appears that only one measurement has been given. Actually we have many more details with us, because the figure is a special quadrilateral, namely a square. We now know that each of its angles is a right angle. (See the rough figure) (Fig 4.24)

This enables us to draw Δ ABC using SAS condition. Then D can be easily located. Try yourself now to draw the square with the given measurements.

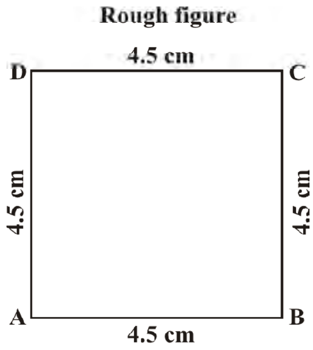


Fig 4.24

Example 6: Is it possible to construct a rhombus ABCD where AC = 6 cm and BD = 7 cm? Justify your answer.

Solution: Only two (diagonal) measurements of the rhombus are given. However, since it is a rhombus, we can find more help from its properties.

The diagonals of a rhombus are perpendicular bisectors of one another.

So, first draw AC = 7 cm and then construct its perpendicular bisector. Let them meet at 0. Cut off 3 cm lengths on either side of the drawn bisector. You now get B and D.

Draw the rhombus now, based on the method described above (Fig 4.25).

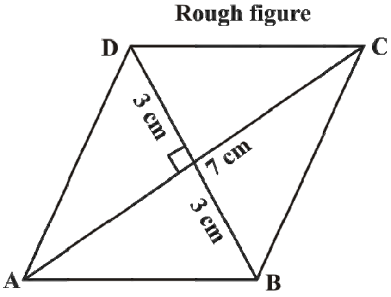


Fig 4.25

TRY THESE

1. How will you construct a rectangle PQRS if you know only the lengths PQ and QR?
2. Construct the kite EASY if AY = 8 cm, EY = 4 cm and SY = 6 cm (Fig 4.26). Which properties of the kite did you use in the process?

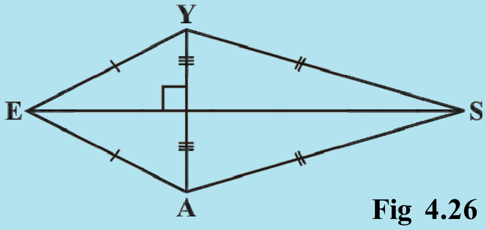


Fig 4.26

అభ్యాసం 4.4

1. కింది చతుర్భుజాలు నిర్మించండి.

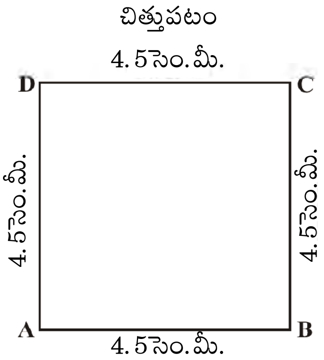
(i) చతుర్భుజం DEAR
DE = 4 సెం.మీ.
EA = 5 సెం.మీ.
AR = 4.5 సెం.మీ.
$\angle E = 60°$
$\angle A = 90°$

(ii) చతుర్భుజం TRUE
TR = 3.5 సెం.మీ.
RU = 3 సెం.మీ.
UE = 4 సెం.మీ.
$\angle R = 75°$
$\angle U = 120°$

4.3 కొన్ని ప్రత్యేక సందర్భాలు

మనం ఇప్పటివరకు ఒక చతుర్భుజాన్ని నిర్మించడానికి 5 కొలతలు ఉపయోగించాము. 5 కంటే తక్కువ కొలతలు ఇచ్చినపుడు మనం ఏదైనా చతుర్భుజాన్ని నిర్మించగలమా? క్రింది ఉదాహరణలు అలాంటి కొన్ని ప్రత్యేక సందర్భాలను వివరిస్తున్నాయి.

ఉదాహరణ 5 : 4.5 సెం.మీ. భుజం గల చతురస్రం నిర్మించండి.

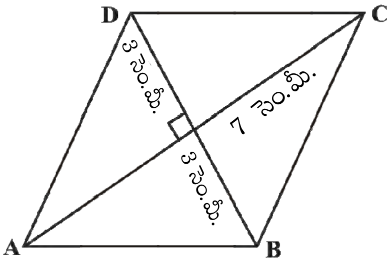


పటం 4.24

సాధన : మనకు సమస్యలో ఒకే ఒక కొలత 4.5 సెం.మీ ఇచ్చినట్లుగా కనిపిస్తోంది. కానీ నిజానికి మనకు ఇంకా ఎక్కువ వివరాలు తెలుస్తాయి. ఎందుకనగా మనం నిర్మించబోయేది ఒక ప్రత్యేకమైన చతుర్భుజం. అదొక 'చతురస్రం'. అందులో ప్రతి కోణం లంబకోణం అవుతుంది. చిత్తుపటం చూడండి (పటం 4.24).
దీని వలన మనకు భు. కో. భు. నియమం ద్వారా Δ ABC ను నిర్మించడానికి వీలవుతుంది. తరువాత నాల్గవ బిందువు D ను సులభంగా గుర్తించవచ్చును. ఇప్పుడు చతురస్రాన్ని మీరే గీయడానికి ప్రయత్నించండి.

ఉదాహరణ 6 : AC = 6 సెం.మీ మరియు BD = 7 సెం.మీ ఉండునట్లు ABCD రాంబస్ నిర్మించడం సాధ్యమేనా? మీ సమాధానాన్ని సమర్థించండి.

సాధన : కావలసిన రాంబస్ యొక్క రెండు (కర్ణాల) కొలతలు మాత్రం ఇవ్వబడ్డాయి. అయితే అది రాంబస్ అయినందున దాని ధర్మాల నుండి ఎక్కువ వివరాలను పొందవచ్చును. రాంబస్ లో కర్ణాలు పరస్పరం లంబ సమద్విఖండన చేసుకుంటాయి.

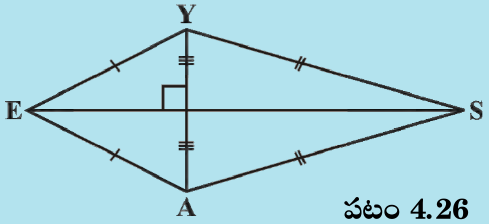


పటం 4.25

అందువలన, మొదట AC = 7 సెం.మీ. రేఖాఖండం గీయాలి. తరువాత AC భుజానికి లంబసమద్విఖండన రేఖ గీచి, ఖండన బిందువు 'O'ను గుర్తించాలి. 'O' కేంద్రంగా లంబసమద్విఖండన రేఖపై ఇరువైపులా 3సెం.మీ. వ్యాసార్థంతో చాపరేఖలు గీచి, ఖండన బిందువులు B, D లను గుర్తించాలి.
ఇప్పుడు పైన తెలిపిన విధంగా రాంబస్‌ను నిర్మించండి (పటం 4.25).

ప్రయత్నించండి

1. PQ మరియు QR భుజాల పొడవులు మాత్రమే తెలిసినపుడు PQRS దీర్ఘచతురస్రాన్ని ఎలా నిర్మిస్తారు?
2. AY= 8 సెం.మీ, EY = 4 సెం.మీ. మరియు SY = 6 సెం.మీ. ఉండునట్లు గాలిపటం EASY ను నిర్మించండి (పటం 4.26)? ఈ ప్రక్రియలో మీరు గాలిపటం యొక్క ఏయే ధర్మాలు ఉపయోగించారు?



పటం 4.26

EXERCISE 4.5

Draw the following.

1. The square READ with RE = 5.1 cm.
2. A rhombus whose diagonals are 5.2 cm and 6.4 cm long.
3. A rectangle with adjacent sides of lengths 5 cm and 4 cm.
4. A parallelogram OKAY where OK = 5.5 cm and KA = 4.2 cm. Is it unique?

WHAT HAVE WE DISCUSSED?

1. Five measurements can determine a quadrilateral uniquely.
2. A quadrilateral can be constructed uniquely if the lengths of its four sides and a diagonal is given.
3. A quadrilateral can be constructed uniquely if its two diagonals and three sides are known.
4. A quadrilateral can be constructed uniquely if its two adjacent sides and three angles are known.
5. A quadrilateral can be constructed uniquely if its three sides and two included angles are given.

అభ్యాసం 4.5

క్రింది చతుర్భుజాలు నిర్మించండి.

1. RE = 5.1 సెం.మీ. భుజం గల చతురస్రం READ.
2. 6.4 సెం.మీ. మరియు 5.2 సెం.మీ. కర్ణాలు గల రాంబస్
3. ఆసన్న భుజాల పొడవులు 5 సెం.మీ. మరియు 4 సెం.మీ. గల దీర్ఘచతురస్రం
4. OK = 5.5 సెం.మీ. మరియు KA = 4.2 సెం.మీ. ఉండునట్లు సమాంతర చతుర్భుజం OKAY ఇది ఏకైకమా?

మనం ఏమి చర్చించుకున్నాం?

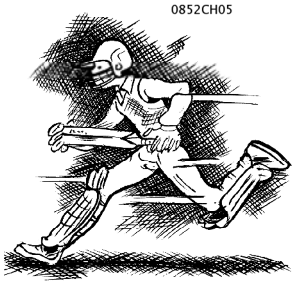
1. ఏకైక చతుర్భుజ నిర్మాణానికి ఐదు కొలతలు అవసరం.
2. నాలుగు భుజాలు మరియు ఒక కర్ణం కొలత ఇచ్చినప్పుడు ఏకైక చతుర్భుజాన్ని నిర్మించవచ్చు.
3. రెండు కర్ణాలు మరియు మూడు భుజాలు ఇచ్చినప్పుడు ఏకైక చతుర్భుజాన్ని నిర్మించవచ్చు.
4. రెండు ఆసన్న భుజాలు మరియు మూడు కోణాలు ఇచ్చినప్పుడు ఏకైక చతుర్భుజాన్ని నిర్మించవచ్చు.
5. మూడు భుజాలు మరియు వాటి మధ్య కోణాలు ఇచ్చినప్పుడు ఏకైక చతుర్భుజాన్ని నిర్మించవచ్చు.

Data Handling

CHAPTER 5

0852CH05

5.1 Looking for Information



In your day-to-day life, you might have come across information, such as:

(a) Runs made by a batsman in the last 10 test matches.

(b) Number of wickets taken by a bowler in the last 10 ODIs.

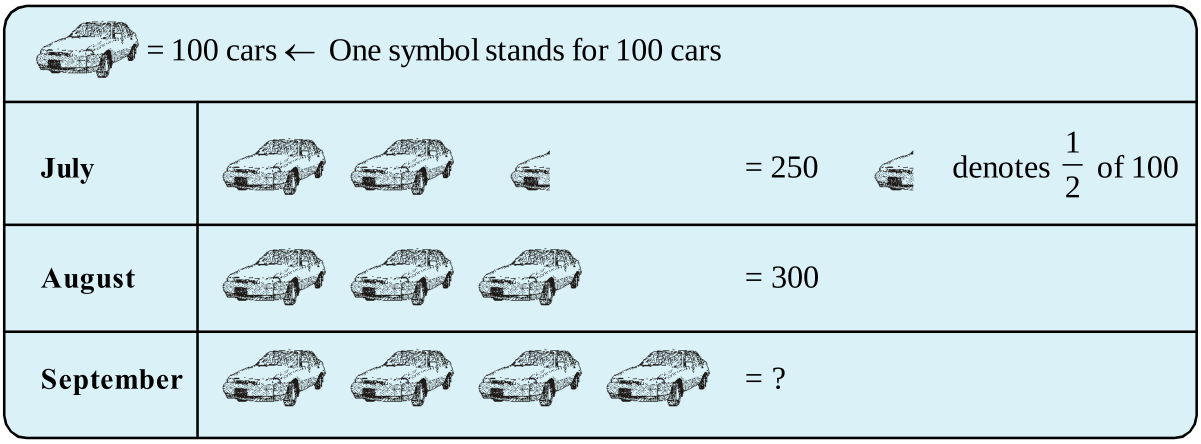
(c) Marks scored by the students of your class in the Mathematics unit test.

(d) Number of story books read by each of your friends etc.

The information collected in all such cases is called **data**. Data is usually collected in the context of a situation that we want to study. For example, a teacher may like to know the average height of students in her class. To find this, she will write the heights of all the students in her class, organise the data in a systematic manner and then interpret it accordingly.

Sometimes, data is represented **graphically** to give a clear idea of what it represents. Do you remember the different types of graphs which we have learnt in earlier classes?

1. A Pictograph: Pictorial representation of data using symbols.



(i) How many cars were produced in the month of July?

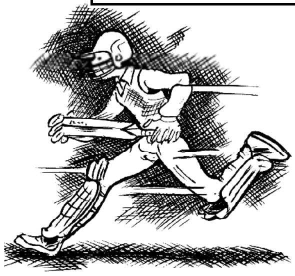
(ii) In which month were maximum number of cars produced?

దత్తాంశ నిర్వహణ

అధ్యాయం
5

L5B6J9

5.1. సమాచార సేకరణ



నిత్య జీవితంలో మీరు ఈ క్రింది విధమైన సమాచార వివరాలు చూసే ఉంటారు.

(a) ఒక బ్యాట్స్ మెన్ గత 10 టెస్టులలో చేసిన పరుగులు.

(b) ఒక బౌలర్ గత 10 వన్డే మ్యాచులలో తీసిన వికెట్లు.

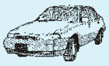
(c) మీ తరగతిలోని విద్యార్థులు గణిత యూనిట్ పరీక్షలో సాధించిన మార్కులు

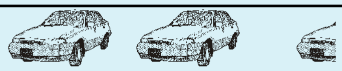
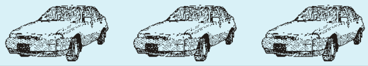
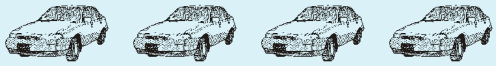
(d) మీ స్నేహితులలో ప్రతి ఒక్కరు చదివిన కథల పుస్తకాల సంఖ్య మొదలైనవి.

పై అన్ని సందర్భాలలో సేకరించిన సమాచారాన్ని **దత్తాంశం** అని అంటారు. మనం అధ్యయనం చేస్తున్న సందర్భానికి అనుగుణంగా దత్తాంశాన్ని సేకరించడం జరుగుతుంది.
ఉదాహరణకు, ఒక ఉపాధ్యాయురాలు తన తరగతిలోని పిల్లల సరాసరి ఎత్తు కనుగొనాలి అనుకున్నారు దాని కొరకు ఆమె తన తరగతిలోని విద్యార్థులందరి ఎత్తులను రాసుకొని దానిని క్రమబద్ధమైన విధానంలో నిర్వహిస్తారు మరియు దానికి అనుగుణమైన వివరణ ఇస్తారు.

ఒక్కొక్కసారి దత్తాంశాన్ని స్పష్టంగా ప్రదర్శించుటకు వాటిని **రేఖాచిత్ర రూపం**లో చూపిస్తారు. క్రింది తరగతులలో మీరు నేర్చుకున్న వివిధ రకాల గ్రాఫులు గుర్తున్నాయా?

1. **పటచిత్రం:** దత్తాంశాన్ని గుర్తులు (బొమ్మలు) రూపంలో ప్రదర్శించుట

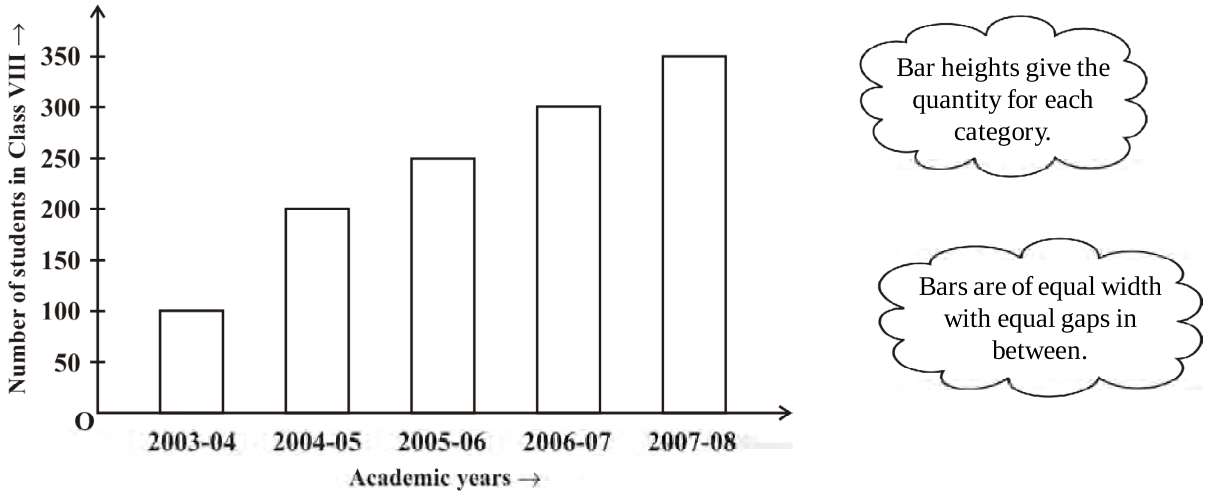
 = 100 కార్లు ← ఒక గుర్తు వంద కార్లను చూపుతుంది.

జూలై		= 250 అనేది వందలో అర్ధభాగం సూచించును
ఆగష్టు		= 300
సెప్టెంబర్		= ?

(i) జూలై నెలలో ఎన్ని కార్లు ఉత్పత్తి చేయబడ్డాయి?

(ii) ఏ నెలలో ఎక్కువ కార్లు ఉత్పత్తి చేయబడ్డాయి?

2. **A bar graph:** A display of information using bars of uniform width, their heights being proportional to the respective values.



(i) What is the information given by the bar graph?

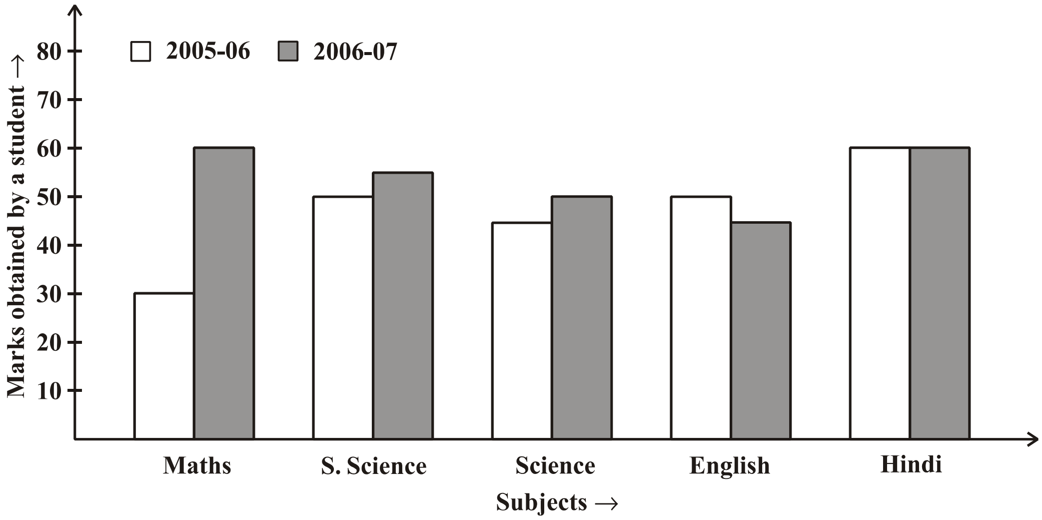
(ii) In which year is the increase in the number of students maximum?

(iii) In which year is the number of students maximum?

(iv) State whether true or false:

'The number of students during 2005-06 is twice that of 2003-04.'

3. **Double Bar Graph:** A bar graph showing two sets of data simultaneously. It is useful for the comparison of the data.



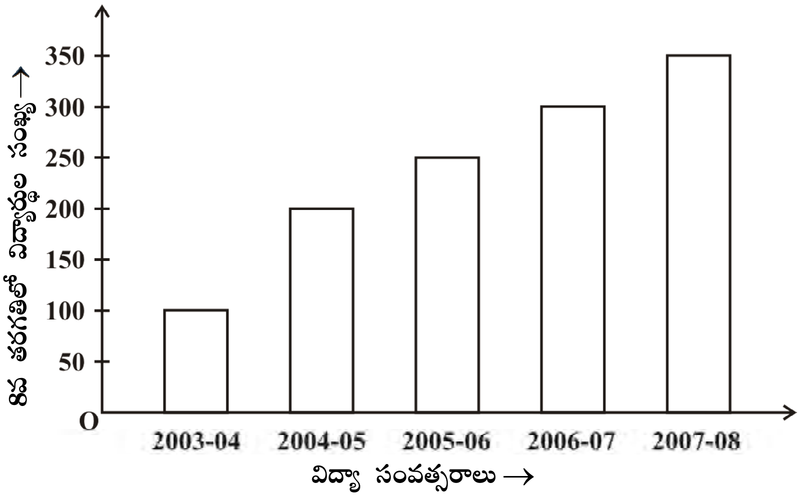
(i) What is the information given by the double bar graph?

(ii) In which subject has the performance improved the most?

(iii) In which subject has the performance deteriorated?

(iv) In which subject is the performance at par?

2. కమ్మీ రేఖాచిత్రం (దిమ్మె రేఖాచిత్రం): ఒకే వెడల్పు కలిగి, వాటి దత్తాంశాలకు అనుపాతంలో ఎత్తులను కలిగి ఉండే కమ్మీల రూపంలో సమాచారాన్ని చూపించే చిత్రాలు.



కమ్మీల ఎత్తులు, ప్రతి విభాగం యొక్క పరిమాణంను తెలియజేయును.

కమ్మీలు సమాన వెడల్పు కలిగి ఉండి, వాటి మధ్య సమాన ఖాళీలను కలిగి ఉంటాయి.

(i) ఈ కమ్మీ రేఖాచిత్రం తెలియజేస్తున్న సమాచారం ఏమిటి?

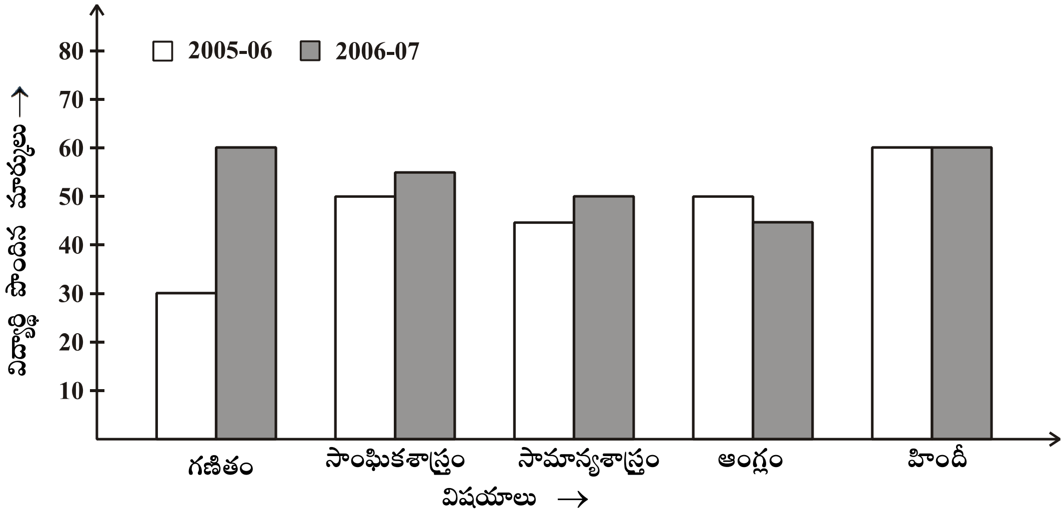
(ii) ఏ సంవత్సరంలో విద్యార్థుల సంఖ్యలోని పెరుగుదల గరిష్ఠంగా ఉంది?

(iii) ఏ సంవత్సరంలో విద్యార్థుల సంఖ్య అత్యధికంగా ఉంది?

(iv) ఈ క్రింది వాక్యం తప్పో, ఒప్పో తెలపండి.

'2005-06లోని విద్యార్థుల సంఖ్య, 2003-04లోని విద్యార్థుల సంఖ్యకు రెట్టింపు.'

3. జంట కమ్మీ రేఖా చిత్రం: రెండు రకాల దత్తాంశ వివరాలను ఒకేసారి చూపించే కమ్మీ చిత్రం. రెండు రకాల దత్తాంశ వివరాలను పోల్చడానికి ఇది ఉపయోగపడును.



(i) పై జంట కమ్మీ రేఖాచిత్రం తెలియజేస్తున్న సమాచారం ఏమిటి?

(ii) ఏ విషయం నందు ప్రతిభలో అత్యధిక పెరుగుదల ఉంది?

(iii) ఏ విషయం నందు ప్రతిభ క్షీణించింది?

(iv) ఏ విషయం నందు విద్యార్థుల ప్రతిభ నిలకడగా ఉంది?

THINK, DISCUSS AND WRITE

If we change the position of any of the bars of a bar graph, would it change the information being conveyed? Why?

TRY THESE

Draw an appropriate graph to represent the given information.

1.

Month	July	August	September	October	November	December
Number of watches sold	1000	1500	1500	2000	2500	1500

2.

Children who prefer	School A	School B	School C
Walking	40	55	15
Cycling	45	25	35

3. Percentage wins in ODI by 8 top cricket teams.

Teams	From Champions Trophy to World Cup-06	Last 10 ODI in 07
South Africa	75%	78%
Australia	61%	40%
Sri Lanka	54%	38%
New Zealand	47%	50%
England	46%	50%
Pakistan	45%	44%
West Indies	44%	30%
India	43%	56%

5.2 Organising Data

Usually, data available to us is in an unorganised form called **raw data**. To draw meaningful inferences, we need to organise the data systematically. For example, a group of students was asked for their favourite subject. The results were as listed below:

Art, Mathematics, Science, English, Mathematics, Art, English, Mathematics, English, Art, Science, Art, Science, Science, Mathematics, Art, English, Art, Science, Mathematics, Science, Art.

Which is the most liked subject and the one least liked?

ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి

కమ్మీ రేఖా చిత్రంలో ఏదైనా కమ్మీ యొక్క స్థానాన్ని మార్చినట్లయితే, అది తెలియజేస్తున్న సమాచారంలో మార్పు జరుగుతుందా? ఎందుకు?

ప్రయత్నించండి

ఇచ్చిన వివరాలకు సరైన కమ్మీ రేఖా చిత్రాలను గీయండి.

1.

నెల	జూలై	ఆగష్టు	సెప్టెంబర్	అక్టోబర్	నవంబర్	డిసెంబర్
అమ్మిన గడియారాల సంఖ్య	1000	1500	1500	2000	2500	1500

2.

పిల్లల ఎంపిక	పాఠశాల A	పాఠశాల B	పాఠశాల C
నడక	40	55	15
సైకిల్ తొక్కడం	45	25	35

3. 8 అత్యుత్తమ క్రికెట్ జట్లు ODI లలో సాధించిన విజయాల శాతం

జట్లు	ఛాంపియన్స్ ట్రోఫీ నుండి ప్రపంచ కప్ – 2006 వరకు	2007లో గత 10 ODI లు
దక్షిణాఫ్రికా	75%	78%
ఆస్ట్రేలియా	61%	40%
శ్రీలంక	54%	38%
న్యూజిలాండ్	47%	50%
ఇంగ్లాండ్	46%	50%
పాకిస్తాన్	45%	44%
వెస్టిండీస్	44%	30%
ఇండియా	43%	56%

5.2 దత్తాంశ నిర్వహణ

సాధారణంగా మనకు అందుబాటులో గల, క్రమపద్ధతిలో లేని సమాచారమును **ముడి దత్తాంశము** అని అంటారు. అర్థవంత విశ్లేషణ కొరకు ముడి దత్తాంశమును క్రమపద్ధతిలో అమర్చుకోవాలి. ఉదాహరణకు, కొంత మంది విద్యార్థులను వారికి ఇష్టమైన విషయం ఏదో అడగడం జరిగింది. ఫలితాలు ఈ క్రింది విధంగా ఉన్నాయి:

కళలు, గణితం, విజ్ఞానం, ఆంగ్లం, గణితం, కళలు, ఆంగ్లం, గణితం, ఆంగ్లం, కళలు, విజ్ఞానం, కళలు, విజ్ఞానం, విజ్ఞానం, గణితం, కళలు, ఆంగ్లం, కళలు, విజ్ఞానం, గణితం, విజ్ఞానం, కళలు.

ఎక్కువ మంది ఇష్టపడే విషయం మరియు తక్కువ మంది ఇష్టపడే విషయం ఏది?

It is not easy to answer the question looking at the choices written haphazardly. We arrange the data in Table 5.1 using tally marks.

Table 5.1

Subject	Tally Marks	Number of Students
Art	~~||||~~ ||	7
Mathematics	~~||||~~	5
Science	~~||||~~ |	6
English	||||	4

The number of tallies before each subject gives the number of students who like that particular subject.

This is known as the **frequency** of that subject.

Frequency gives the number of times that a particular entry occurs.

From Table 5.1, Frequency of students who like English is 4

Frequency of students who like Mathematics is 5

The table made is known as **frequency distribution table** as it gives the number of times an entry occurs.

TRY THESE

1. A group of students were asked to say which animal they would like most to have as a pet. The results are given below:
   dog, cat, cat, fish, cat, rabbit, dog, cat, rabbit, dog, cat, dog, dog, dog, cat, cow, fish, rabbit, dog, cat, dog, cat, cat, dog, rabbit, cat, fish, dog.
   Make a frequency distribution table for the same.

5.3 Grouping Data

The data regarding choice of subjects showed the occurrence of each of the entries several times. For example, Art is liked by 7 students, Mathematics is liked by 5 students and so on (Table 5.1). This information can be displayed graphically using a pictograph or a bargraph. Sometimes, however, we have to deal with a large data. For example, consider the following marks (out of 50) obtained in Mathematics by 60 students of Class VIII:

21, 10, 30, 22, 33, 5, 37, 12, 25, 42, 15, 39, 26, 32, 18, 27, 28, 19, 29, 35, 31, 24, 36, 18, 20, 38, 22, 44, 16, 24, 10, 27, 39, 28, 49, 29, 32, 23, 31, 21, 34, 22, 23, 36, 24, 36, 33, 47, 48, 50, 39, 20, 7, 16, 36, 45, 47, 30, 22, 17.

If we make a frequency distribution table for each observation, then the table would be too long, so, for convenience, we make groups of observations say, 0-10, 10-20 and so on, and obtain a frequency distribution of the number of observations falling in each

ముడి దత్తాంశంను చూసీ చూడగానే కావలసిన ప్రశ్నలకు సమాధానాలు చెప్పడం అంత సులువు కాదు. గణన చిహ్నాలను ఉపయోగించి ఈ దత్తాంశాన్ని పట్టిక 5.1లో పొందుపరుద్దాం.

పట్టిక 5.1

విషయం	గణన చిహ్నాలు	విద్యార్థుల సంఖ్య
కళలు	~~||||~~ ||	7
గణితం	~~||||~~	5
విజ్ఞానం	~~||||~~ |	6
ఆంగ్లం	||||	4

ప్రతి విషయానికి ఎదురుగా ఉన్న గణన చిహ్నాల సంఖ్య, ఆ విషయాన్ని ఇష్టపడే విద్యార్థుల సంఖ్యను తెలియజేస్తుంది.

దీనిని ఆ విషయపు **పౌనఃపున్యం** అంటారు.

పౌనఃపున్యం అనేది ఆ విషయం ఎన్నిసార్లు వచ్చిందో తెలియజేస్తుంది.

పట్టిక 5.1 నుండి, ఆంగ్లమును ఇష్టపడే వారి పౌనఃపున్యం '4'

గణితంను ఇష్టపడే వారి పౌనఃపున్యం '5'

ఈ విధమైన పట్టికను **పౌనఃపున్య విభాజన పట్టిక** అంటాము. ఇది ప్రతీ అంశం ఎన్నిసార్లు వచ్చిందో తెలుపుతుంది.

ప్రయత్నించండి

1. కొంత మంది విద్యార్థులను, వారు దేనిని పెంపుడు జంతువుగా కలిగి ఉండటానికి ఇష్టపడతారో అడగడం జరిగింది. జవాబులు క్రింద ఇవ్వబడ్డాయి:
కుక్క, పిల్లి, పిల్లి, చేప, పిల్లి, కుందేలు, కుక్క, పిల్లి, కుందేలు, కుక్క, పిల్లి, కుక్క, కుక్క, కుక్క, పిల్లి, ఆవు, చేప, కుందేలు, కుక్క, పిల్లి, కుక్క, పిల్లి, పిల్లి, కుక్క, కుందేలు, పిల్లి, చేప, కుక్క. ఈ వివరాలకు ఒక పౌనఃపున్య విభాజన పట్టిక తయారు చేయండి.

5.3 దత్తాంశ వర్గీకరణ

ఒక్కొక్క విషయం ఎక్కువసార్లు రావడాన్ని ఇష్టపడే విషయాల ప్రాతిపదికన ఏర్పడిన దత్తాంశం చూపుతుంది. ఉదాహరణకు కళలను 7గురు విద్యార్థులు, గణితమును 5గురు విద్యార్థులు ఇష్టపడతారు. ఇదే విధంగా మిగిలిన విద్యార్థులు ఇష్టపడుతున్నారు (పటం 5.1). ఈ వివరాలను పట రూపంలో లేదా కమ్మీ రేఖాచిత్రం లేదా దిమ్మె రేఖాచిత్రం ద్వారా చూపవచ్చు. కొన్ని సందర్భములలో పెద్దదైన దత్తాంశంతో పని చేయవలసి ఉంటుంది. ఉదాహరణకు 8వ తరగతిలో 60 మంది విద్యార్థులు గణితంలో (50 మార్కులకు గాను) పొందిన మార్కులను పరిశీలించండి.

21, 10, 30, 22, 33, 5, 37, 12, 25, 42, 15, 39, 26, 32, 18, 27, 28, 19, 29, 35, 31, 24, 36, 18, 20, 38, 22, 44, 16, 24, 10, 27, 39, 28, 49, 29, 32, 23, 31, 21, 34, 22, 23, 36, 24, 36, 33, 47, 48, 50, 39, 20, 7, 16, 36, 45, 47, 30, 22, 17.

ప్రతి రాశిని ఉపయోగించి మనం పౌనఃపున్య విభాజన పట్టికను తయారు చేసినచో చాలా పొడవుగా ఉంటుంది. దీనిని సులభం చేయడానికి రాశులను 0–10, 10–20, ... మొదలగు సమూహాలుగా తీసుకుని, ప్రతి సమూహంలో వచ్చే పరిశీలనాంశాల సంఖ్యతో పౌనఃపున్య విభాజనాన్ని పొందవచ్చు.

group. Thus, the frequency distribution table for the above data can be.

Table 5.2

Groups	Tally Marks	Frequency
0-10	||	2
10-20	卌 卌	10
20-30	卌 卌 卌 卌 |	21
30-40	卌 卌 卌 ||||	19
40-50	卌 ||	7
50-60	|	1
	Total	**60**

Data presented in this manner is said to be **grouped** and the distribution obtained is called **grouped frequency distribution**. It helps us to draw meaningful inferences like –

(1) Most of the students have scored between 20 and 40.

(2) Eight students have scored more than 40 marks out of 50 and so on.

Each of the groups 0-10, 10-20, 20-30, etc., is called a **Class Interval** (or briefly a class).

Observe that 10 occurs in both the classes, i.e., 0-10 as well as 10-20. Similarly, 20 occurs in classes 10-20 and 20-30. But it is not possible that an observation (say 10 or 20) can belong simultaneously to two classes. To avoid this, we adopt the convention that the common observation will belong to the higher class, i.e., 10 belongs to the class interval 10-20 (and not to 0-10). Similarly, 20 belongs to 20-30 (and not to 10-20). In the class interval, 10-20, 10 is called the **lower class limit** and 20 is called the **upper class limit**. Similarly, in the class interval 20-30, 20 is the lower class limit and 30 is the upper class limit. Observe that the difference between the upper class limit and lower class limit for each of the class intervals 0-10, 10-20, 20-30 etc., is equal, (10 in this case). This difference between the upper class limit and lower class limit is called the **width** or **size** of the class interval.

TRY THESE

1. Study the following frequency distribution table and answer the questions given below.

Frequency Distribution of Daily Income of 550 workers of a factory

Table 5.3

Class Interval (Daily Income in `)	Frequency (Number of workers)
100-125	45
125-150	25

పై దత్తాంశం యొక్క పౌనఃపున్య విభాజన పట్టికను క్రింది విధంగా చూపవచ్చు.

పట్టిక 5.2

తరగతులు	గణన చిహ్నాలు	పౌనఃపున్యం
0-10	||	2
10-20	𝍸 𝍸	10
20-30	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |	21
30-40	𝍸 𝍸 𝍸 ||||	19
40-50	𝍸 ||	7
50-60	|	1
	మొత్తం	**60**

దత్తాంశమును పై విధంగా చూపిన దానిని **వర్గీకృత దత్తాంశ**మని, ఈ విధంగా విభజన చేయబడిన దత్తాంశమును **వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనము** అని అంటారు. ఇది ఈ క్రింది అర్థవంతమైన ప్రతిపాదనలు చేయడానికి ఉపయోగపడును.

(1) ఎక్కువ మంది విద్యార్థులు 20, 40 ల మధ్య మార్కులు పొందారు.

(2) ఎనిమిది మంది విద్యార్థులు 50కి గాను 40 కంటే ఎక్కువ మార్కులు సాధించారు మొదలైనవి.

0-10, 10-20, 20-30.......... మొదలగు సమూహాలలో ప్రతీ దానిని **తరగతి అంతరం** (లేదా సూక్ష్మంగా **తరగతి**) అంటాము.

0–10 మరియు 10–20 రెండు తరగతులలోనూ 10 వచ్చినట్లు గమనించవచ్చును. అదేవిధంగా 20 కూడా 10–20 మరియు 20–30 తరగతులలో వచ్చింది. అయితే ఒకే రాశి (10 లేదా 20) రెండు తరగతులలో ఉండడానికి అవకాశం లేదు. దీనిని అధిగమించడానికి ఈ విధమైన ఉమ్మడి రాశులను పై తరగతికి చెందినట్లుగా భావించడం ఒక సాంప్రదాయంగా తీసుకుంటాం. అనగా 10ను (0–10 తరగతిలో కాకుండా) 10–20 తరగతిలో తీసుకుందాం. అదేవిధంగా 20ను (10–20 తరగతిలో కాకుండా) 20–30 తరగతిలో తీసుకుందాం. 10–20 తరగతిలో 10ను ఆ తరగతి యొక్క **దిగువ అవధి** అనీ, 20ను **ఎగువ అవధి** అనీ అంటారు. అదే విధంగా 20–30 తరగతిలో 20ను దిగువ అవధి అనీ, 30ను ఎగువ అవధి అనీ అంటారు. 0–10, 10–20, 20–30, ... మొదలైన తరగతులలో ఒక తరగతి యొక్క ఎగువ అవధి, దిగువ అవధుల భేదం సమానము (ఈ సంధర్భంలో 10) అని గమనించండి. ఒక తరగతి యొక్క ఎగువ అవధి, దిగువ అవధుల భేదను ఆ తరగతి యొక్క **వెడల్పు** లేదా **పరిమాణం** అని అంటారు.

ప్రయత్నించండి

1. దిగువ ఇవ్వబడిన పౌనఃపున్య విభాజన పట్టికను చదివి క్రింది ప్రశ్నలకు సమాధానాలు రాయండి. **ఒక కర్మాగారంలోని 550 మంది దినసరి కార్మికుల వేతనాల పౌనఃపున్య విభాజనము క్రింది విధంగా ఉంది.**

పట్టిక – 5.3

తరగతి అంతరం (రోజు కూలీ రూ.లలో)	పౌనఃపున్యం (కార్మికుల సంఖ్య)
100-125	45
125-150	25

150-175	55
175-200	125
200-225	140
225-250	55
250-275	35
275-300	50
300-325	20
Total	**550**

(i) What is the size of the class intervals?
(ii) Which class has the highest frequency?
(iii) Which class has the lowest frequency?
(iv) What is the upper limit of the class interval 250-275?
(v) Which two classes have the same frequency?

2. Construct a frequency distribution table for the data on weights (in kg) of 20 students of a class using intervals 30-35, 35-40 and so on.

40, 38, 33, 48, 60, 53, 31, 46, 34, 36, 49, 41, 55, 49, 65, 42, 44, 47, 38, 39.

5.3.1 Bars with a difference

Let us again consider the grouped frequency distribution of the marks obtained by 60 students in Mathematics test. (Table 5.4)

Table 5.4

Class Interval	Frequency
0-10	2
10-20	10
20-30	21
30-40	19
40-50	7
50-60	1
Total	**60**

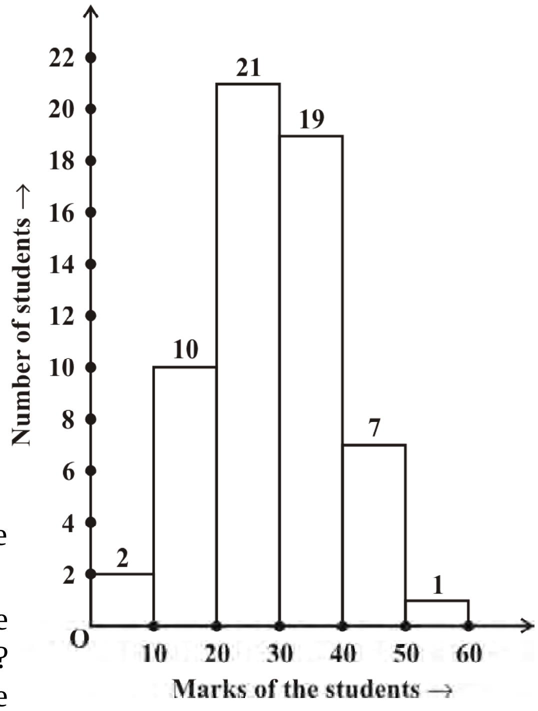


Fig 5.1

This is displayed graphically as in the adjoining graph (Fig 5.1).

Is this graph in any way different from the bar graphs which you have drawn in Class VII? Observe that, here we have represented the groups of observations (i.e., class intervals)

150-175	55
175-200	125
200-225	140
225-250	55
250-275	35
275-300	50
300-325	20
మొత్తం	**550**

(i) తరగతి అంతరాల పరిమాణం ఎంత?
(ii) ఏ తరగతి గరిష్ట పౌనఃపున్యం కలిగి ఉంది?
(iii) ఏ తరగతి కనిష్ట పౌనఃపున్యం కలిగి ఉంది?
(iv) 250-275 తరగతి ఎగువ అవధి ఎంత?
(v) ఏ రెండు తరగతులు ఒకే పౌనఃపున్యం కలిగి ఉన్నాయి?

2. 30-35,35-40,.....మొదలగు తరగతులను ఉపయోగించి క్రింది చూపిన 20 మంది విద్యార్థుల బరువుల(కి.గ్రా.లలో) వివరాలకు పౌనఃపున్య విభాజన పట్టికను తయారుచేయండి.

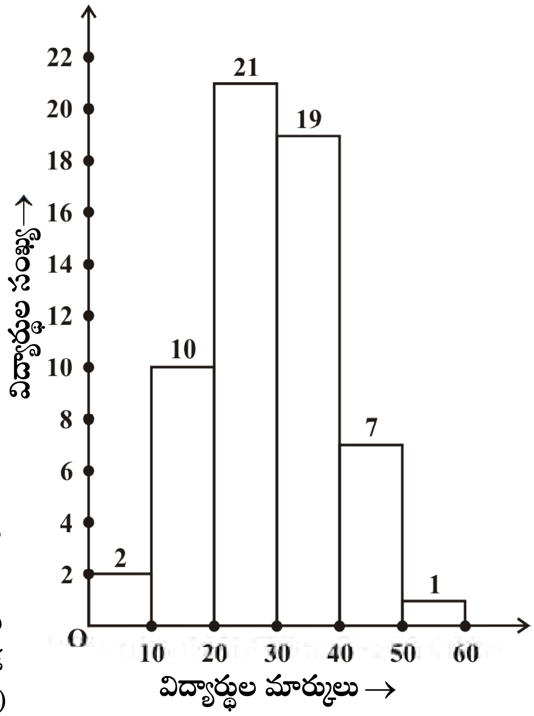
40, 38, 33, 48, 60, 53, 31, 46, 34, 36, 49, 41, 55, 49, 65, 42, 44, 47, 38, 39.

5.3.1 విభిన్న కమ్మీ రేఖా చిత్రాలు

60 మంది విద్యార్థులు గణిత పరీక్షలో పొందిన మార్కుల వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజన పట్టికను మరొకసారి తీసుకుందాం (పట్టిక 5.4).

పట్టిక 5.4

తరగతి అంతరం	పౌనఃపున్యం
0-10	2
10-20	10
20-30	21
30-40	19
40-50	7
50-60	1
మొత్తం	**60**



పటం 5.1

ఇది పట రూపంలో ప్రక్కనున్న రేఖా చిత్రంలో చూపబడింది. (పటం 5.1)

ఈ రేఖాచిత్రం మీరు 7వ తరగతిలో గీచిన చిత్రాలకంటే ఏవిధంగానైనా భిన్నంగా ఉందా? ఇక్కడ పరిశీలనాంశముల సమూహాలను (తరగతి అంతరాలను)

on the horizontal axis. The **height** of the bars show the **frequency** of the class-interval. Also, there is no gap between the bars as there is no gap between the class-intervals.

The graphical representation of data in this manner is called a **histogram**.

The following graph is another histogram (Fig 5.2).

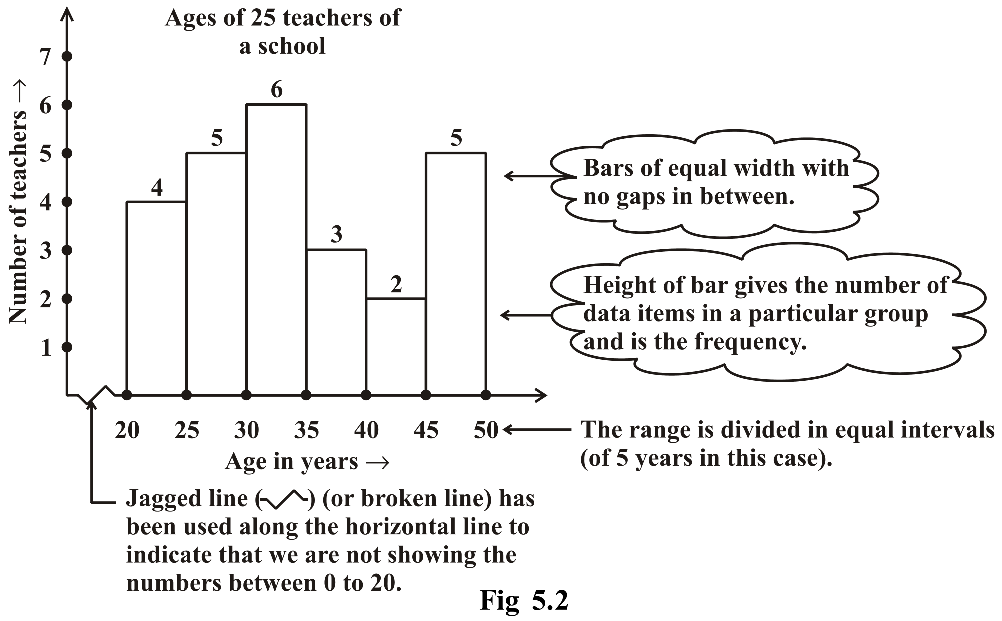


Fig 5.2

From the bars of this histogram, we can answer the following questions:

(i) How many teachers are of age 45 years or more but less than 50 years?

(ii) How many teachers are of age less than 35 years?

TRY THESE

1. Observe the histogram (Fig 5.3) and answer the questions given below.

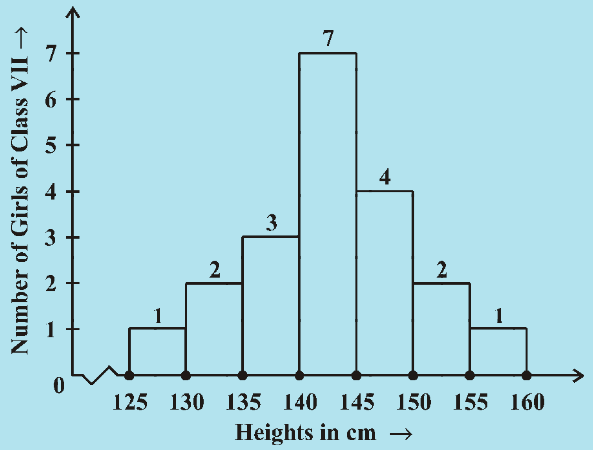


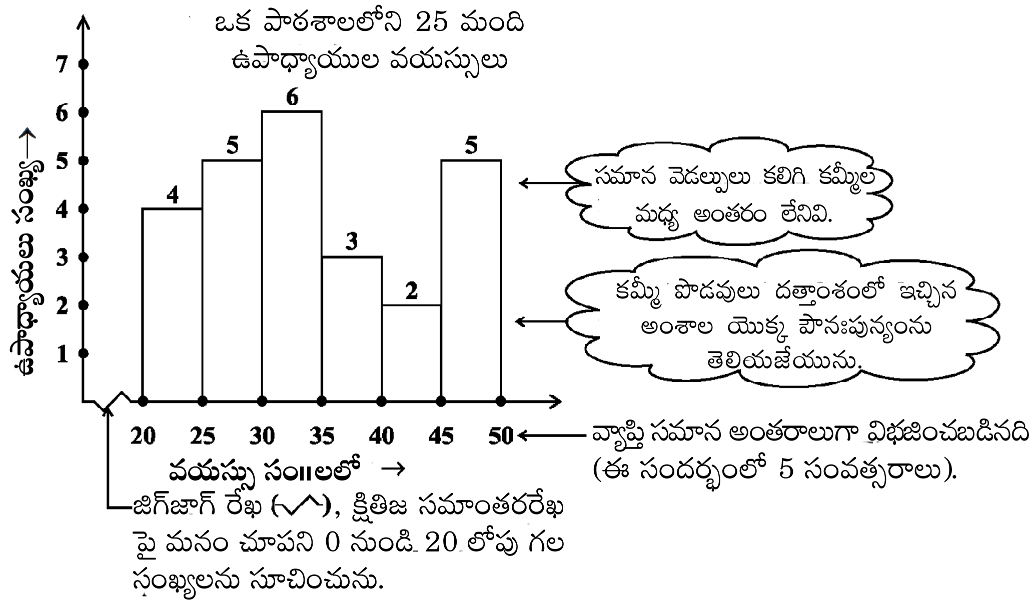
Fig 5.3

(i) What information is being given by the histogram?

(ii) Which group contains maximum girls?

క్షితిజ సమాంతర అక్షంపై చూపబడింది. కమ్మీల పొడవులు తరగతి అంతరం యొక్క పౌనఃపున్యములను సూచించును. అంతేగాక తరగతి అంతరముల మధ్య ఖాళీ లేనందున కమ్మీల మధ్య కూడా అంతరం లేదు.

దత్తాంశాన్ని ఈ విధంగా దిమ్మెల రూపంలో సూచించు రేఖాచిత్రాన్ని **సోపాన రేఖా చిత్రం** అంటారు. మరొక సోపాన రేఖా చిత్రం (పటం 5.2 లో) చూడండి.



పటం 5.2

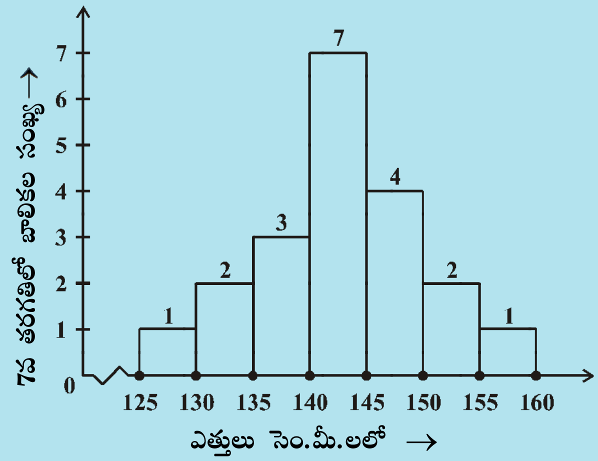
ఈ సోపాన చిత్రం యొక్క కమ్మీల నుండి మనం కింది ప్రశ్నలకు జవాబులు ఇవ్వవచ్చు.

(i) 45సం॥ లేదా అంత కంటే ఎక్కువ, 50సం॥ కంటే తక్కువ వయస్సు గల ఉపాధ్యాయులు ఎంత మంది?

(ii) 35 సం॥ కంటే తక్కువ వయస్సు గల ఉపాధ్యాయులు ఎంత మంది?

ప్రయత్నించండి

1. సోపాన రేఖాచిత్రం గమనించి (పటం 5.3) క్రింది ప్రశ్నలకు జవాబులు ఇవ్వండి.



పటం 5.3

(i) పై సోపాన రేఖాచిత్రం ఏ వివరాల్ని తెలియజేస్తుంది?

(ii) ఏ తరగతి అంతరంలో బాలికలు ఎక్కువగా ఉన్నారు?

(iii) How many girls have a height of 145 cms and more?

(iv) If we divide the girls into the following three categories, how many would there be in each?

150 cm and more	— Group A
140 cm to less than 150 cm	— Group B
Less than 140 cm	— Group C

EXERCISE 5.1

1. For which of these would you use a histogram to show the data?

(a) The number of letters for different areas in a postman's bag.

(b) The height of competitors in an athletics meet.

(c) The number of cassettes produced by 5 companies.

(d) The number of passengers boarding trains from 7:00 a.m. to 7:00 p.m. at a station.

Give reasons for each.

2. The shoppers who come to a departmental store are marked as: man (M), woman (W), boy (B) or girl (G). The following list gives the shoppers who came during the first hour in the morning:

W W W G B W W M G G M M W W W W G B M W B G G M W W M M W W
W M W B W G M W W W W G W M M W W M W G W M G W M M B G G W

Make a frequency distribution table using tally marks. Draw a bar graph to illustrate it.

3. The weekly wages (in `) of 30 workers in a factory are.

830, 835, 890, 810, 835, 836, 869, 845, 898, 890, 820, 860, 832, 833, 855, 845, 804, 808, 812, 840, 885, 835, 835, 836, 878, 840, 868, 890, 806, 840

Using tally marks make a frequency table with intervals as 800–810, 810–820 and so on.

4. Draw a histogram for the frequency table made for the data in Question 3, and answer the following questions.

(i) Which group has the maximum number of workers?

(ii) How many workers earn ` 850 and more?

(iii) How many workers earn less than ` 850?

5. The number of hours for which students of a particular class watched television during holidays is shown through the given graph.

Answer the following.

(i) For how many hours did the maximum number of students watch TV?

(ii) How many students watched TV for less than 4 hours?

(iii) 145 సెం.మీ మరియు అంతకంటే ఎక్కువ ఎత్తుగల బాలికలు ఎందరు?

(iv) బాలికలను క్రింది మూడు భాగాలుగా విభజించినచో ప్రతి సమూహంలో ఎంత మంది బాలికలు ఉన్నారు?
150 సెం.మీ. మరియు అంతకంటే ఎక్కువ– సమూహం A
140 సెం.మీ. నుండి 150 సెం.మీ. కంటే తక్కువ– సమూహము B
140 సెం.మీ. కంటే తక్కువ – సమూహం C

అభ్యాసం - 5.1

1. క్రింది ఏ సందర్భాలలో దత్తాంశమును చూపడానికి సోపాన రేఖాచిత్రం ఉపయోగిస్తారు?

(a) ఒక తపాల బంట్రోతు సంచిలో వివిధ ప్రాంతాలకు చెందిన ఉత్తరాల సంఖ్య.

(b) ఒక ఆటల పోటీలో పాల్గొంటున్న పోటీదారుల ఎత్తులు.

(c) ఐదు సంస్థలు తయారు చేసిన క్యాసెట్ల సంఖ్య.

(d) ఒక స్టేషన్‌లో ఉదయం 7 గంటల నుండి సాయంత్రం 7 గంటల వరకు రైలు ఎక్కుతున్న ప్రయాణికుల సంఖ్య.

ప్రతీ దానికి కారణాలు చెప్పండి.

2. ఒక డిపార్ట్మెంటల్ స్టోర్‌కు వచ్చిన వినియోగదారుల వివరాలు క్రింది విధంగా సూచించబడ్డాయి: పురుషులు (M), స్త్రీలు (W), బాలురు (B), బాలికలు (G) ఉదయం మొదటి గంటలో వచ్చిన వివిధ వినియోగదారుల వివరాలను క్రింది జాబితా తెలియజేస్తుంది.

W W W G B W W M G G M M W W W W G B M W B G G M W W M M W W
W M W B W G M W W W W G W M M W W M W G W M G W M M B G G W

గణన చిహ్నాలను ఉపయోగించి పౌనఃపున్య విభాజన పట్టికను తయారు చేయండి. దానిని వివరించుటకు కమ్మీ రేఖా చిత్రం గీయండి.

3. ఒక కర్మాగారంలో పనిచేసే 30 మంది కార్మికుల వారపు భత్యం.(` లలో)

830, 835, 890, 810, 835, 836, 869, 845, 898, 890, 820, 860, 832, 833, 855, 845, 804, 808, 812, 840, 885, 835, 835, 836, 878, 840, 868, 890, 806, 840

800–810,810–820,... మొదలైన తరగతులుగా తీసుకొని, గణన చిహ్నాలను ఉపయోగించి పౌనఃపున్య విభాజన పట్టికను తయారు చేయండి.

4. మూడవ ప్రశ్న యొక్క పౌనఃపున్య విభాజన పట్టికకు సోపాన రేఖా చిత్రం గీచి, ఈ క్రింది ప్రశ్నలకు జవాబులు ఇవ్వండి.

(i) ఏ తరగతిలో గరిష్ట కార్మికులు ఉన్నారు?

(ii) ` 850 లేదా అంతకన్నా ఎక్కువ సంపాదించు కార్మికులు ఎంత మంది?

(iii) ` 850 కంటే తక్కువ సంపాదించు కార్మికులు ఎంతమంది?

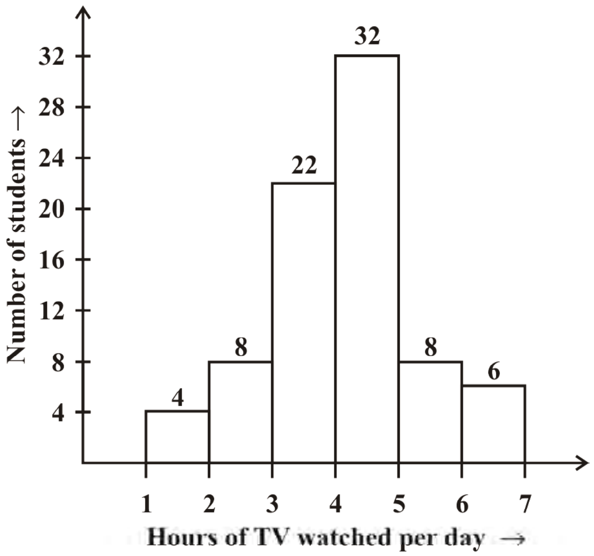
5. ఇచ్చిన రేఖా చిత్రం ఒక తరగతిలోని విద్యార్థులు సెలవులలో ఎన్ని గంటలు TV చూశారో తెలియజేస్తుంది.

క్రింది ప్రశ్నలకు జవాబులు ఇవ్వండి.

(i) ఎక్కువ మంది విద్యార్థులు ఎన్ని గంటలు TV చూశారు?

(ii) నాలుగు గంటల కంటే తక్కువ సమయం TV చూసిన విద్యార్థులు ఎందరు?

(iii) How many students spent more than 5 hours in watching TV?



5.4 Circle Graph or Pie Chart

Have you ever come across data represented in circular form as shown (Fig 5.4)?

The time spent by a child during a day   Age groups of people in a town

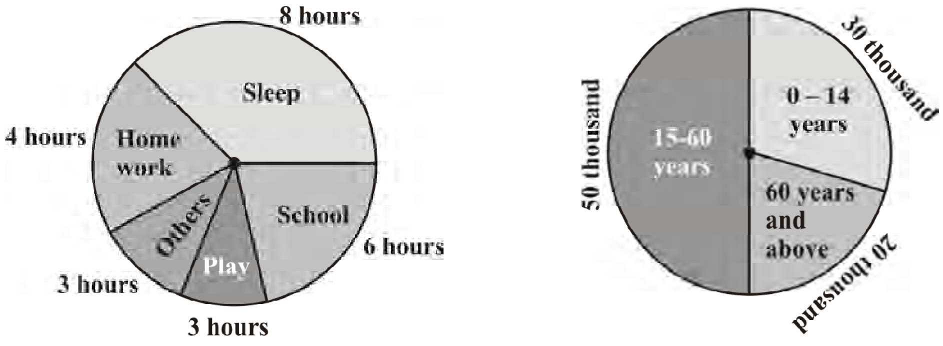


Fig 5.4

These are called **circle graphs**. A circle graph shows the relationship between a whole and its parts. Here, the whole circle is divided into sectors. The size of each sector is proportional to the activity or information it represents.

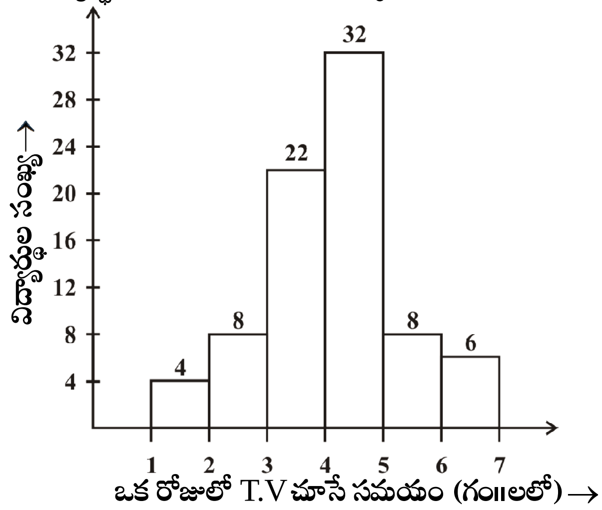
For example, in the above graph, the proportion of the sector for hours spent in sleeping

$$= \frac{\text{number of sleeping hours}}{\text{whole day}} = \frac{8 \text{ hours}}{24 \text{ hours}} = \frac{1}{3}$$

So, this sector is drawn as $\frac{1}{3}$rd part of the circle. Similarly, the proportion of the sector

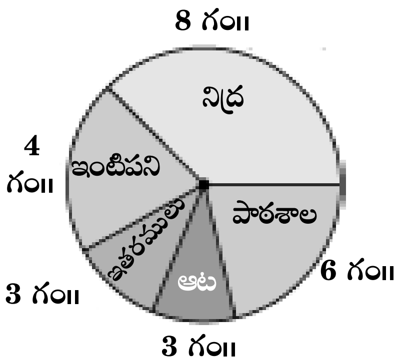
for hours spent in school $= \frac{\text{number of school hours}}{\text{whole day}} = \frac{6 \text{ hours}}{24 \text{ hours}} = \frac{1}{4}$

(iii) ఎంత మంది విద్యార్థులు 5 గంటల కంటే ఎక్కువ కాలం T.V చూడటంలో గడిపారు?

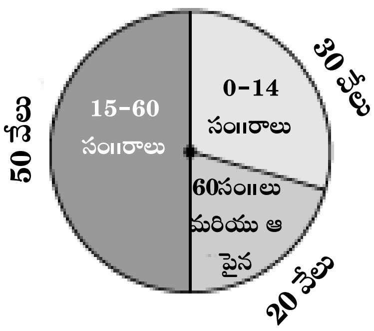


5.4 వృత్తరేఖా చిత్రం లేదా పై చిత్రం

పటం 5.4 లో చూపిన విధంగా వృత్తాకారంలో దత్తాంశమును చూపుటను మీరు ఎప్పుడైనా చూశారా?



(i)



(ii)

పటం – 5.4

పై పటాలను **వృత్త రేఖా చిత్రాలు** అంటారు. వృత్త రేఖా చిత్రం, మొత్తం వృత్తము మరియు దాని భాగాల మధ్య సంబంధాన్ని చూపుతుంది. ఇందులో ఒక వృత్తాన్ని సెక్టారులుగా విభజించడం జరిగింది. ప్రతి సెక్టార్ పరిమాణం, అది సూచించే కృత్యం లేదా సమాచారానికి అనుపాతంలో ఉంటుంది.

ఉదాహరణకు, పై పటంలో రోజులో నిద్ర సమయాన్ని చూపు సెక్టార్ పరిమాణం

$$= \frac{\text{నిద్రలో గడుపు గంటలు}}{\text{మొత్తం రోజు}} = \frac{8 \text{ గంటలు}}{24 \text{ గంటలు}} = \frac{1}{3}$$

అందువలన, ఈ సెక్టార్ వృత్తంలో $\frac{1}{3}$ వ భాగం గీయబడింది. అదేవిధంగా, బడిలో గడుపు సమయాన్ని

$$\text{చూపు సెక్టార్ పరిమాణం} = \frac{\text{బడిలో గడుపు గంటలు}}{\text{మొత్తం రోజు}} = \frac{6 \text{ గంటలు}}{24 \text{ గంటలు}} = \frac{1}{4}$$

So this sector is drawn $\frac{1}{4}$th of the circle. Similarly, the size of other sectors can be found.

Add up the fractions for all the activities. Do you get the total as one?

A circle graph is also called a **pie chart**.

TRY THESE

1. Each of the following pie charts (Fig 5.5) gives you a different piece of information about your class. Find the fraction of the circle representing each of these information.

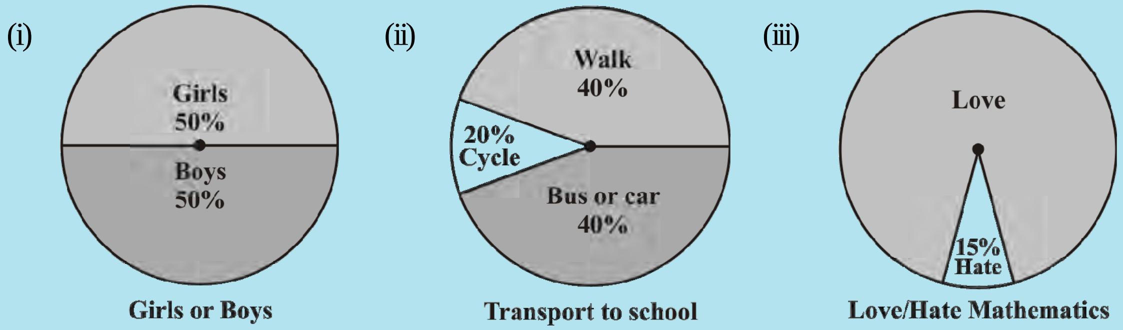
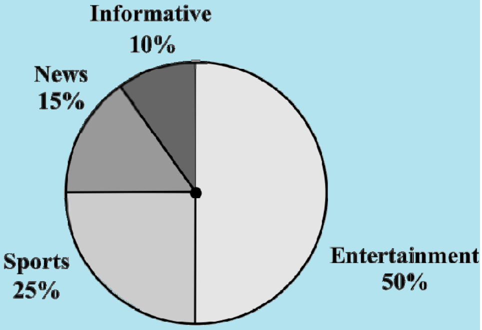


Fig 5.5

2. Answer the following questions based on the pie chart given (Fig 5.6).
   (i) Which type of programmes are viewed the most?
   (ii) Which two types of programmes have number of viewers equal to those watching sports channels?



Viewers watching different types of channels on T.V.

Fig 5.6

5.4.1 Drawing pie charts

The favourite flavours of ice-creams for students of a school is given in percentages as follows.

Flavours	Percentage of students Preferring the flavours
Chocolate	50%
Vanilla	25%
Other flavours	25%

Let us represent this data in a pie chart.

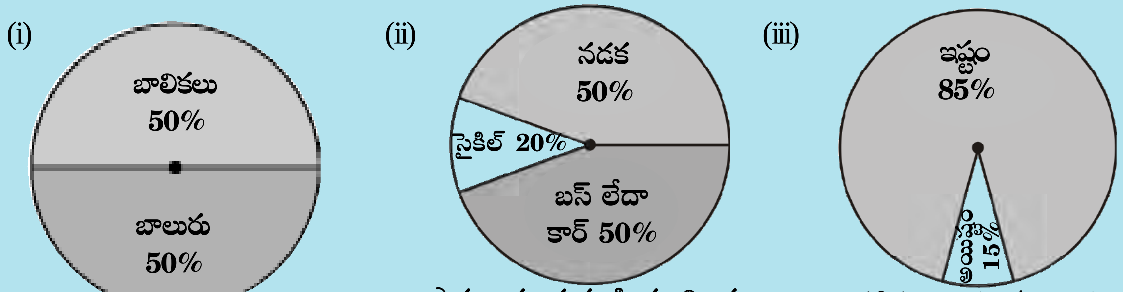
The total angle at the centre of a circle is 360°. The central angle of the sectors will be

కనుక ఈ సెక్టార్ వృత్తంలో $\frac{1}{4}$వ భాగం గీయబడింది. అదే విధంగా ఇతర సెక్టారుల పరిమాణాలను కూడా కనుగొనండి. అన్ని కృత్యాల భిన్నాలను కూడండి. ఆ మొత్తం ఒకటి వచ్చిందా?

వృత్తారేఖా చిత్రాన్ని **పై - చిత్రం** అని కూడా అంటారు.

ప్రయత్నించండి

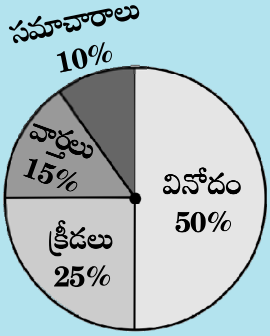
1. క్రింది ప్రతీ వృత్తరేఖాచిత్రం (పటం 5.5) మీ తరగతికి సంబంధించిన విభిన్న విషయాల సమాచారాన్ని ఇస్తుంది. ఈ సమాచారం సూచించు వృత్తభాగాన్ని కనుగొనండి.



బాలికలు లేదా బాలురు　　పాఠశాలకు ప్రయాణించు విధానం　　గణితంపై ఇష్టం / అయిష్టం

పటం 5.5

2. ప్రక్కన ఇచ్చిన పై చార్ట్ ఆధారంగా క్రింది ప్రశ్నలకు సమాధానాలు ఇవ్వండి (పటం 5.6).
   (i) ఏ విధమైన కార్యక్రమాలు ఎక్కువగా చూశారు?
   (ii) ఏ రెండు రకాల కార్యక్రమాలను చూసే వారి సంఖ్య, క్రీడా కార్యక్రమాలను చూసే వారి సంఖ్యకు సమానం?



T.V. లో వీక్షకులు చూసే వివిధ కార్యక్రమాలు

పటం 5.6

5.4.1 వృత్త రేఖాచిత్రం గీయుట

ఒక పాఠశాలలో వివిధ ఐస్ క్రీమ్ రకాలను ఇష్టపడు విద్యార్థుల శాతాలు క్రింద ఇవ్వబడ్డాయి.

రుచి	రుచిని ఇష్టపడు విద్యార్థుల శాతం
చాక్లెట్	50%
వెనిలా	25%
ఇతరం	25%

ఈ వివరాలను పై-చిత్రం లో చూపుదాం.

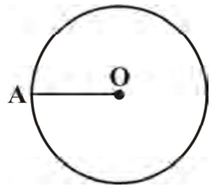
వృత్త కేంద్రం వద్ద కోణం 360°. వృత్త కేంద్రం వద్ద చేసే సెక్టార్ కోణాలన్నియు 360°లో భాగాలే.

a fraction of 360°. We make a table to find the central angle of the sectors (Table 5.5).

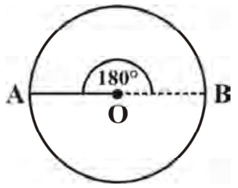
Table 5.5

Flavours	Students in per cent preferring the flavours	In fractions	Fraction of 360°
Chocolate	50%	$\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ of 360° = 180°
Vanilla	25%	$\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$ of 360° = 90°
Other flavours	25%	$\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$ of 360° = 90°

1. Draw a circle with any convenient radius. Mark its centre (O) and a radius (OA).



2. The angle of the sector for chocolate is 180°. Use the protractor to draw ∠AOB = 180°.



3. Continue marking the remaining sectors.

Example 1: Adjoining pie chart (Fig 5.7) gives the expenditure (in percentage) on various items and savings of a family during a month.

(i) On which item, the expenditure was maximum?

(ii) Expenditure on which item is equal to the total savings of the family?

(iii) If the monthly savings of the family is ` 3000, what is the monthly expenditure on clothes?

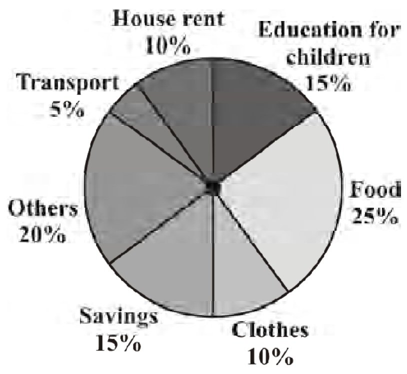


Fig 5.7

Solution:

(i) Expenditure is maximum on food.

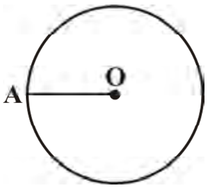
(ii) Expenditure on Education of children is the same (i.e., 15%) as the savings of the family.

ఇప్పుడు మనం వృత్త కేంద్రం వద్ద చేసే వివిధ సెక్టార్ కోణాలను కనుగొనే పట్టికను రూపొందిద్దాం. (పట్టిక 5.5)

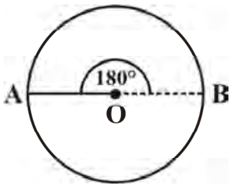
పట్టిక 5.5

రుచి	ఇష్టపడు విద్యార్థులు (శాతంలో)	భాగాలలో	360° లో భాగం
చాక్లెట్	50%	$\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \times 360° = 180°$
వెనీలా	25%	$\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} \times 360° = 90°$
ఇతర రుచులు	25%	$\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} \times 360° = 90°$

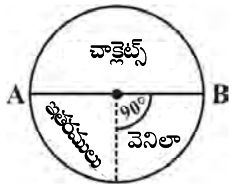
1. అనుకూల వ్యాసార్థముతో ఒక వృత్తమును గీయుము. వృత్త కేంద్రం (O)ను, వ్యాసార్థం (OA)లను గుర్తించండి.



2. చాక్లెట్ యొక్క సెక్టార్ కోణం 180°. కోణమానిని ఉపయోగించి $\angle AOB = 180°$ కోణం గీయండి.



3. మిగిలిన సెక్టార్ కోణములను ఇలాగే గీయండి.



ఉదాహరణ 1: ప్రక్కనున్న పై-చిత్రం (పటం 5.7) లో ఒక కుటుంబం యొక్క నెల ఖర్చు మరియు పొదుపులను (శాతాలలో) చూపడమైనది.

(i) దేనిపై చాలా ఎక్కువ ఖర్చు చేశారు?

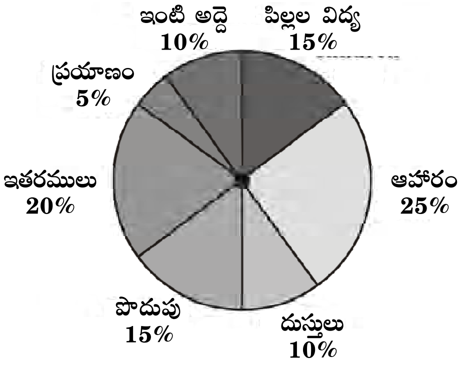
(ii) ఆ కుటుంబం దేనిపై చేసిన ఖర్చు, పొదుపుకు సమానం?

(iii) ఆ కుటుంబపు నెల పొదుపు రు. 3000 అయినచో, బట్టలపై చేసిన నెల ఖర్చు ఎంత?

సాధన:

(i) ఆహారం కోసం చాలా ఎక్కువ ఖర్చు చేశారు.

(ii) పిల్లల విద్యకొరకు చేసిన ఖర్చు, పొదుపుకు సమానం. (అది 15%)



పటం 5.7

(iii) 15% represents ` 3000

Therefore, 10% represents ` $\frac{3000}{15} \times 10$ = ` 2000

Example 2: On a particular day, the sales (in rupees) of different items of a baker's shop are given below.

ordinary bread	:	320
fruit bread	:	80
cakes and pastries	:	160
biscuits	:	120
others	:	40
Total	**:**	**720**

Draw a pie chart for this data.

Solution: We find the central angle of each sector. Here the total sale = ` 720. We thus have this table.

Item	Sales (in `)	In Fraction	Central Angle
Ordinary Bread	320	$\frac{320}{720} = \frac{4}{9}$	$\frac{4}{9} \times 360° = 160°$
Biscuits	120	$\frac{120}{720} = \frac{1}{6}$	$\frac{1}{6} \times 360° = 60°$
Cakes and pastries	160	$\frac{160}{720} = \frac{2}{9}$	$\frac{2}{9} \times 360° = 80°$
Fruit Bread	80	$\frac{80}{720} = \frac{1}{9}$	$\frac{1}{9} \times 360° = 40°$
Others	40	$\frac{40}{720} = \frac{1}{18}$	$\frac{1}{18} \times 360° = 20°$

Now, we make the pie chart (Fig 5.8):

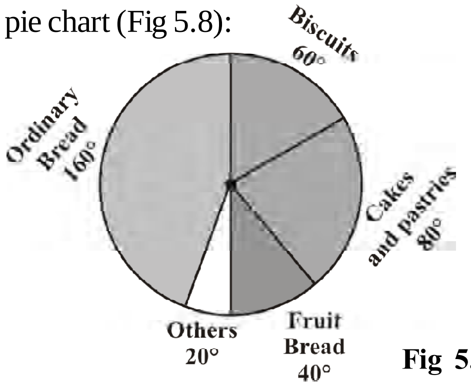


Fig 5.8

(iii) 15% విలువ ` 3000 తో సూచించారు.

కాబట్టి, 10% విలువ ` $\frac{3000}{15} \times 10$ = ` 2000

ఉదాహరణ 2: ఒక నిర్దిష్టమైన రోజున ఒక బేకరీలో వివిధ పదార్థాల అమ్మకాల విలువలు (రూపాయలలో) క్రింద చూపడం అయినది.

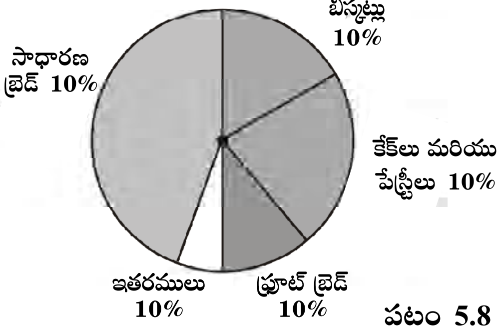
సాధారణ బ్రెడ్	: 320
ఫ్రూట్‌బ్రెడ్	: 80
కేక్‌లు మరియు పేస్ట్రీలు	: 160
బిస్కట్లు	: 120
ఇతరములు	: 40
మొత్తం	**: 720**

ఈ వివరాలకు పై–చిత్రం గీయండి.

సాధన: ప్రతీ సెక్టార్ యొక్క కోణమును కనుగొందాం. ఇచట మొత్తం అమ్మకం విలువ ` 720. దీని ఆధారంగా ఈ పట్టిక తయారగును.

పదార్థం	అమ్మకాలు (`లలో)	భిన్నాలలో	కేంద్రీయ కోణం
సాధారణ బ్రెడ్	320	$\frac{320}{720} = \frac{4}{9}$	$\frac{4}{9} \times 360° = 160°$
బిస్కట్లు	120	$\frac{120}{720} = \frac{1}{6}$	$\frac{1}{6} \times 360° = 60°$
కేక్స్ మరియు పేస్ట్రీలు	160	$\frac{160}{720} = \frac{2}{9}$	$\frac{2}{9} \times 360° = 80°$
ఫ్రూట్ బ్రెడ్	80	$\frac{80}{720} = \frac{1}{9}$	$\frac{1}{9} \times 360° = 40°$
ఇతరములు	40	$\frac{40}{720} = \frac{1}{18}$	$\frac{1}{18} \times 360° = 20°$

మనమిప్పుడు పై చార్ట్ గీయవచ్చు. (పటం 5.8)



పటం 5.8

TRY THESE

Draw a pie chart of the data given below.

The time spent by a child during a day.

Sleep — 8 hours
School — 6 hours
Home work — 4 hours
Play — 4 hours
Others — 2 hours

THINK, DISCUSS AND WRITE

Which form of graph would be appropriate to display the following data.

1. **Production of food grains of a state.**

Year	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Production (in lakh tons)	60	50	70	55	80	85

2. **Choice of food for a group of people.**

Favourite food	Number of people
North Indian	30
South Indian	40
Chinese	25
Others	25
Total	**120**

3. **The daily income of a group of a factory workers.**

Daily Income (in Rupees)	Number of workers (in a factory)
75-100	45
100-125	35
125-150	55
150-175	30
175-200	50
200-225	125
225-250	140
Total	**480**

ప్రయత్నించండి

క్రింది దత్తాంశమునకు పై-చిత్రం గీయండి.

ఒక పిల్లవాడు ఒక రోజులో గడుపు సమయం.

నిద్రకు — 8 గంటలు
పాఠశాలకు — 6 గంటలు
ఇంటిపనికి — 4 గంటలు
ఆటలకు — 4 గంటలు
ఇతరములు — 2 గంటలు

ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి

దిగువ ఇవ్వబడిన దత్తాంశములను సూచించుటకు సరిపోవు రేఖా చిత్రములను సూచించండి.

1. ఒక రాష్ట్రంలో ధాన్యాల ఉత్పత్తి

సంవత్సరం	2001	2002	2003	2004	2005	2006
ఉత్పత్తి (లక్షల టన్నులలో)	60	50	70	55	80	85

2. వివిధ ప్రజల సమూహాలు - వారికి ఇష్టమైన ఆహారం

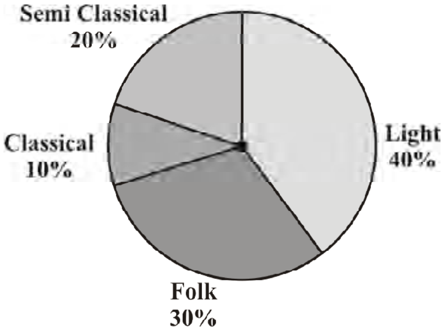
ఇష్టపడే ఆహారం	ప్రజలసంఖ్య
ఉత్తర భారతదేశపు	30
దక్షిణ భారతదేశపు	40
చైనా దేశపు	25
ఇతర	25
మొత్తం	**120**

3. ఒక కర్మాగారంలోని కార్మికుల రోజువారీ ఆదాయం.

రోజువారీ ఆదాయం (రూపాయలలో)	కార్మికుల సంఖ్య (ఒక కార్మాగారంలోని)
75-100	45
100-125	35
125-150	55
150-175	30
175-200	50
200-225	125
225-250	140
మొత్తం	**480**

EXERCISE 5.2

1. A survey was made to find the type of music that a certain group of young people liked in a city. Adjoining pie chart shows the findings of this survey.



From this pie chart answer the following:

(i) If 20 people liked classical music, how many young people were surveyed?

(ii) Which type of music is liked by the maximum number of people?

(iii) If a cassette company were to make 1000 CD's, how many of each type would they make?

2. A group of 360 people were asked to vote for their favourite season from the three seasons rainy, winter and summer.

(i) Which season got the most votes?

(ii) Find the central angle of each sector.

(iii) Draw a pie chart to show this information.

Season	No. of votes
Summer	90
Rainy	120
Winter	150

3. Draw a pie chart showing the following information. The table shows the colours preferred by a group of people.

Colours	Number of people
Blue	18
Green	9
Red	6
Yellow	3
Total	**36**

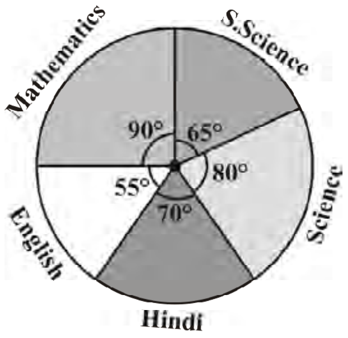
Find the proportion of each sector. For example, Blue is $\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$; Green is $\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$ and so on. Use this to find the corresponding angles.

4. The adjoining pie chart gives the marks scored in an examination by a student in Hindi, English, Mathematics, Social Science and Science. If the total marks obtained by the students were 540, answer the following questions.

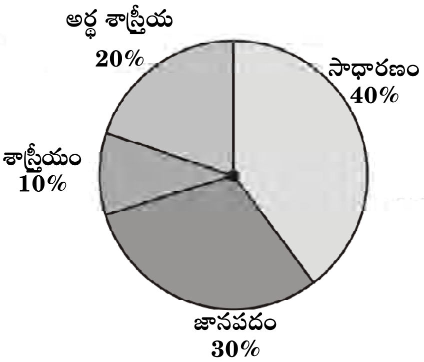
(i) In which subject did the student score 105 marks?
(**Hint:** for 540 marks, the central angle = 360°. So, for 105 marks, what is the central angle?)

(ii) How many more marks were obtained by the student in Mathematics than in Hindi?

(iii) Examine whether the sum of the marks obtained in Social Science and Mathematics is more than that in Science and Hindi.
(**Hint:** Just study the central angles).



అభ్యాసం 5.2



1. ఒక నగరంలోని యువతకు ఏ విధమైన సంగీతం ఇష్టమో అనే దాని గురించి సర్వే నిర్వహించడం జరిగింది. పక్కన గల పై-చిత్రం ఈ సర్వే ఫలితాలను చూపుతోంది.
ఈ పై-చిత్రం ఆధారంగా క్రింది ప్రశ్నలకు జవాబులివ్వండి.
(i) 20 మంది శాస్త్రీయ సంగీతాన్ని ఇష్టపడితే, మొత్తం ఎంత మంది యువతను సర్వే చేయడం జరిగింది?
(ii) ఎక్కువ మంది ఏ రకమైన సంగీతాన్ని ఇష్టపడుతున్నారు?
(iii) ఒక క్యాసెట్ సంస్థ 1000 CDలు ఉత్పత్తి చేస్తే ఏ రకపు సంగీతానికి ఎన్నెన్ని CDలు చేయవలసి వస్తుంది?

2. 360 మంది గల ఒక సమూహమును వర్షాకాలం, చలికాలం మరియు వేసవి కాలం ఈ మూడింటిలో వారికి ఇష్టమైన కాలం గురించి అడగడం జరిగినది.
(i) ఏ కాలంనకు ఎక్కువ ఓట్లు వచ్చాయి?
(ii) ప్రతీ సెక్టార్ కోణమును కనుగొనండి.
(iii) ఈ వివరాలు చూపడానికి ఒక పై-చిత్రం గీయండి.

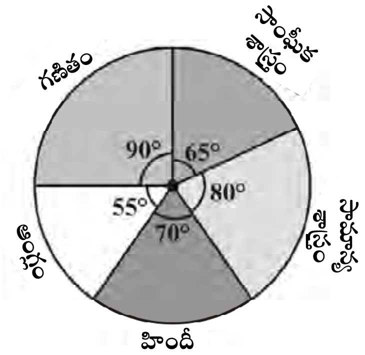
ఋతువు	ఓట్ల సంఖ్య
వేసవి కాలం	90
వర్షాకాలం	120
శీతాకాలం	150

3. క్రింది వివరాలకు ఒక వృత్త రేఖా చిత్రాన్ని గీయండి. వివిధ రకాల రంగులను ఇష్టపడు ప్రజల సంఖ్యను క్రింది పట్టికలో చూపడం జరిగింది.

రంగులు	ప్రజలు
నీలం	18
ఆకుపచ్చ	9
ఎరుపు	6
పసుపు	3
మొత్తం	**36**

వృత్తంలో ప్రతిసెక్టారు భాగమును కనుగొనండి.
ఉదాహరణకు నీలం $\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$; ఆకుపచ్చ $\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$
మొదలైనవి. దీనిని సరూప కోణాలు కనుగొనడానికి ఉపయోగించండి.

4. ప్రక్క వృత్త రేఖా చిత్రంలో ఒక విద్యార్థి హిందీ,ఆంగ్లము, గణితం, సాంఘిక శాస్త్రం, సామాన్య శాస్త్ర పరీక్షలలో సాధించిన మార్కులను ఇవ్వడం జరిగింది. విద్యార్థి సాధించిన మొత్తం మార్కులు 540 అయిన ఈ క్రింది ప్రశ్నలకు సమాధానాలు రాయండి.
(i) ఏ విషయంలో విద్యార్థి 105 మార్కులు సాధించాడు?
(సూచన: 540 మార్కులకు సమానమైన కేంద్రీయ కోణం 360° అయిన 105 మార్కులకు సమానమైన కేంద్రీయ కోణం విలువ ఎంత?)
(ii) విద్యార్థికి హిందీ కంటే గణితంలో ఎన్ని ఎక్కువ మార్కులు వచ్చాయి?
(iii) గణితం మరియు సాంఘిక శాస్త్రంలో వచ్చిన మార్కులు మొత్తం, సామాన్య శాస్త్రం మరియు హిందీలో వచ్చిన మార్కులు మొత్తం కన్నా ఎక్కువ అని నిర్ధారించండి. **(సూచన:** కేవలం కేంద్రీయ కోణాలను గమనించండి).



5. The number of students in a hostel, speaking different languages is given below. Display the data in a pie chart.

Language	Hindi	English	Marathi	Tamil	Bengali	Total
Number of students	40	12	9	7	4	72

5.5 Chance and Probability

Sometimes it happens that during rainy season, you carry a raincoat every day and it does not rain for many days. However, by chance, one day you forget to take the raincoat and it rains heavily on that day.

Sometimes it so happens that a student prepares 4 chapters out of 5, very well for a test. But a major question is asked from the chapter that she left unprepared.

Everyone knows that a particular train runs in time but the day you reach well in time it is late!

You face a lot of situations such as these where you take a chance and it does not go the way you want it to. Can you give some more examples? These are examples where the chances of a certain thing happening or not happening are not equal. The chances of the train being in time or being late are not the same. When you buy a ticket which is wait listed, you do take a chance. You hope that it might get confirmed by the time you travel.

We however, consider here certain experiments whose results have an equal chance of occurring.

5.5.1 Getting a result

You might have seen that before a cricket match starts, captains of the two teams go out to toss a coin to decide which team will bat first.

What are the possible results you get when a coin is tossed? Of course, Head or Tail.

Imagine that you are the captain of one team and your friend is the captain of the other team. You toss a coin and ask your friend to make the call. Can you control the result of the toss? Can you get a head if you want one? Or a tail if you want that? No, that is not possible. Such an experiment is called a **random experiment**. Head or Tail are the two **outcomes** of this experiment.

TRY THESE

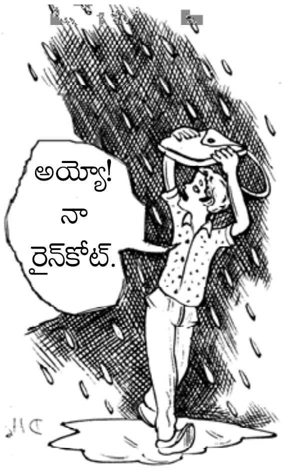
1. If you try to start a scooter, what are the possible outcomes?
2. When a die is thrown, what are the six possible outcomes?

5. ఒక వసతి గృహంలోని విద్యార్థులు వారు మాట్లాడే వివిధ భాషలను తెలియజేయు వివరాలు క్రింద ఇవ్వబడ్డాయి. దీనిని వృత్త రేఖా చిత్రంలో చూపండి.

భాష	హిందీ	ఆంగ్లం	మరాఠి	తమిళం	బెంగాలీ	మొత్తం
విద్యార్థుల సంఖ్య	40	12	9	7	4	72

5.5 అవకాశము మరియు సంభావ్యత

వర్షా కాలంలో ప్రతిరోజు రైన్ కోట్ తీసుకొని వెళుతున్నప్పటికిని ఒక్కొక్కసారి చాలా రోజులు వర్షం కురవక పోవచ్చు. అనుకోకుండా ఏదైనా ఒకరోజు రైన్ కోట్ తీసుకుని వెళ్ళడం మర్చిపోతే ఆ రోజు విపరీతమైన వర్షం కురవవచ్చు.



ఒక్కొక్కసారి ఒక విద్యార్థి 5 అధ్యాయాలలోని ఏవైనా 4 అధ్యాయాలు బాగా సాధన చేసి ఉంటాడు. కాని పరీక్షలో ఎక్కువ ప్రశ్నలు వదలి వేసిన అధ్యాయం నుండే రావడం జరుగుతుంది.

ప్రతి రోజు ఖచ్చితమైన సమయానికి తిరిగే రైలు, నీవు సమయానికి వచ్చిన రోజు అది ఆలస్యంగా రావడం తెలిసిన విషయమే.

మీరు జరగాలని కోరుకున్న విధంగా జరుగని ఎన్నో పరిస్థితులను మీరు ఎదుర్కొని ఉంటారు. ఇలాంటి మరికొన్ని ఉదాహరణలు ఇవ్వగలరా? ఇవన్నీ, సంఘటనలు జరగడానికి, జరగక పోవడానికి గల అవకాశాలు సమానంగా ఉండని వాటికి ఉదాహరణలు. రైలు బండి సరైన సమయానికి రావడం లేదా ఆలస్యంగా రావడం అనే అవకాశాలు రెండూ ఒకటే కాదు. టిక్కెట్ కొనేటప్పుడు వెయిటింగ్ లిస్టు నందు ఉన్నప్పటికీ, దాన్ని ఒక అవకాశంగా తీసుకుంటాం. ప్రయాణ సమయానికి నిర్ధారణ అయ్యే అవకాశం ఉంటుంది అని ఆశిస్తాం.
ఏదైనప్పటికీ, జరగటానికి సమాన అవకాశాలు గల ప్రయోగాలు కొన్నింటిని మనం పరిశీలిద్దాం.

5.5.1 పర్యవసానాలను పొందడం

క్రికెట్ ఆట ప్రారంభం కావటానికి ముందు రెండు జట్ల నాయకులు ఒక నాణెమును ఎగుర వేయుట ద్వారా ఏ జట్టు ముందుగా బ్యాటింగ్ చేయాలో నిర్ధారించుకోవడాన్ని మీరు చూసి ఉంటారు.
ఒక నాణెమును ఎగురవేసినపుడు వచ్చే పర్యవసానాలు ఏవి? అది బొమ్మ లేదా బొరుసు అవుతుంది. మీరు ఒక జట్టుకు నాయకుడిగా, మరొక జట్టుకు మీ మిత్రుడు నాయకుడిగా ఉన్నారు అనుకుందాం. మీరు నాణెమును ఎగుర వేసి, మీ మిత్రుడిని పర్యవసానాన్ని ఎన్నుకోమని అడగండి. నాణెమును ఎగుర వేయడం ద్వారా వచ్చు పర్యవసానమును మీరు నియంత్రించగలరా? బొమ్మ రావాలని కోరుకుంటే ఆ ఫలితాన్ని మీరు పొందగలరా? అలాగే బొరుసు కావాలంటే బొరుసును పొందగలరా? పొందలేము. ఇది సాధ్యంకాని పని. ఇలాంటి ప్రయోగాన్ని **యాదృచ్ఛిక ప్రయోగం** అంటాం. బొమ్మ మరియు బొరుసు అనేవి ఈ ప్రయోగం యొక్క **పర్యవసానములు**.

ప్రయత్నించండి

1. ఒక స్కూటర్‌ను స్టార్ట్ చేయడానికి ప్రయత్నించినపుడు సాధ్యపడే పర్యవసానాలు ఏవి?
2. ఒక పాచికను దొర్లించినపుడు వచ్చే ఆరు పర్యవసానాలు ఏవి?

3. When you spin the wheel shown, what are the possible outcomes? (Fig 5.9) List them.

   (Outcome here means the sector at which the pointer stops).

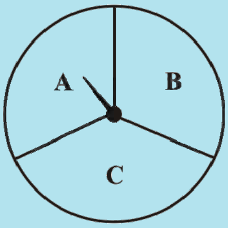


Fig 5.9

Fig 5.10

4. You have a bag with five identical balls of different colours and you are to pull out (draw) a ball without looking at it; list the outcomes you would get (Fig 5.10).

THINK, DISCUSS AND WRITE

In throwing a die:

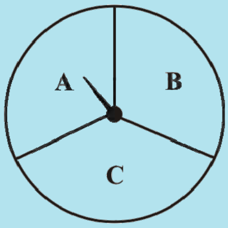
- Does the first player have a greater chance of getting a six?
- Would the player who played after him have a lesser chance of getting a six?
- Suppose the second player got a six. Does it mean that the third player would not have a chance of getting a six?

5.5.2 Equally likely outcomes:

A coin is tossed several times and the number of times we get head or tail is noted. Let us look at the result sheet where we keep on increasing the tosses:

Number of tosses	Tally marks (H)	Number of heads	Tally mark (T)	Number of tails
50	卌 卌 卌 卌 卌 ||	27	卌 卌 卌 卌 |||	23
60	卌 卌 卌 卌 卌 |||	28	卌 卌 卌 卌 卌 卌 ||	32
70	...	33	...	37
80	...	38	...	42
90	...	44	...	46
100	...	48	...	52

3. క్రింది చూపిన చక్రాన్ని (పటం 5.9) తిప్పినచో ఏయే పర్యవసానాలు రావచ్చు? వాటిని రాయండి. (ఇచ్చట పర్యవసానం అనగా సూచిక ముల్లు ఏ అక్షరం సూచించే సెక్టరు వద్ద నిలుస్తుందో అని అర్థం).



పటం 5.9

పటం 5.10

4. ఒక సంచిలో ఒకే పరిమాణం గల ఐదు వేర్వేరు రంగుల బంతులు ఉన్నాయి. యాదృచ్ఛికంగా ఒక బంతిని బయటకు తీసినచో వచ్చు పర్యవసానాలు రాయండి (పటం 5.10).

ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి

ఒక పాచికను దొర్లిస్తే:

- మొదట దొర్లించిన ఆటగాడికి ఆరు పడే అవకాశం ఎక్కువగా ఉంటుందా?
- అతని తరువాత దొర్లించిన ఆటగాడికి ఆరు పడే అవకాశం తక్కువగా ఉంటుందా?
- ఒకవేళ రెండవ ఆటగాడు దొర్లించినపుడు ఆరు పడితే, మూడవ ఆటగాడు దొర్లించినపుడు ఆరు రావడానికి అవకాశం లేదా?

5.5.2 సమ సంభవ పర్యవసానములు

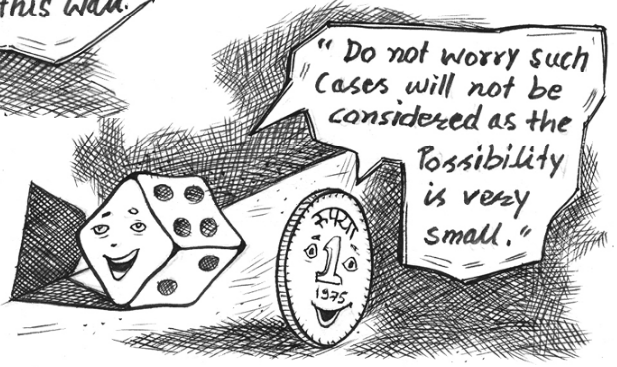
ఒక నాణెమును అనేక సార్లు ఎగుర వేసినపుడు బొమ్మ, బొరుసు ఎన్నిసార్లు పడిందో నమోదు చేయడం జరిగింది. ఎక్కువ సార్లు నాణెమును ఎగుర వేసే కొద్దీ ఫలితాలు ఎలా వచ్చాయో చూద్దాం:

నాణెమును ఎగురవేసిన సంఖ్య	గణన చిహ్నాలు (H)	బొమ్మల సంఖ్య	గణన చిహ్నాలు (T)	బొరుసుల సంఖ్య
50	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 ||	27	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |||	23
60	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |||	28	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 ||	32
70	...	33	...	37
80	...	38	...	42
90	...	44	...	46
100	...	48	...	52

Observe that as you increase the number of tosses more and more, the number of heads and the number of tails come closer and closer to each other.

This could also be done with a die, when tossed a large number of times. Number of each of the six outcomes become almost equal to each other.

In such cases, we may say that the different outcomes of the experiment are equally likely. This means that each of the outcomes has the same chance of occurring.



5.5.3 Linking chances to probability

Consider the experiment of tossing a coin once. What are the outcomes? There are only two outcomes – Head or Tail. Both the outcomes are equally likely. Likelihood of getting a head is one out of two outcomes, i.e., $\frac{1}{2}$. In other words, we say that the probability of getting a head = $\frac{1}{2}$. What is the probability of getting a tail?

Now take the example of throwing a die marked with 1, 2, 3, 4, 5, 6 on its faces (one number on one face). If you throw it once, what are the outcomes?

The outcomes are: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Thus, there are six equally likely outcomes.

What is the probability of getting the outcome '2'?

It is $\frac{1}{6}$ $\begin{matrix} \leftarrow \text{ Number of outcomes giving 2} \\ \leftarrow \text{ Number of equally likely outcomes.} \end{matrix}$

What is the probability of getting the number 5? What is the probability of getting the number 7? What is the probability of getting a number 1 through 6?

5.5.4 Outcomes as events

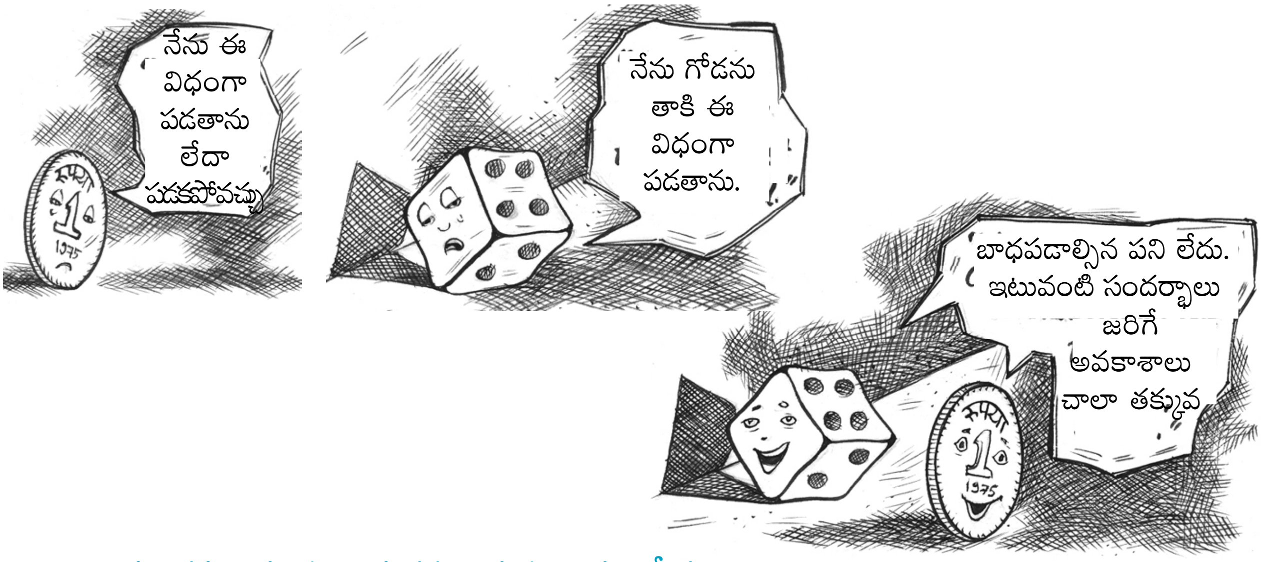
Each outcome of an experiment or a collection of outcomes make an **event**.

For example in the experiment of tossing a coin, getting a Head is an event and getting a Tail is also an event.

In case of throwing a die, getting each of the outcomes 1, 2, 3, 4, 5 or 6 is an event.

నాణెమును ఎగురవేయు సంఖ్యను పెంచుతూపోతే బొమ్మపడే సంఖ్య, బొరుసు పడే సంఖ్య దాదాపుగా సమానం అగుటను మనం గమనించవచ్చు. ఇలాగే పాచికను కూడా అనేక సార్లు దొర్లిస్తే ఆరు రకాల పర్యవసానాలు పడే అవకాశాల సంఖ్య దాదాపు సమానంగా ఉంటుంది.

ఇటువంటి సందర్భములలో ప్రయోగంలోని వివిధ రకములైన అన్ని పర్యవసానాలకు సమాన అవకాశములు ఉంటాయి. అనగా ప్రతి పర్యవసానము వచ్చుటకు సమాన అవకాశం ఉన్నది.



5.5.3 అవకాశములను సంభావ్యతకు అనుసంధానం చేయుట

ఒకసారి నాణెమును ఎగురవేయుట అనే ప్రయోగమును పరిశీలిద్దాము. పర్యవసానాలు ఏమిటి? కేవలం రెండే పర్యవసానాలు బొమ్మ లేదా బొరుసు. రెండు కూడా సమ సంభవ పర్యవసానాలు. ఈ రెండింటిలో బొమ్మ పడు అవకాశం, రెండు పర్యవసానాలలో ఒకటి, అనగా $\frac{1}{2}$. మరో రకంగా,

బొమ్మ పడు సంభావ్యత = $\frac{1}{2}$, అలాగే బొరుసు పడే సంభావ్యత ఎంత?

ఇప్పుడు ఆరు ముఖాల మీద 1,2,3,4,5,6 అని రాసిన పాచికను (ఒక ముఖంపై ఒక అంకె) ఉదాహరణగా తీసుకుందాం. ఈ పాచికను ఒకసారి దొర్లించినచో, పర్యవసానాలు ఏమిటి?

సాధ్యపడు పర్యవసానాలు: 1,2,3,4,5,6. కావున సమ సంభవ పర్యవసానాలు ఆరు గలవు.

2 పడు సంభావ్యత ఎంత?

అది $\frac{1}{6}$ ← 2 పడే పర్యవసానాల సంఖ్య. / ← మొత్తం సమ సంభవ పర్యవసానాల సంఖ్య

ఈ ఆరింటి నుండి, 5 పడే సంభావ్యత ఎంత? 7 పడే సంభావ్యత ఎంత? 1 పడే సంభావ్యత ఎంత?

5.5.4 ఘటనలుగా పర్యవసానాలు

ఒక ప్రయోగంలోని ప్రతి పర్యవసానము లేదా పర్యవసానాల సమూహాన్ని ఒక **ఘటన** అంటారు.

ఉదాహరణకు ఒక నాణెమును ఎగురవేయుట అనే ప్రయోగంలో బొమ్మను పొందుట అనేది ఒక ఘటన మరియు బొరుసు పొందుట కూడా ఒక ఘటన అవుతుంది.

ఒక పాచికను దొర్లించు సందర్భములో 1,2,3,4,5 లేదా 6 లలో ప్రతీ దానిని పొందుట ఒక ఘటన అగును.

Is getting an even number an event? Since an even number could be 2, 4 or 6, getting an even number is also an event. What will be the probability of getting an even number?

It is $\frac{3}{6}$ ← Number of outcomes that make the event
← Total number of outcomes of the experiment.

Example 3: A bag has 4 red balls and 2 yellow balls. (The balls are identical in all respects other than colour). A ball is drawn from the bag without looking into the bag. What is probability of getting a red ball? Is it more or less than getting a yellow ball?

Solution: There are in all (4 + 2 =) 6 outcomes of the event. Getting a red ball consists of 4 outcomes. (Why?)

Therefore, the probability of getting a red ball is $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. In the same way the probability of getting a yellow ball = $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ (Why?). Therefore, the probability of getting a red ball is more than that of getting a yellow ball.

TRY THESE

Suppose you spin the wheel

1. (i) List the number of outcomes of getting a green sector and not getting a green sector on this wheel (Fig 5.11).
   (ii) Find the probability of getting a green sector.
   (iii) Find the probability of not getting a green sector.

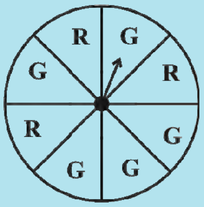


Fig 5.11

5.5.5 Chance and probability related to real life

We talked about the chance that it rains just on the day when we do not carry a rain coat.

What could you say about the chance in terms of probability? Could it be one in 10 days during a rainy season? The probability that it rains is then $\frac{1}{10}$. The probability that it does not rain = $\frac{9}{10}$. (Assuming raining or not raining on a day are equally likely)

The use of probability is made in various cases in real life.

1. To find characteristics of a large group by using a small part of the group.

   For example, during elections 'an exit poll' is taken. This involves asking the people whom they have voted for, when they come out after voting at the centres which are chosen off hand and distributed over the whole area. This gives an idea of chance of winning of each candidate and predictions are made based on it accordingly.

సరి సంఖ్యను పొందుట అనేది ఒక ఘటన అగునా? 2,4 లేదా 6 సరి సంఖ్యలు కాబట్టి, సరి సంఖ్యను పొందడం కూడా ఒక ఘటనే. సరి సంఖ్య పడు ఘటన యొక్క సంభావ్యత ఎంత?

ఇది $\frac{3}{6}$ ← ఘటన జరుగుటకు అవసరమయ్యే పర్యవసానాల సంఖ్య

← ప్రయోగంలో మొత్తం పర్యవసానాల సంఖ్య.

ఉదాహరణ 3: ఒక సంచిలో 4 ఎరుపు బంతులు మరియు 2 పసుపు బంతులు కలవు. (అన్ని బంతులు వేరు వేరు రంగులను కలిగి ఒకే పరిమాణం ఉన్నాయి). యాదృచ్ఛికంగా ఒక బంతిని తీసినట్లయితే, ఎర్ర బంతి అగుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము? అది పసుపు బంతి అగుటకు గల సంభావ్యత కంటే ఎక్కువా, తక్కువా?

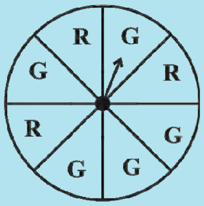
సాధన: ఈ ఘటనలో సాధ్యమయ్యే మొత్తం పర్యవసానాలు (4 + 2 = 6). ఎరుపు బంతి అగుటకు సాధ్యపడు పర్యవసానాలు 4. (ఎందుకు?)

కాబట్టి, ఎరుపు రంగు బంతి అగుటకు సంభావ్యత $= \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. ఇదే విధంగా పసుపు రంగు బంతి అగుటకు సంభావ్యత $= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ (ఎందుకు?). కాబట్టి ఎరుపు రంగు బంతిని పొందు సంభావ్యత, పసుపు రంగు బంతిని పొందు సంభావ్యత కన్నా ఎక్కువ.

ప్రయత్నించండి

ఒక చక్రాన్ని మీరు తిప్పినచో

1. (i) ఆకుపచ్చ రంగు సెక్టారుపై ముల్లు నిలుబడు పర్యవసానాల సంఖ్య మరియు ఆకుపచ్చ రంగు కాని సెక్టారుపై ముల్లు నిలబడు పర్యవసానములు రాయండి. (పటం 5.11)
   (ii) ఆకుపచ్చ రంగు సెక్టారు పై ఆగుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనండి.
   (iii) ఆకుపచ్చ రంగు సెక్టారుపై ముల్లు ఆగకుండా ఉండుటకు గల సంభావ్యత కనుగొనండి.



పటం 5.11

5.5.5 నిజ జీవితంలో అవకాశం మరియు సంభావ్యతలు

మనం రైన్ కోట్ తీసుకెళ్ళని రోజు వర్షం కురిసే అవకాశాల గురించి ఇంతకు ముందే మాట్లాడుకున్నాం. సంభావ్యత దృష్ట్యా అవకాశాలను మనం ఏమి చెప్పవచ్చు? వర్షాకాలంలో 10 రోజులలో ఒక రోజు అయినా వర్షం పడుతుందా? అయితే వర్షం పడుటకు సంభావ్యత $\frac{1}{10}$. వర్షము పడకపోవుటకు సంభావ్యత $= \frac{9}{10}$. (ఆ రోజు వర్షం పడుట, పడకుండుటను సమ సంభవ ఘటనలుగా ఊహించుకుందాం.)

నిజ జీవితంలో మనం అనేక సంధర్భాలలో సంభావ్యతను ఉపయోగిస్తాం.

1. ఒక పెద్ద సమూహం యొక్క లక్షణాలను అందులోని చిన్న భాగాన్ని ఉపయోగించి తెలుసుకుంటాం.

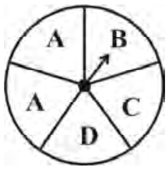
   ఉదాహరణకు ఎన్నికలు జరుగు సమయాన 'ఎన్నికల సర్వే ఫలితాలను' తీసుకుందాం. వివిధ ప్రాంతాలలో ఎన్నికలు ముగిసిన తరువాత యాదృచ్ఛికంగా కొందరిని ఎంపిక చేసుకొని, ఎన్నికల ఫలితాలపై సర్వే చేయడం జరుగుతుంది. దీని నుండి ఏ అభ్యర్థి గెలుస్తాడో ముందే ఊహించి చెప్పవచ్చు.

2. Meteorological Department predicts weather by observing trends from the data over many years in the past.

EXERCISE 5.3

1. List the outcomes you can see in these experiments.

(a) Spinning a wheel



(b) Tossing two coins together

2. When a die is thrown, list the outcomes of an event of getting

(i) (a) a prime number (b) not a prime number.

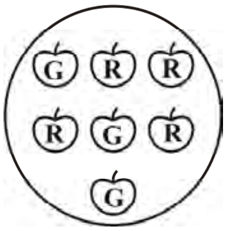
(ii) (a) a number greater than 5 (b) a number not greater than 5.

3. Find the.

(a) Probability of the pointer stopping on D in (Question 1-(a))?

(b) Probability of getting an ace from a well shuffled deck of 52 playing cards?

(c) Probability of getting a red apple. (See figure below)



4. Numbers 1 to 10 are written on ten separate slips (one number on one slip), kept in a box and mixed well. One slip is chosen from the box without looking into it. What is the probability of .

(i) getting a number 6?

(ii) getting a number less than 6?

(iii) getting a number greater than 6?

(iv) getting a 1-digit number?

5. If you have a spinning wheel with 3 green sectors, 1 blue sector and 1 red sector, what is the probability of getting a green sector? What is the probability of getting a non blue sector?

6. Find the probabilities of the events given in Question 2.

WHAT HAVE WE DISCUSSED?

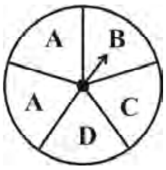
1. Data mostly available to us in an unorganised form is called **raw data**.

2. In order to draw meaningful inferences from any data, we need to organise the data systematically.

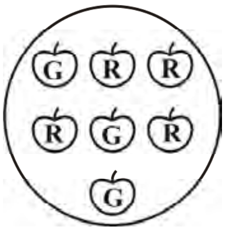
2. వాతావరణ శాఖ గడిచిన సంవత్సరాల దత్తాంశం ఆధారంగా వాతావరణాన్ని అంచనా వేస్తుంది.

అభ్యాసం - 5.3

1. క్రింది ప్రయోగాలలో సాధ్యమయ్యే పర్యవసానాలను రాయండి.
   (a) చక్రాన్ని తిప్పడం (b) రెండు నాణెములను ఒకేసారి ఎగురవేయడం.



2. ఒక పాచికను దొర్లించినపుడు క్రింది ఘటనలకు సాధ్యమయ్యే పర్యవసానములను రాయండి.
   (i) (a) ప్రధాన సంఖ్య వచ్చుటకు (b) ప్రధాన సంఖ్య రాకపోవుటకు
   (ii) (a) 5 కన్నా పెద్ద సంఖ్య వచ్చుటకు (b) 5 కన్నా పెద్ద సంఖ్య రాకపోవుటకు.
3. సంభావ్యతలను కనుగొనండి.
   (a) (1(a) ప్రశ్నలో) ముల్లు D నందు ఆగుటకు గల సంభావ్యత?
   (b) బాగా కలిపిన 52 పేకముక్కల కట్ట నుంచి ఏస్ ముక్క వచ్చుటకు గల సంభావ్యత?
   (c) ఎరుపు రంగు ఆపిల్ పొందుటకు సంభావ్యత (క్రింది పటంను చూడండి)?

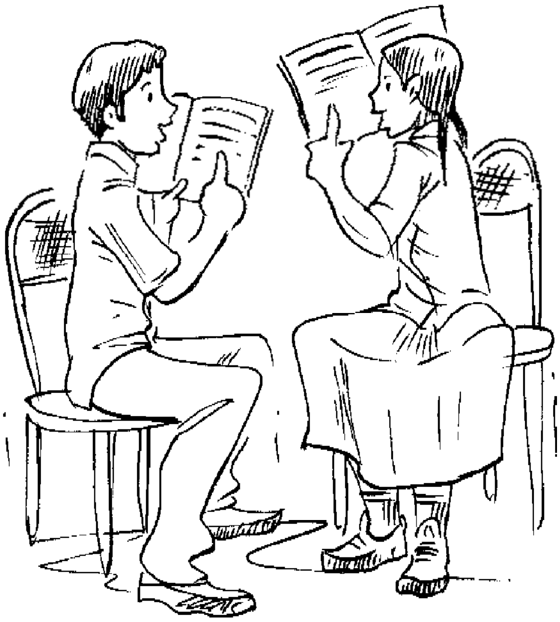


4. వేర్వేరు చీటిలపై 1 నుండి 10 వరకు సంఖ్యలను రాసి (ఒక్కొక్క చీటిపై ఒక సంఖ్య). ఒక డబ్బాలో వేసి బాగా కలపండి. యాదృచ్ఛికంగా ఒక చీటిని తీసినట్లయితే ఈ క్రింది వాని సంభావ్యతలు ఎంత?
   (i) 6 వచ్చుటకు?
   (ii) 6 కన్నా తక్కువ సంఖ్య వచ్చుటకు?
   (iii) 6 కన్నా పెద్ద సంఖ్య వచ్చుటకు?
   (iv) ఒక అంకె గల సంఖ్య వచ్చుటకు?
5. ఒక తిరిగే చక్రము నందు 3 ఆకుపచ్చ, 1 నీలం మరియు 1 ఎరుపు సెక్టార్లు ఉన్నట్లయితే ముల్లు ఆకు పచ్చ సెక్టారు పొందు సంభావ్యత ఎంత? నీలం రంగు కాని సెక్టారు పొందు సంభావ్యత ఎంత?
6. 2వ ప్రశ్నలోని ఘటనల సంభావ్యతలను కనుగొనుము?

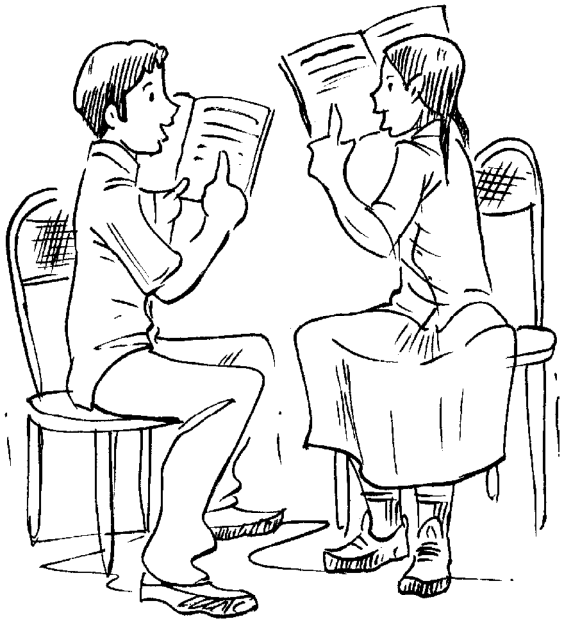
మనం ఏమి చర్చించుకున్నాం?

1. మనకు అందుబాటులో గల క్రమ పద్ధతిలో లేని సమాచారమును **ముడి దత్తాంశము** అని అంటారు.
2. ముడి దత్తాంశమును అర్థవంతంగా తెలుసుకోవడానికి క్రమబద్ధంగా వర్గీకృతం చేయవలసి ఉంటుంది.

3. **Frequency** gives the number of times that a particular entry occurs.
4. Raw data can be 'grouped' and presented systematically through 'grouped frequency distribution'.
5. Grouped data can be presented using **histogram**. Histogram is a type of bar diagram, where the class intervals are shown on the horizontal axis and the heights of the bars show the frequency of the class interval. Also, there is no gap between the bars as there is no gap between the class intervals.
6. Data can also presented using **circle graph** or **pie chart**. A circle graph shows the relationship between a whole and its part.
7. There are certain experiments whose outcomes have an equal chance of occurring.
8. A **random experiment** is one whose outcome cannot be predicted exactly in advance.
9. Outcomes of an experiment are **equally likely** if each has the same chance of occurring.
10. **Probability of an event** $= \dfrac{\text{Number of outcomes that make an event}}{\text{Total number of outcomes of the experiment}}$, when the outcomes are equally likely.
11. One or more outcomes of an experiment make an **event**.
12. Chances and probability are related to real life.



3. దత్తాంశములో ఒక పరిశీలనా అంశం ఎన్ని సార్లు వచ్చిందో తెలియజేసే సంఖ్యయే **పౌనఃపున్యం.**
4. ముడి దత్తాంశమును క్రమబద్ధీకరించి వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభజనముగా ప్రదర్శించవచ్చు.
5. వర్గీకృత దత్తాంశమును **సోపాన రేఖా చిత్రము** ద్వారా ప్రదర్శించవచ్చు. సోపాన రేఖా చిత్రము ఒక రకమైన కమ్మీ రేఖా చిత్రము. ఇందులో తరగతి అంతరములను క్షితిజ సమాంతర అక్షముపై, కమ్మీల ఎత్తులను తరగతుల యొక్క పౌనఃపున్యంగా సూచిస్తారు. అంతే కాకుండా తరగతి అంతరాల మధ్య ఖాళీ ఉండనట్లయితే కమ్మీలకు మధ్య కూడా ఎటువంటి ఖాళీ ఉండదు.
6. దత్తాంశమును **వృత్తరేఖా చిత్రం** లేదా **పై-చిత్రం** ద్వారా కూడా చూపవచ్చు. వృత్తరేఖా చిత్రం మొత్తం మరియు వాటి భాగాల మధ్య సంబంధాన్ని చూపును.
7. కొన్ని యాదృచ్ఛిక ప్రయోగాలలో పర్యవసానాలకు సమాన అవకాశాలు ఉంటాయి.
8. ఖచ్చితమైన ఫలితాన్ని ఊహించడానికి వీలులేని ప్రయోగమును **యాదృచ్ఛిక ప్రయోగం** అంటారు.
9. ఒక ప్రయోగంలో వచ్చే పర్యవసానాలకు సమాన అవకాశాలు ఉండే వాటిని **సమసంభవ ఘటనలు** అంటారు.
10. **ఒక ఘటన యొక్క సంభావ్యత** $= \dfrac{\text{అనుకూల పర్యవసానముల సంఖ్య}}{\text{మొత్తం పర్యవసానముల సంఖ్య}}$. సమ సంభవ పర్యవసానములు కలిగి ఉన్నప్పుడు
11. ఒక ప్రయోగంలో ఒకటి లేదా అంతకన్నా ఎక్కువ పర్యవసానములు ఉంటే అది ఒక **ఘటన** అవుతుంది.
12. అవకాశం మరియు సంభావ్యతలు నిజ జీవితమునకు అన్వయించబడతాయి.



Squares and Square Roots

CHAPTER 6

0852CH06

6.1 Introduction

You know that the area of a square = side × side (where 'side' means 'the length of a side'). Study the following table.

Side of a square (in cm)	Area of the square (in cm^2)
1	$1 \times 1 = 1 = 1^2$
2	$2 \times 2 = 4 = 2^2$
3	$3 \times 3 = 9 = 3^2$
5	$5 \times 5 = 25 = 5^2$
8	$8 \times 8 = 64 = 8^2$
a	$a \times a = a^2$

What is special about the numbers 4, 9, 25, 64 and other such numbers?

Since, 4 can be expressed as $2 \times 2 = 2^2$, 9 can be expressed as $3 \times 3 = 3^2$, all such numbers can be expressed as the product of the number with itself.

Such numbers like 1, 4, 9, 16, 25, ... are known as **square numbers**.

In general, if a natural number m can be expressed as n^2, where n is also a natural number, then m is a **square number**. Is 32 a square number?

We know that $5^2 = 25$ and $6^2 = 36$. If 32 is a square number, it must be the square of a natural number between 5 and 6. But there is no natural number between 5 and 6.

Therefore 32 is not a square number.

Consider the following numbers and their squares.

Number	Square
1	$1 \times 1 = 1$
2	$2 \times 2 = 4$

వర్గములు - వర్గమూలాలు

అధ్యాయం

6

T7C3A1

6. 1 పరిచయం

చతురస్ర వైశాల్యం = భుజము × భుజము (భుజము అనగా అంచు యొక్క పొడవు అని అర్థం) అని మీకు తెలుసు. క్రింది పట్టికను పరిశీలించండి.

చతురస్ర భుజము (సెం.మీ.)	చతురస్ర వైశాల్యం (చ.సెం.మీ.)
1	$1 \times 1 = 1 = 1^2$
2	$2 \times 2 = 4 = 2^2$
3	$3 \times 3 = 9 = 3^2$
5	$5 \times 5 = 25 = 5^2$
8	$8 \times 8 = 64 = 8^2$
a	$a \times a = a^2$

4, 9, 25, 64 మరియు అటువంటి సంఖ్యల ప్రత్యేకత ఏమిటి?

4ను $2 \times 2 = 2^2$ గాను, 9ను $3 \times 3 = 3^2$, గాను వ్యక్తపరచవచ్చు. కావున, ఇటువంటి సంఖ్యలను, ఒక సంఖ్యను దానితోనే గుణించగా వచ్చు లబ్ధంగా వ్యక్తపరచవచ్చు.

ఇటువంటి సంఖ్యలు 1, 4, 9, 16, 25... లను **వర్గసంఖ్యలు** అని అంటారు.

సాధారణంగా ఏదైన సహజ సంఖ్య m ను n^2 గా రాయగలిగితే (n కూడా ఒక సహజ సంఖ్య) అప్పుడు m ఒక **వర్గసంఖ్య** అవుతుంది. 32 ఒక వర్గ సంఖ్య అవుతుందా?

$5^2 = 25$ మరియు $6^2 = 36$ అని మనకు తెలుసు. ఒక వేళ 32 వర్గసంఖ్య అయితే అది తప్పనిసరిగా 5, 6 ల మధ్యగల సహజ సంఖ్య యొక్క వర్గము కావాలి. కానీ 5, 6 ల మధ్య ఎటువంటి సహజ సంఖ్య లేదు. కావున 32 వర్గసంఖ్య కాదు.

క్రింది సంఖ్యలను, వాటి వర్గాలను పరిశీలించండి.

సంఖ్య	వర్గము
1	$1 \times 1 = 1$
2	$2 \times 2 = 4$

3	3 × 3 = 9
4	4 × 4 = 16
5	5 × 5 = 25
6	-----------
7	-----------
8	-----------
9	-----------
10	-----------

- From the above table, can we enlist the square numbers between 1 and 100? Are there any natural square numbers upto 100 left out?

You will find that the rest of the numbers are not square numbers.

The numbers 1, 4, 9, 16 ... are square numbers. These numbers are also called **perfect squares**.

TRY THESE

1. Find the perfect square numbers between (i) 30 and 40 (ii) 50 and 60

6.2 Properties of Square Numbers

Following table shows the squares of numbers from 1 to 20.

Number	Square	Number	Square
1	1	11	121
2	4	12	144
3	9	13	169
4	16	14	196
5	25	15	225
6	36	16	256
7	49	17	289
8	64	18	324
9	81	19	361
10	100	20	400

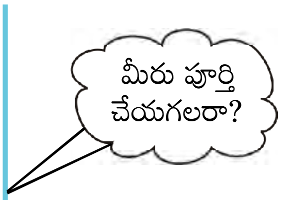
Study the square numbers in the above table. What are the ending digits (that is, digits in the units place) of the square numbers? All these numbers end with 0, 1, 4, 5, 6 or 9 at units place. None of these end with 2, 3, 7 or 8 at unit's place.

Can we say that if a number ends in 0, 1, 4, 5, 6 or 9, then it must be a square number? Think about it.

TRY THESE

1. Can we say whether the following numbers are perfect squares? How do we know?
   (i) 1057 (ii) 23453 (iii) 7928 (iv) 222222
   (v) 1069 (vi) 2061

3	3 × 3 = 9
4	4 × 4 = 16
5	5 × 5 = 25
6	-----------
7	-----------
8	-----------
9	-----------
10	-----------



పై పట్టిక లో, 1 నుండి 100 మధ్యగల వర్గసంఖ్యలను నమోదు చేయగలమా? 100 వరకు గల సహజ వర్గసంఖ్యలేమైనా వదిలేశామా?
మిగిలిన సంఖ్యలు వర్గ సంఖ్యలు కావని మీరు కనుగొంటారు.
1, 4, 9, 16... మొదలగు సంఖ్యలను వర్గ సంఖ్యలు అని అంటారు.
వీటినే **పరిపూర్ణ వర్గములు** అని కూడా అంటారు.

ప్రయత్నించండి

1. (i) 30, 40 (ii) 50, 60 ల మధ్య గల పరిపూర్ణ వర్గాలను కనుక్కోండి.

6.2 వర్గ సంఖ్యల ధర్మాలు

క్రింది పట్టికలో 1 నుండి 20 వరకు గల సంఖ్యల వర్గాలు ఇవ్వబడినవి.

సంఖ్య	వర్గము	సంఖ్య	వర్గము
1	1	11	121
2	4	12	144
3	9	13	169
4	16	14	196
5	25	15	225
6	36	16	256
7	49	17	289
8	64	18	324
9	81	19	361
10	100	20	400

పై పట్టికలోని వర్గసంఖ్యలను పరిశీలించండి. వాటిన్నింటి చివరి అంకెలేవి (అనగా, ఒకట్ల స్థానంలోని అంకెలు)? ఈ సంఖ్యలన్నీ ఒకట్ల స్థానంలో 0, 1, 4, 5, 6 లేదా 9 తో అంతమవుతున్నాయి. ఏవీకూడా ఒకట్ల స్థానంలో 2, 3, 7 లేదా 8 లను కలిగిలేవు.

ఏదైనా సంఖ్య ఒకట్ల స్థానంలో 0, 1, 4, 5, 6 లేదా 9 ఉంటే, అది ఖచ్చితంగా వర్గసంఖ్య అవుతుందని చెప్పగలమా? ఆలోచించండి.

ప్రయత్నించండి

1. క్రింది సంఖ్యలు పరిపూర్ణ వర్గాలు అగునా? ఎలా చెప్పగలవు?
   (i) 1057 (ii) 23453 (iii) 7928 (iv) 222222
   (v) 1069 (vi) 2061

Write five numbers which you can decide by looking at their units digit that they are not square numbers.

2. Write five numbers which you cannot decide just by looking at their units digit (or units place) whether they are square numbers or not.

- Study the following table of some numbers and their squares and observe the one's place in both.

Table 1

Number	Square	Number	Square	Number	Square
1	1	11	121	21	441
2	4	12	144	22	484
3	9	13	169	23	529
4	16	14	196	24	576
5	25	15	225	25	625
6	36	16	256	30	900
7	49	17	289	35	1225
8	64	18	324	40	1600
9	81	19	361	45	2025
10	100	20	400	50	2500

The following square numbers end with digit 1.

Square	Number
1	1
81	9
121	11
361	19
441	21

TRY THESE

Which of 123^2, 77^2, 82^2, 161^2, 109^2 would end with digit 1?

Write the next two square numbers which end in 1 and their corresponding numbers.
You will see that if a number has 1 or 9 in the units place, then it's square ends in 1.

- Let us consider square numbers ending in 6.

Square	Number
16	4
36	6
196	14
256	16

TRY THESE

Which of the following numbers would have digit 6 at unit place.

(i) 19^2 (ii) 24^2 (iii) 26^2
(iv) 36^2 (v) 34^2

ఒకట్ల స్థానంలోని అంకెలను పరిశీలించడం ద్వారా వర్గ సంఖ్యలు కావని నిర్ణయించగల ఐదు సంఖ్యలను రాయండి.

2. ఒకట్ల స్థానంలోని అంకెలను పరిశీలించడం ద్వారా వర్గ సంఖ్యలు అవునో, కాదో నిర్ణయించలేనటువంటి ఐదు సంఖ్యలను వ్రాయండి.

- క్రింది పట్టికలో గల సంఖ్యలు, వాటి వర్గములలోని ఒకట్ల స్థానాలను పరిశీలించండి.

పట్టిక – 1

సంఖ్య	వర్గము	సంఖ్య	వర్గము	సంఖ్య	వర్గము
1	1	11	121	21	441
2	4	12	144	22	484
3	9	13	169	23	529
4	16	14	196	24	576
5	25	15	225	25	625
6	36	16	256	30	900
7	49	17	289	35	1225
8	64	18	324	40	1600
9	81	19	361	45	2025
10	100	20	400	50	2500

క్రింది వర్గసంఖ్యలు '1' తో అంతమవుతున్నాయి.

వర్గము	సంఖ్య
1	1
81	9
121	11
361	19
441	21

ప్రయత్నించండి

123^2, 77^2, 82^2, 161^2, 109^2 లలో ఏవి '1'తో అంతమవుతాయి?

ఒకట్ల స్థానంలో '1' ను కలిగిన తర్వాతి రెండు వర్గ సంఖ్యలను మరియు వాటి అసలు సంఖ్యలను రాయండి దీనిని బట్టి *ఒక సంఖ్య యొక్క ఒకట్ల స్థానంలో 1 లేదా 9 ఉంటే దాని వర్గం '1'తో అంతమవుతుందని మీరు తెలుసుకుంటారు.*

- 6తో అంతమయ్యే వర్గ సంఖ్యలను చూద్దాం.

వర్గము	సంఖ్య
16	4
36	6
196	14
256	16

ప్రయత్నించండి

క్రింది సంఖ్యలలో వేటికి ఒకట్ల స్థానంలో '6' ఉంటుంది.

(i) 19^2 (ii) 24^2 (iii) 26^2

(iv) 36^2 (v) 34^2

We can see that *when a square number ends in 6, the number whose square it is, will have either 4 or 6 in unit's place.*
Can you find more such rules by observing the numbers and their squares (Table 1)?

TRY THESE

What will be the "one's digit" in the square of the following numbers?

(i) 1234 (ii) 26387 (iii) 52698 (iv) 99880
(v) 21222 (vi) 9106

- Consider the following numbers and their squares.

We have one zero — $10^2 = 100$, $20^2 = 400$, $80^2 = 6400$ — But we have two zeros

We have two zeros — $100^2 = 10000$, $200^2 = 40000$, $700^2 = 490000$, $900^2 = 810000$ — But we have four zeros

If a number contains 3 zeros at the end, how many zeros will its square have ?
What do you notice about the number of zeros at the end of the number and the number of zeros at the end of its square?
Can we say that square numbers can only have even number of zeros at the end?

- See Table 1 with numbers and their squares.
What can you say about the squares of even numbers and squares of odd numbers?

TRY THESE

1. The square of which of the following numbers would be an odd number/an even number? Why?
(i) 727 (ii) 158 (iii) 269 (iv) 1980
2. What will be the number of zeros in the square of the following numbers?
(i) 60 (ii) 400

6.3 Some More Interesting Patterns

1. **Adding triangular numbers.**
Do you remember triangular numbers (numbers whose dot patterns can be arranged as triangles)?

```
                                      *
                             *        * *
                   *         * *      * **
          *        * *       * * *    * * * *
*         * *      * * *     * * * *  * * * * *
1         3        6         10       15
```

ఒక వర్గసంఖ్య 6 తో అంతమయితే, అది ఏ సంఖ్య యొక్క వర్గమగునో, ఆ సంఖ్య యొక్క ఒకట్ల స్థానంలో 4 లేదా 6 ఉంటుందని మనం చూడవచ్చు.

పట్టిక 1 నుండి సంఖ్యలు, వాటి వర్గాలను పరిశీలించి, మరిన్ని నియమాలను మీరు కనుగొనగలరా?

ప్రయత్నించండి

క్రింది సంఖ్యల వర్గాలలో "ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె" ఏది?

(i) 1234 (ii) 26387 (iii) 52698 (iv) 99880

(v) 21222 (vi) 9106

- క్రింది సంఖ్యలను, వాటి వర్గాలను పరిశీలించండి.

మేం ఒక సున్నాను కలిగి ఉన్నాం → $10^2 = 100$, $20^2 = 400$, $80^2 = 6400$ ← కానీ, మేం రెండు సున్నాలను కలిగి ఉన్నాం

మేం రెండు సున్నాలను కలిగి ఉన్నాం → $100^2 = 10000$, $200^2 = 40000$, $700^2 = 490000$, $900^2 = 810000$ ← కానీ, మేం నాలుగు సున్నాలను కలిగి ఉన్నాం

ఒక సంఖ్య చివర మూడు సున్నాలుంటే, దాని వర్గంలో ఎన్ని సున్నాలుంటాయి?

ఒక సంఖ్య యొక్క చివరనున్న సున్నాల సంఖ్య , దాని వర్గం చివరనున్న సున్నాల సంఖ్యను గురించి మీరేమి గమనించారు?

వర్గసంఖ్య చివరనున్న సున్నాలు ఎప్పుడూ సరిసంఖ్యలో మాత్రమే ఉంటాయని చెప్పవచ్చా?

- పట్టిక 1 లోని సంఖ్యలు , వాటి వర్గాలను గమనించండి.
  సరి సంఖ్యల వర్గాలు, బేసి సంఖ్యల వర్గాల గురించి మీరేమి చెప్పగలరు?

ప్రయత్నించండి

1. క్రింది సంఖ్యలలో దేని వర్గం బేసి సంఖ్య/సరిసంఖ్య అవుతుంది? ఎందుకు?

   (i) 727 (ii) 158 (iii) 269 (iv) 1980

2. క్రింది సంఖ్యల వర్గములో ఎన్ని సున్నాలు ఉంటాయి?

   (i) 60 (ii) 400

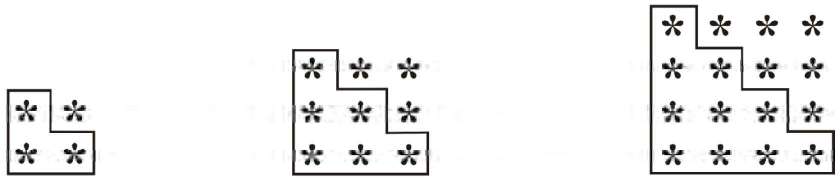
6.3 మరికొన్ని ఆసక్తికర అమరికలు

1. త్రిభుజాకార సంఖ్యల సంకలనం

త్రిభుజాకార సంఖ్యలు (సంఖ్యకు సమానమైన చుక్కలను త్రిభుజాకారంలో అమర్చగలవి) గుర్తున్నాయా?

```
                                      *
                           *          * *
                 *         * *        * **
         *       * *       * * *      * ***
*        * *     * * *     * * * *    * ****
1        3       6         10         15
```

If we combine two consecutive triangular numbers, we get a square number, like



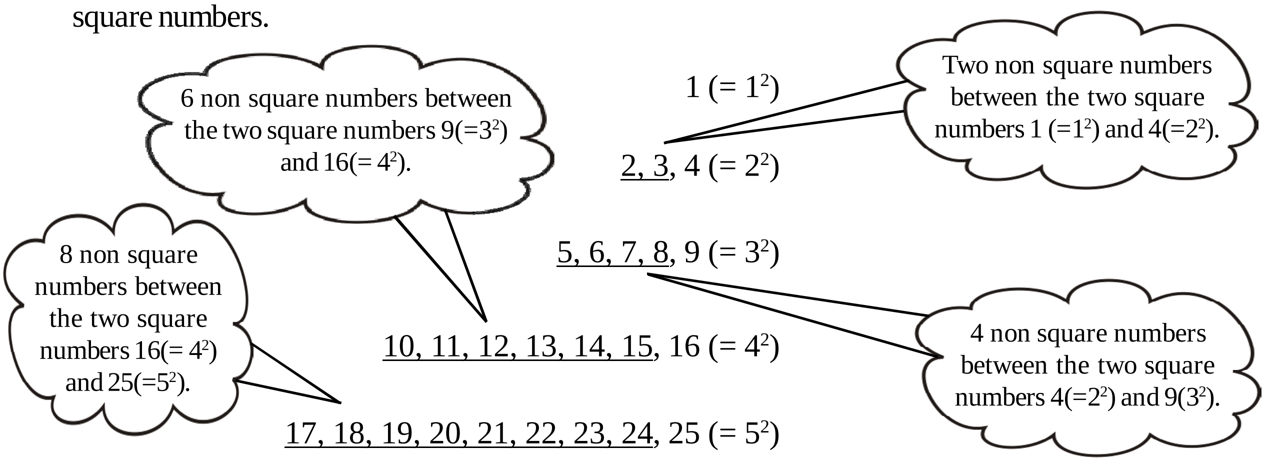
$1 + 3 = 4$
$= 2^2$

$3 + 6 = 9$
$= 3^2$

$6 + 10 = 16$
$= 4^2$

2. Numbers between square numbers

Let us now see if we can find some interesting pattern between two consecutive square numbers.



Between $1^2(=1)$ and $2^2(= 4)$ there are two (i.e., 2×1) non square numbers 2, 3.

Between $2^2(= 4)$ and $3^2(= 9)$ there are four (i.e., 2×2) non square numbers 5, 6, 7, 8.

Now, $3^2 = 9, \quad 4^2 = 16$

Therefore, $4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7$

Between $9(=3^2)$ and $16(= 4^2)$ the numbers are 10, 11, 12, 13, 14, 15 that is, six non-square numbers which is 1 less than the difference of two squares.

We have $4^2 = 16$ and $5^2 = 25$

Therefore, $5^2 - 4^2 = 9$

Between $16(= 4^2)$ and $25(= 5^2)$ the numbers are 17, 18, ... , 24 that is, eight non square numbers which is 1 less than the difference of two squares.

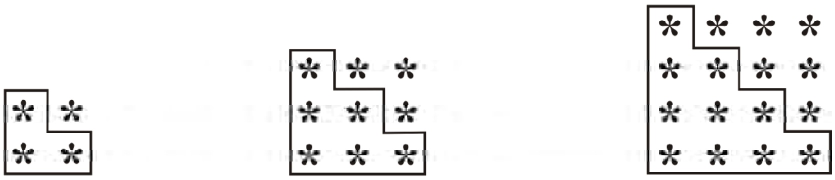
Consider 7^2 and 6^2. Can you say how many numbers are there between 6^2 and 7^2? If we think of any natural number n and $(n + 1)$, then,

$$(n + 1)^2 - n^2 = (n^2 + 2n + 1) - n^2 = 2n + 1.$$

We find that between n^2 and $(n + 1)^2$ there are $2n$ numbers which is 1 less than the difference of two squares.

Thus, in general we can say that *there are 2n non perfect square numbers between the squares of the numbers n and* $(n + 1)$. Check for $n = 5$, $n = 6$ etc., and verify.

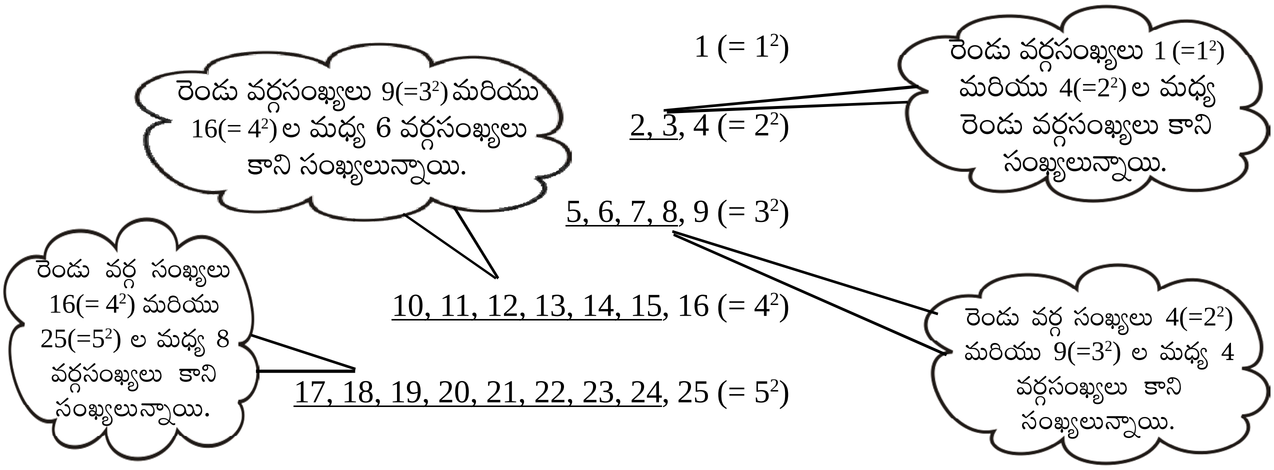
ఏవైనా రెండు వరుస త్రిభుజాకార సంఖ్యలను కలిపినప్పుడు, వర్గసంఖ్యను పొందుతాము. ఉదాహరణకు,



$1 + 3 = 4 = 2^2$ $\quad$ $3 + 6 = 9 = 3^2$ $\quad$ $6 + 10 = 16 = 4^2$

2. వర్గసంఖ్యల మధ్య సంఖ్యలు

రెండు వరుస వర్గ సంఖ్యల మధ్య ఆసక్తికర అమరికలేమైనా ఉన్నాయేమో మనం ఇప్పుడు చూద్దాం.



$1^2(=1)$ మరియు $2^2(= 4)$ ల మధ్యగల వర్గసంఖ్యలు కాని సంఖ్యలు రెండు (అనగా 2×1) అవి 2, 3.

$2^2(= 4)$ మరియు $3^2(= 9)$ ల మధ్యగల వర్గసంఖ్యలు కాని సంఖ్యలు నాలుగు (i.e., 2×2) అవి 5, 6, 7, 8.

ఇప్పుడు $\quad 3^2 = 9, \quad 4^2 = 16$

కాబట్టి $\quad 4^2 – 3^2 = 16 – 9 = 7$

$9(=3^2)$ మరియు $16(= 4^2)$ మధ్యగల సంఖ్యలు 10, 11, 12, 13, 14, 15 అనగా ఆరు వర్గం కాని సంఖ్యలున్నాయి. వీటి సంఖ్య ఆ రెండు వర్గ సంఖ్యల బేధము కన్నా 1 తక్కువ.

అదేవిధంగా $\quad 4^2 = 16$ మరియు $5^2 = 25$

కాబట్టి $\quad 5^2 – 4^2 = 9$

$16(= 4^2)$ మరియు $25(= 5^2)$ ల మధ్య గల సంఖ్యలు 17, 18, ... , 24 అనగా ఎనిమిది వర్గసంఖ్యలు కాని సంఖ్యలున్నాయి. వీటి సంఖ్య ఆ రెండు వర్గ సంఖ్యల బేధము కన్నా 1 తక్కువ.

7^2 మరియు 6^2 వీటి మధ్య ఎన్ని సంఖ్యలున్నాయో మీరు చెప్పగలరా?

ఏవైనా సహజ సంఖ్యలు n, $(n + 1)$ లకు

$$(n + 1)^2 – n^2 = (n^2 + 2n + 1) – n^2 = 2n + 1.$$

n^2 మరియు $(n + 1)^2$ ల మధ్య $2n$ సంఖ్యలుంటాయి. అంటే రెండు వర్గసంఖ్యల బేధం కంటే 1 తక్కువ. *సాధారణంగా n, $(n + 1)$ వర్గాల మధ్య $2n$ పరిపూర్ణ వర్గ సంఖ్యలు కాని సంఖ్యలుంటాయి.*

దీనిని $n = 5$, $n = 6$ వంటి విలువలకు సరి చూడండి.

TRY THESE

1. How many natural numbers lie between 9^2 and 10^2 ? Between 11^2 and 12^2?
2. How many non square numbers lie between the following pairs of numbers
   (i) 100^2 and 101^2 (ii) 90^2 and 91^2 (iii) 1000^2 and 1001^2

3. Adding odd numbers

Consider the following

1 [one odd number]	$= 1 = 1^2$
1 + 3 [sum of first two odd numbers]	$= 4 = 2^2$
1 + 3 + 5 [sum of first three odd numbers]	$= 9 = 3^2$
1 + 3 + 5 + 7 [...]	$= 16 = 4^2$
1 + 3 + 5 + 7 + 9 [...]	$= 25 = 5^2$
1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 [...]	$= 36 = 6^2$

So we can say that the *sum of first n odd natural numbers is* n^2.

Looking at it in a different way, we can say: 'If the number is a square number, it has to be the sum of successive **odd** numbers starting from 1.

Consider those numbers which are not perfect squares, say 2, 3, 5, 6, ... Can you express these numbers as a sum of successive odd natural numbers beginning from 1?

You will find that these numbers cannot be expressed in this form.

Consider the number 25. Successively subtract 1, 3, 5, 7, 9, ... from it

(i) 25 – 1 = 24 (ii) 24 – 3 = 21 (iii) 21 – 5 = 16 (iv) 16 – 7 = 9
(v) 9 – 9 = 0

This means, 25 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9. Also, 25 is a perfect square.

Now consider another number 38, and again do as above.

(i) 38 – 1 = 37 (ii) 37 – 3 = 34 (iii) 34 – 5 = 29 (iv) 29 – 7 = 22
(v) 22 – 9 = 13 (vi) 13 – 11 = 2 (vii) 2 – 13 = – 11

TRY THESE

Find whether each of the following numbers is a perfect square or not?

(i) 121 (ii) 55 (iii) 81
(iv) 49 (v) 69

This shows that we are not able to express 38 as the sum of consecutive odd numbers starting with 1. Also, 38 is not a perfect square.

So we can also say that *if a natural number cannot be expressed as a sum of successive odd natural numbers starting with 1, then it is not a perfect square.*

We can use this result to find whether a number is a perfect square or not.

4. A sum of consecutive natural numbers

Consider the following

$3^2 = 9 = 4 + 5$

$5^2 = 25 = 12 + 13$

$7^2 = 49 = 24 + 25$

First Number $= \frac{3^2 - 1}{2}$

Second Number $= \frac{3^2 + 1}{2}$

ప్రయత్నించండి

1. 9^2, 10^2 ల మధ్య ఎన్ని సహజసంఖ్యలు ఉంటాయి? 11^2, 12^2 ల మధ్య ఎన్ని ఉంటాయి?
2. క్రింది సంఖ్యల జతల మధ్య ఎన్ని వర్గసంఖ్యలు కాని సంఖ్యలున్నాయి?
   (i) 100^2 మరియు 101^2 (ii) 90^2 మరియు 91^2 (iii) 1000^2 మరియు 1001^2

3. బేసి సంఖ్యల సంకలనం.

క్రింది వానిని పరిశీలించండి.

1 (ఒక బేసిసంఖ్య)	$= 1 = 1^2$
1 + 3 (మొదటి రెండు బేసి సంఖ్యల మొత్తం)	$= 4 = 2^2$
1 + 3 + 5 (మొదటి మూడు బేసి సంఖ్యల మొత్తం)	$= 9 = 3^2$
1 + 3 + 5 + 7 [...]	$= 16 = 4^2$
1 + 3 + 5 + 7 + 9 [...]	$= 25 = 5^2$
1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 [...]	$= 36 = 6^2$

కావున, *మొదటి n బేసి సహజ సంఖ్యల మొత్తం n^2* అని చెప్పవచ్చు.

మరోవిధంగా చెప్పాలంటే, 'ఒక సంఖ్య వర్గసంఖ్య అయితే, అది ఒకటి నుండి మొదలయ్యే వరుస **బేసి** సంఖ్యల మొత్తంగా ఉంటుంది'.

పరిపూర్ణ వర్గాలు కానటువంటి 2, 3, 5, 6, ... వంటి సంఖ్యలను తీసుకుందాం. వీటిని ఒకటితో మొదలయ్యే వరుస బేసి సంఖ్యల మొత్తంగా రాయగలమా?

పై సంఖ్యలను ఈ రూపంలో రాయలేమని మీరు తెలుసుకుంటారు.

25ను తీసుకోండి. దీని నుండి 1, 3, 5, 7, 9..... లను వరుసగా తీసివేయండి.

(i) $25 - 1 = 24$ (ii) $24 - 3 = 21$ (iii) $21 - 5 = 16$ (iv) $16 - 7 = 9$
(v) $9 - 9 = 0$

$25 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$ అని దీని అర్థం. 25 ఒక పరిపూర్ణ వర్గమవుతుంది.

ఇప్పుడు మరొక సంఖ్య 38ని తీసుకొని, పైవిధంగా చేయండి.

(i) $38 - 1 = 37$ (ii) $37 - 3 = 34$ (iii) $34 - 5 = 29$ (iv) $29 - 7 = 22$
(v) $22 - 9 = 13$ (vi) $13 - 11 = 2$ (vii) $2 - 13 = -11$

దీనిని బట్టి, 38ని ఒకటితో మొదలయ్యే వరుస బేసి సంఖ్యల మొత్తంగా వ్రాయలేమని, 38 ఒక పరిపూర్ణ వర్గముకాదని తెలుస్తుంది.

అందువలన, *ఒక సహజ సంఖ్యను ఒకటితో మొదలయ్యే వరుస బేసి సంఖ్యల మొత్తంగా వ్రాయడానికి వీలుకాకపోతే, అది పరిపూర్ణవర్గం కాదని* చెప్పవచ్చు.

ఒకసంఖ్య పరిపూర్ణ వర్గమవుతుందో, లేదో తెలుసుకోవడానికి ఈ ఫలితాన్ని ఉపయోగించవచ్చు.

ప్రయత్నించండి

క్రింది సంఖ్యలు పరిపూర్ణ వర్గాలో, కాదో కనుక్కోండి.

(i) 121 (ii) 55 (iii) 81
(iv) 49 (v) 69

4. వరుస సహజ సంఖ్యల మొత్తము

క్రింది వాటిని పరిశీలించండి.

$3^2 = 9 = 4 + 5$

$5^2 = 25 = 12 + 13$

$7^2 = 49 = 24 + 25$

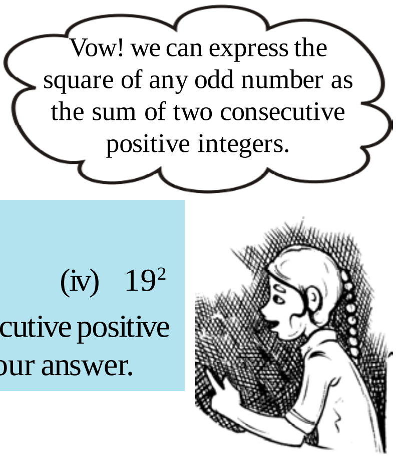
మొదటి సంఖ్య $= \dfrac{3^2 - 1}{2}$

రెండవ సంఖ్య $= \dfrac{3^2 + 1}{2}$

$9^2 = 81 = 40 + 41$

$11^2 = 121 = 60 + 61$

$15^2 = 225 = 112 + 113$



TRY THESE

1. Express the following as the sum of two consecutive integers.
   (i) 21^2 (ii) 13^2 (iii) 11^2 (iv) 19^2
2. Do you think the reverse is also true, i.e., is the sum of any two consecutive positive integers is perfect square of a number? Give example to support your answer.

5. Product of two consecutive even or odd natural numbers

$11 \times 13 = 143 = 12^2 - 1$

Also $11 \times 13 = (12 - 1) \times (12 + 1)$

Therefore, $11 \times 13 = (12 - 1) \times (12 + 1) = 12^2 - 1$

Similarly, $13 \times 15 = (14 - 1) \times (14 + 1) = 14^2 - 1$

$29 \times 31 = (30 - 1) \times (30 + 1) = 30^2 - 1$

$44 \times 46 = (45 - 1) \times (45 + 1) = 45^2 - 1$

So in general we can say that $(a + 1) \times (a - 1) = a^2 - 1$.

6. Some more patterns in square numbers

Observe the squares of numbers; 1, 11, 111 ... etc. They give a beautiful pattern:

1^2 = 1

11^2 = 1 2 1

111^2 = 1 2 3 2 1

1111^2 = 1 2 3 4 3 2 1

11111^2 = 1 2 3 4 5 4 3 2 1

11111111^2 = 1 2 3 4 5 6 7 8 7 6 5 4 3 2 1

Another interesting pattern.

$7^2 = 49$

$67^2 = 4489$

$667^2 = 444889$

$6667^2 = 44448889$

$66667^2 = 4444488889$

$666667^2 = 444444888889$

The fun is in being able to find out why this happens. May be it would be interesting for you to explore and think about such questions even if the answers come some years later.

TRY THESE

Write the square, making use of the above pattern.

(i) 111111^2 (ii) 1111111^2

TRY THESE

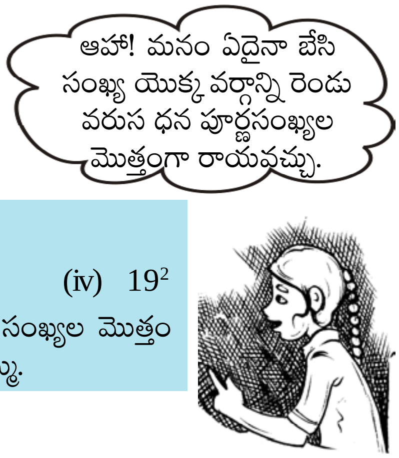
Can you find the square of the following numbers using the above pattern?

(i) 6666667^2 (ii) 66666667^2

$9^2 = 81 = 40 + 41$

$11^2 = 121 = 60 + 61$

$15^2 = 225 = 112 + 113$



ప్రయత్నించండి

1. క్రింది వాటిని రెండు వరుస పూర్ణసంఖ్యల మొత్తంగా వ్రాయండి.

   (i) 21^2 (ii) 13^2 (iii) 11^2 (iv) 19^2

2. దీని విపర్యయం కూడా సత్యమేనా? అంటే, ఏవైనా రెండు వరుస ధనపూర్ణ సంఖ్యల మొత్తం పరిపూర్ణ వర్గం అవుతుందా? మీ జవాబును సమర్థించడానికి ఉదాహరణలిమ్ము.

5. రెండు వరుస సరి లేదా బేసి సహజ సంఖ్యల లబ్ధము

$11 \times 13 = 143 = 12^2 - 1$

ఇంకా, $11 \times 13 = (12 - 1) \times (12 + 1)$

కావున, $11 \times 13 = (12 - 1) \times (12 + 1) = 12^2 - 1$

అదే విధంగా, $13 \times 15 = (14 - 1) \times (14 + 1) = 14^2 - 1$

$29 \times 31 = (30 - 1) \times (30 + 1) = 30^2 - 1$

$44 \times 46 = (45 - 1) \times (45 + 1) = 45^2 - 1$

అందువల్ల, సాధారణంగా $(a + 1) \times (a - 1) = a^2 - 1$ అని చెప్పవచ్చు.

6. వర్గ సంఖ్యలలో మరికొన్ని అమరికలు

1, 11, 111... మొదలగు సంఖ్యల వర్గాలను పరిశీలించండి. అవి అందమైన అమరికను ఇస్తాయి.

1^2 =								1							
11^2 =							1	2	1						
111^2 =						1	2	3	2	1					
1111^2 =					1	2	3	4	3	2	1				
11111^2 =				1	2	3	4	5	4	3	2	1			
11111111^2 =	1	2	3	4	5	6	7	8	7	6	5	4	3	2	1

మరొక ఆసక్తికర అమరిక,

$7^2 = 49$

$67^2 = 4489$

$667^2 = 444889$

$6667^2 = 44448889$

$66667^2 = 4444488889$

$666667^2 = 444444888889$

ఇదెలా జరుగుతుందో కనుక్కోవడంలోనే ఆనందం ఉంది. ఇలాంటి ప్రశ్నలకు జవాబు లభించడానికి కొన్ని సంవత్సరాలు పట్టినా కూడా, వాటి గురించి అన్వేషించడం, ఆలోచించడం ఆసక్తికరం.

ప్రయత్నించండి

పై అమరికను ఉపయోగించి, క్రింది సంఖ్యల వర్గాలను రాయండి.

(i) 111111^2 (ii) 1111111^2

ప్రయత్నించండి

పై అమరికనుపయోగించి, క్రింది సంఖ్యల వర్గాలు కనుగొనగలరా?

(i) 6666667^2 (ii) 66666667^2

EXERCISE 6.1

1. What will be the unit digit of the squares of the following numbers?

   (i) 81 (ii) 272 (iii) 799 (iv) 3853
   (v) 1234 (vi) 26387 (vii) 52698 (viii) 99880
   (ix) 12796 (x) 55555

2. The following numbers are obviously not perfect squares. Give reason.

   (i) 1057 (ii) 23453 (iii) 7928 (iv) 222222
   (v) 64000 (vi) 89722 (vii) 222000 (viii) 505050

3. The squares of which of the following would be odd numbers?

   (i) 431 (ii) 2826 (iii) 7779 (iv) 82004

4. Observe the following pattern and find the missing digits.

$$11^2 = 121$$
$$101^2 = 10201$$
$$1001^2 = 1002001$$
$$100001^2 = 1 \ldots\ldots\ldots 2 \ldots\ldots\ldots 1$$
$$10000001^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

5. Observe the following pattern and supply the missing numbers.

$$11^2 = 1\ 2\ 1$$
$$101^2 = 1\ 0\ 2\ 0\ 1$$
$$10101^2 = 102030201$$
$$1010101^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots^2 = 10203040504030201$$

6. Using the given pattern, find the missing numbers.

$$1^2 + 2^2 + 2^2 = 3^2$$
$$2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2$$
$$3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$$
$$4^2 + 5^2 + \underline{\ \ }^2 = 21^2$$
$$5^2 + \underline{\ \ }^2 + 30^2 = 31^2$$
$$6^2 + 7^2 + \underline{\ \ }^2 = \underline{\ \ \ }^2$$

> **To find pattern**
> Third number is related to first and second number. How?
> Fourth number is related to third number. How?

7. Without adding, find the sum.

   (i) 1 + 3 + 5 + 7 + 9
   (ii) 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 +19
   (iii) 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23

8. (i) Express 49 as the sum of 7 odd numbers.
   (ii) Express 121 as the sum of 11 odd numbers.

9. How many numbers lie between squares of the following numbers?

   (i) 12 and 13 (ii) 25 and 26 (iii) 99 and 100

అభ్యాసం 6.1

1. క్రింది సంఖ్యల వర్గాల ఒకట్ల స్థానంలో ఉండే అంకె లేవి?

(i) 81 (ii) 272 (iii) 799 (iv) 3853
(v) 1234 (vi) 26387 (vii) 52698 (viii) 99880
(ix) 12796 (x) 55555

2. క్రింది సంఖ్యలు ఖచ్చితంగా పరిపూర్ణ వర్గాలు కావు. కారణాలు తెల్పండి.

(i) 1057 (ii) 23453 (iii) 7928 (iv) 222222
(v) 64000 (vi) 89722 (vii) 222000 (viii) 505050

3. క్రింది సంఖ్యల వర్గాలలో ఏవి బేసి సంఖ్యలవుతాయి?

(i) 431 (ii) 2826 (iii) 7779 (iv) 82004

4. క్రింది అమరికను పరిశీలించి, లోపించిన అంకెలను కనుగొనండి.

$$11^2 = 121$$
$$101^2 = 10201$$
$$1001^2 = 1002001$$
$$100001^2 = 1 \text{.........} 2 \text{.........} 1$$
$$10000001^2 = \text{..........................}$$

5. క్రింది అమరికను పరిశీలించి, లోపించిన సంఖ్యలను పూరించండి.

$$11^2 = 1\ 2\ 1$$
$$101^2 = 1\ 0\ 2\ 0\ 1$$
$$10101^2 = 102030201$$
$$1010101^2 = \text{..........................}$$
$$\text{............}^2 = 10203040504030201$$

6. ఇచ్చిన అమరిక నుపయోగించి, లోపించిన సంఖ్యలను కనుగొనండి.

$1^2 + 2^2 + 2^2 = 3^2$
$2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2$
$3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$
$4^2 + 5^2 + _^2 = 21^2$
$5^2 + _^2 + 30^2 = 31^2$
$6^2 + 7^2 + _^2 = __^2$

> **అమరిక కనుగొనుటకు**
> మూడవ సంఖ్య, మొదటి రెండు సంఖ్యలతో ఎలాంటి సంబంధం కలిగి ఉంది?
> నాలుగవ సంఖ్య, మూడవ సంఖ్యతో ఎలాంటి సంబంధం కలిగి ఉంది?

7. సంకలనం చేయకుండానే మొత్తాన్ని కనుగొనండి.

(i) 1 + 3 + 5 + 7 + 9
(ii) 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 +19
(iii) 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23

8. (i) 49ను 7 బేసి సంఖ్యల మొత్తంగా వ్యక్తపరచండి.
(ii) 121 ను 11 బేసి సంఖ్యల మొత్తంగా వ్యక్తపరచండి.

9. క్రింది సంఖ్యల వర్గాల మధ్య ఎన్ని సంఖ్యలున్నాయి?

(i) 12 మరియు 13 (ii) 25 మరియు 26 (iii) 99 మరియు 100

6.4 Finding the Square of a Number

Squares of small numbers like 3, 4, 5, 6, 7, ... etc. are easy to find. But can we find the square of 23 so quickly?

The answer is not so easy and we may need to multiply 23 by 23.

There is a way to find this without having to multiply 23×23.

We know $23 = 20 + 3$

Therefore $23^2 = (20 + 3)^2 = 20(20 + 3) + 3(20 + 3)$

$= 20^2 + 20 \times 3 + 3 \times 20 + 3^2$

$= 400 + 60 + 60 + 9 = 529$

Example 1: Find the square of the following numbers without actual multiplication.

(i) 39 (ii) 42

Solution: (i) $39^2 = (30 + 9)^2 = 30(30 + 9) + 9(30 + 9)$

$= 30^2 + 30 \times 9 + 9 \times 30 + 9^2$

$= 900 + 270 + 270 + 81 = 1521$

(ii) $42^2 = (40 + 2)^2 = 40(40 + 2) + 2(40 + 2)$

$= 40^2 + 40 \times 2 + 2 \times 40 + 2^2$

$= 1600 + 80 + 80 + 4 = 1764$

6.4.1 Other patterns in squares

Consider the following pattern:

$25^2 = 625 = (2 \times 3)$ hundreds + 25

$35^2 = 1225 = (3 \times 4)$ hundreds + 25

$75^2 = 5625 = (7 \times 8)$ hundreds + 25

$125^2 = 15625 = (12 \times 13)$ hundreds + 25

Now can you find the square of 95?

Consider a number with unit digit 5, i.e., $a5$

$(a5)^2 = (10a + 5)^2$

$= 10a(10a + 5) + 5(10a + 5)$

$= 100a^2 + 50a + 50a + 25$

$= 100a(a + 1) + 25$

$= a(a + 1)$ hundred + 25

TRY THESE

Find the squares of the following numbers containing 5 in unit's place.

(i) 15 (ii) 95 (iii) 105 (iv) 205

6.4.2 Pythagorean triplets

Consider the following

$$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$$

The collection of numbers 3, 4 and 5 is known as **Pythagorean triplet**. 6, 8, 10 is also a Pythagorean triplet, since

$$6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 = 10^2$$

Again, observe that

$5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$. The numbers 5, 12, 13 form another such triplet.

6.4 ఒక సంఖ్య యొక్క వర్గాన్ని కనుగొనుట

3, 4, 5, 6, 7... మొదలగు చిన్న సంఖ్యల వర్గాలను సులభంగా కనుగొనవచ్చు. కాని 23 వర్గాన్ని త్వరగా కనుగొనగలమా?

దీనికి జవాబు అంత సులభం కాదు. 23 ను 23 చే గుణించాల్సి ఉంది.

23 ను 23 చే గుణించకుండానే, మరొక విధానంలో కనుగొనవచ్చు.

$23 = 20 + 3$ అని మనకు తెలుసు

కావున $23^2 = (20 + 3)^2 = 20(20 + 3) + 3(20 + 3)$

$= 20^2 + 20 \times 3 + 3 \times 20 + 3^2$

$= 400 + 60 + 60 + 9 = 529$

ఉదాహరణ 1: గుణకారం చేయకుండానే క్రింది సంఖ్యల వర్గం కనుక్కోండి.

(i) 39 (ii) 42

సాధన: (i) $39^2 = (30 + 9)^2 = 30(30 + 9) + 9(30 + 9)$

$= 30^2 + 30 \times 9 + 9 \times 30 + 9^2$

$= 900 + 270 + 270 + 81 = 1521$

(ii) $42^2 = (40 + 2)^2 = 40(40 + 2) + 2(40 + 2)$

$= 40^2 + 40 \times 2 + 2 \times 40 + 2^2$

$= 1600 + 80 + 80 + 4 = 1764$

6.4.1 వర్గములలో ఇతర అమరికలు

క్రింది అమరికను గమనించండి.

$25^2 = 625 = (2 \times 3)$ వందలు $+ 25$

$35^2 = 1225 = (3 \times 4)$ వందలు $+ 25$

$75^2 = 5625 = (7 \times 8)$ వందలు $+ 25$

$125^2 = 15625 = (12 \times 13)$ వందలు $+ 25$

ఇప్పుడు, మీరు 95 వర్గాన్ని కనుగొనగలరా?

ఒకట్ల స్థానంలో 5 గల సంఖ్యను తీసుకోండి. అనగా $a5$

$(a5)^2 = (10a + 5)^2$

$= 10a(10a + 5) + 5(10a + 5)$

$= 100a^2 + 50a + 50a + 25$

$= 100a(a + 1) + 25$

$= a(a + 1)$ వందలు $+ 25$

ప్రయత్నించండి

ఒకట్ల స్థానంలో 5 గల క్రింది సంఖ్యల వర్గాలను కనుగొనండి.

(i) 15 (ii) 95 (iii) 105 (iv) 205

6.4.2 పైథాగరియన్ త్రికాలు

క్రింది వానిని తీసుకోండి

$$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$$

3, 4, 5 సంఖ్యల సమూహమును **పైథాగరియన్ త్రికము** అంటారు. 6, 8, 10 కూడా పైథాగరియన్ త్రికమవుతుంది ఎలాగంటే,

$$6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 = 10^2$$

ఇంకా,

$5^2+12^2=25+144=169=13^2$ అని గమనించండి. 5, 12, 13 సంఖ్యలు మరొక త్రికమును ఏర్పరుస్తాయి.

Can you find more such triplets?

For any natural number $m > 1$, we have $(2m)^2 + (m^2 - 1)^2 = (m^2 + 1)^2$. So, $2m$, $m^2 - 1$ and $m^2 + 1$ forms a Pythagorean triplet.

Try to find some more Pythagorean triplets using this form.

Example 2: Write a Pythagorean triplet whose smallest member is 8.

Solution: We can get Pythagorean triplets by using general form $2m$, $m^2 - 1$, $m^2 + 1$.

Let us first take $m^2 - 1 = 8$

So, $m^2 = 8 + 1 = 9$

which gives $m = 3$

Therefore, $2m = 6$ and $m^2 + 1 = 10$

The triplet is thus 6, 8, 10. But 8 is not the smallest member of this.

So, let us try $2m = 8$

then $m = 4$

We get $m^2 - 1 = 16 - 1 = 15$

and $m^2 + 1 = 16 + 1 = 17$

The triplet is 8, 15, 17 with 8 as the smallest member.

Example 3: Find a Pythagorean triplet in which one member is 12.

Solution: If we take $m^2 - 1 = 12$

Then, $m^2 = 12 + 1 = 13$

Then the value of m will not be an integer.

So, we try to take $m^2 + 1 = 12$. Again $m^2 = 11$ will not give an integer value for m.

So, let us take $2m = 12$

then $m = 6$

Thus, $m^2 - 1 = 36 - 1 = 35$ and $m^2 + 1 = 36 + 1 = 37$

Therefore, the required triplet is 12, 35, 37.

Note: All Pythagorean triplets may not be obtained using this form. For example another triplet 5, 12, 13 also has 12 as a member.

EXERCISE 6.2

1. Find the square of the following numbers.
   (i) 32 (ii) 35 (iii) 86 (iv) 93
   (v) 71 (vi) 46
2. Write a Pythagorean triplet whose one member is.
   (i) 6 (ii) 14 (iii) 16 (iv) 18

6.5 Square Roots

Study the following situations.

(a) Area of a square is 144 cm^2. What could be the side of the square?

ఇలాంటి మరికొన్ని త్రికములను కనుగొనగలరా?

ఏదైనా సహజ సంఖ్య $m > 1$కు, $(2m)^2 + (m^2 - 1)^2 = (m^2 + 1)^2$ అవుతుంది. కావున $2m$, $m^2 - 1$, $m^2 + 1$ లు పైథాగరియన్ త్రికాలవుతాయి

దీనినుపయోగించి, మరొకొన్ని పైథాగరియన్ త్రికాలను కనుగొనండి.

ఉదాహరణ 2: అతిచిన్న సంఖ్య 8 గా గల పైథాగరియన్ త్రికమును వ్రాయండి.

సాధన : పైథాగరియన్ త్రికాల సాధారణ రూపం $2m$, $m^2 - 1$, $m^2 + 1$ ల నుపయోగించి, మనం కనుగొనవచ్చు.

మొదట, $m^2 - 1 = 8$ గా తీసుకుందాం.

అపుడు, $m^2 = 8 + 1 = 9$ అవుతుంది

అందువలన $m = 3$

కావున, $2m = 6$, $m^2 + 1 = 10$ అవుతాయి

వచ్చిన త్రికము 6, 8, 10 అగును. కాని, వీటిలో చిన్నసంఖ్య 8 కాదు. అందుకే, మరోసారి ప్రయత్నిద్దాం.

ఈసారి $2m = 8$ గా తీసుకుందాం

అపుడు, $m = 4$ అవుతుంది

$m^2 - 1 = 16 - 1 = 15$

$m^2 + 1 = 16 + 1 = 17$

కావున 8 చిన్న సంఖ్యగా, 8 , 15 , 17లు కావలసిన త్రికములగును.

ఉదాహరణ 3: 12 ఒక సంఖ్య గా గల పైథాగరియన్ త్రికమును కనుక్కోండి

సాధన: $m^2 - 1 = 12$ అని తీసుకుంటే

అప్పుడు, $m^2 = 12 + 1 = 13$ అవుతుంది.

అప్పుడు, m విలువ పూర్ణసంఖ్య కాదు.

కావున, ఈసారి $m^2 + 1 = 12$ తో ప్రయత్నిద్దాం. మరలా $m^2 = 11$ అగును. ఇప్పుడు కూడా m విలువ పూర్ణ సంఖ్యను ఇవ్వదు.

కావున, $2m = 12$ గా తీసుకుందాం.

అపుడు $m = 6$ అవుతుంది.

కావున, $m^2 - 1 = 36 - 1 = 35$ మరియు $m^2 + 1 = 36 + 1 = 37$ అవుతాయి.

కావున, 12, 35, 37 కావలసిన త్రికమవుతుంది.

గమనిక: ఈ సాధారణ రూపం ఉపయోగించి, అన్ని పైథాగరియన్ త్రికాలను పొందలేము. ఉదాహరణకు, మరొక త్రికము 5, 12, 13 లో కూడా 12 ఉంది.

అభ్యాసం - 6.2

1. క్రింది సంఖ్యల వర్గము కనుగొనండి.

(i) 32 (ii) 35 (iii) 86 (iv) 93

(v) 71 (vi) 46

2. క్రింది సంఖ్యలను కలిగిన పైథాగరియన్ త్రికాలను వ్రాయండి.

(i) 6 (ii) 14 (iii) 16 (iv) 18

6.5 వర్గమూలాలు

క్రింది సందర్భాలను పరిశీలించండి.

(a) ఒక చతురస్ర వైశాల్యం 144 చ.సెం.మీ. అయినచో, దాని భుజం పొడవు ఎంతవుతుంది?

We know that the area of a square = side^2

If we assume the length of the side to be 'a', then 144 = a^2

To find the length of side it is necessary to find a number whose square is 144.

(b) What is the length of a diagonal of a square of side 8 cm (Fig 6.1)?

Can we use Pythagoras theorem to solve this ?

We have, $AB^2 + BC^2 = AC^2$

i.e., $8^2 + 8^2 = AC^2$

or $64 + 64 = AC^2$

or $128 = AC^2$

Again to get AC we need to think of a number whose square is 128.

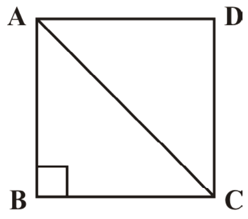


Fig 6.1

(c) In a right triangle the length of the hypotenuse and a side are respectively 5 cm and 3 cm (Fig 6.2).

Can you find the third side?

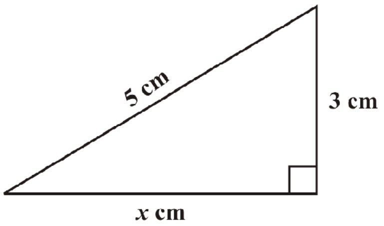


Fig 6.2

Let x cm be the length of the third side.

Using Pythagoras theorem $5^2 = x^2 + 3^2$

$25 - 9 = x^2$

$16 = x^2$

Again, to find x we need a number whose square is 16.

In all the above cases, we need to find a number whose square is known. Finding the number with the known square is known as finding the square root.

6.5.1 Finding square roots

The inverse (opposite) operation of addition is subtraction and the inverse operation of multiplication is division. Similarly, finding the square root is the inverse operation of squaring.

We have, $1^2 = 1$, therefore square root of 1 is 1

$2^2 = 4$, therefore square root of 4 is 2

$3^2 = 9$, therefore square root of 9 is 3

Since $9^2 = 81$,
and $(-9)^2 = 81$
We say that square roots of 81 are 9 and –9.

TRY THESE

(i) $11^2 = 121$. What is the square root of 121?

(ii) $14^2 = 196$. What is the square root of 196?

THINK, DISCUSS AND WRITE

$(-1)^2 = 1$. Is –1, a square root of 1? $(-2)^2 = 4$. Is –2, a square root of 4?

$(-9)^2 = 81$. Is –9 a square root of 81?

From the above, you may say that there are two integral square roots of a perfect square number. In this chapter, we shall take up only positive square root of a natural number. Positive square root of a number is denoted by the symbol $\sqrt{\ }$.

For example: $\sqrt{4} = 2$ (not –2); $\sqrt{9} = 3$ (not –3) etc.

చతుర్రస వైశాల్యం = భుజం^{2} అని మనకు తెలుసు.
భుజం పొడవును 'a'గా అనుకుంటే, $144 = a^2$ అవుతుంది.
భుజం పొడవును కనుగొనడానికి ముందుగా, ఏ సంఖ్య వర్గము 144 అవుతుందో, దానిని కనుక్కోవలసి ఉంటుంది.

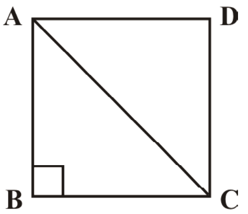
(b) 8 సెం.మీ భుజంగాగల చతుర్రసము యొక్క కర్ణము పొడవు ఎంత (పటం 6.1)?
దీనిని సాధించుటకు పైథాగరస్ సిద్ధాంతాన్ని వాడవచ్చునా?
పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం త్రిభుజం ABC లో

$AB^2 + BC^2 = AC^2$ అని మనకు తెలుసు.

అనగా $8^2 + 8^2 = AC^2$

$64 + 64 = AC^2$

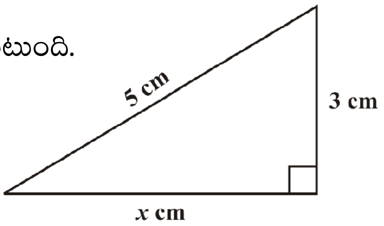
$128 = AC^2$



పటం 6.1

AC కొలత కనుగొనడానికి ఏ సంఖ్య వర్గం 128 అవుతుందో కనుగొనాల్సి ఉంటుంది.

(c) ఒక లంబకోణత్రిభుజములో కర్ణము పొడవు, ఒక భుజం కొలతలు వరుసగా 5 సెం.మీ, 3 సెం.మీ (పటము 6.2).
మూడవ భుజం పొడవు కనుగొనగలరా?



పటం 6.2

మూడవ భుజం పొడవును x సెం.మీ. అనుకొనుము.

పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం $5^2 = x^2 + 3^2$

$25 - 9 = x^2$

$16 = x^2$

x విలువ కనుక్కోవడానికి, ఏ సంఖ్య వర్గము 16 అవుతుందో కనుగొనాలి.

పై సందర్భాలన్నింటిలో, ఏ సంఖ్య వర్గము మనకు తెలుసో, ఆ సంఖ్యను కనుగొనాలి. తెలిసిన వర్గమును కలిగిన సంఖ్యను కనుక్కోవడమే, వర్గమూలం కనుగొనడం అవుతుంది..

6.5.1 వర్గమూలం కనుగొనుట

సంకలనానికి విలోమ (వ్యతిరేక) ప్రక్రియ వ్యవకలనం, గుణకారానికి విలోమ ప్రక్రియ భాగహారం అవుతుంది. అదే విధంగా వర్గమూలము కనుగొనుట, వర్గమునకు విలోమ ప్రక్రియ అవుతుంది.

$1^2 = 1$, కావున 1 వర్గమూలం 1

$2^2 = 4$, కావున 4 వర్గమూలం 2

$3^2 = 9$, కావున 9 వర్గమూలం 3

> $9^2 = 81$ మరియు $(-9)^2 = 81$ కావున 81 యొక్క వర్గమూలాలు 9 మరియు –9 అవుతాయి.

ప్రయత్నించండి

(i) $11^2 = 121$ అయిన 121 యొక్క వర్గమూలం ఎంత?
(ii) $14^2 = 196$ అయిన 196 వర్గమూలం ఎంత?

ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి

$(-1)^2 = 1$, 1 వర్గమూలం –1 అవుతుందా? $(-2)^2 = 4$, 4 వర్గమూలం –2 అవుతుందా?
$(-9)^2 = 81$, 81 వర్గమూలం –9 అవుతుందా?

పై అంశాల ఆధారంగా, ప్రతి పరిపూర్ణవర్గానికి రెండు వర్గమూలాలు ఉంటాయని తెలుస్తుంది. ఈ అధ్యాయంలో మనం కేవలం సహజసంఖ్యల ధనాత్మక వర్గమూలాలను మాత్రమే తీసుకుంటాం. ఒక సంఖ్య ధనాత్మక వర్గమూలాన్ని $\sqrt{\ }$ గుర్తుతో సూచిస్తారు.
ఉదాహరణకు, $\sqrt{4} = 2$ (–2 కాదు); $\sqrt{9} = 3$ (–3 కాదు) మొదలైనవి.

Statement	Inference
$1^2 = 1$	$\sqrt{1} = 1$
$2^2 = 4$	$\sqrt{4} = 2$
$3^2 = 9$	$\sqrt{9} = 3$
$4^2 = 16$	$\sqrt{16} = 4$
$5^2 = 25$	$\sqrt{25} = 5$

Statement	Inference
$6^2 = 36$	$\sqrt{36} = 6$
$7^2 = 49$	$\sqrt{49} = 7$
$8^2 = 64$	$\sqrt{64} = 8$
$9^2 = 81$	$\sqrt{81} = 9$
$10^2 = 100$	$\sqrt{100} = 10$

6.5.2 Finding square root through repeated subtraction

Do you remember that the sum of the first n odd natural numbers is n^2? That is, every square number can be expressed as a sum of successive odd natural numbers starting from 1.

Consider $\sqrt{81}$. Then,

(i) $81 - 1 = 80$ (ii) $80 - 3 = 77$ (iii) $77 - 5 = 72$ (iv) $72 - 7 = 65$
(v) $65 - 9 = 56$ (vi) $56 - 11 = 45$ (vii) $45 - 13 = 32$ (viii) $32 - 15 = 17$
(ix) $17 - 17 = 0$

From 81 we have subtracted successive odd numbers starting from 1 and obtained 0 at 9th step.

Therefore $\sqrt{81} = 9$.

Can you find the square root of 729 using this method? Yes, but it will be time consuming. Let us try to find it in a simpler way.

TRY THESE

By repeated subtraction of odd numbers starting from 1, find whether the following numbers are perfect squares or not? If the number is a perfect square then find its square root.

(i) 121
(ii) 55
(iii) 36
(iv) 49
(v) 90

6.5.3 Finding square root through prime factorisation

Consider the prime factorisation of the following numbers and their squares.

Prime factorisation of a Number	Prime factorisation of its Square
$6 = 2 \times 3$	$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$
$8 = 2 \times 2 \times 2$	$64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$
$12 = 2 \times 2 \times 3$	$144 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$
$15 = 3 \times 5$	$225 = 3 \times 3 \times 5 \times 5$

How many times does 2 occur in the prime factorisation of 6? Once. How many times does 2 occur in the prime factorisation of 36? Twice. Similarly, observe the occurrence of 3 in 6 and 36 of 2 in 8 and 64 etc.

You will find that each prime factor in the prime factorisation of the square of a number, occurs twice the number of times it occurs in the prime factorisation of the number itself. Let us use this to find the square root of a given square number, say 324.

2	324
2	162
3	81
3	27
3	9
	3

We know that the prime factorisation of 324 is

$$324 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

ప్రవచనం	ప్రతిపాదన
$1^2 = 1$	$\sqrt{1} = 1$
$2^2 = 4$	$\sqrt{4} = 2$
$3^2 = 9$	$\sqrt{9} = 3$
$4^2 = 16$	$\sqrt{16} = 4$
$5^2 = 25$	$\sqrt{25} = 5$

ప్రవచనం	ప్రతిపాదన
$6^2 = 36$	$\sqrt{36} = 6$
$7^2 = 49$	$\sqrt{49} = 7$
$8^2 = 64$	$\sqrt{64} = 8$
$9^2 = 81$	$\sqrt{81} = 9$
$10^2 = 100$	$\sqrt{100} = 10$

6.5.2 పునరావృత వ్యవకలనం ద్వారా వర్గమూలం కనుగొనుట

మొదటి n బేసి సంఖ్యల మొత్తం n^2 అవుతుందని మీకు తెలుసు. అంటే, ప్రతి వర్గ సంఖ్యను ఒకటితో మొదలయ్యే వరుస బేసి సంఖ్యల మొత్తంగా వ్రాయవచ్చు.

$\sqrt{81}$ ని తీసుకుందాం. అపుడు,

(i) $81 - 1 = 80$ (ii) $80 - 3 = 77$ (iii) $77 - 5 = 72$ (iv) $72 - 7 = 65$
(v) $65 - 9 = 56$ (vi) $56 - 11 = 45$ (vii) $45 - 13 = 32$ (viii) $32 - 15 = 17$
(ix) $17 - 17 = 0$

ప్రయత్నించండి

1 తో మొదలు పెట్టి బేసి సంఖ్యల పునరావృత వ్యవకలనం ద్వారా క్రింది సంఖ్యలు పరిపూర్ణ వర్గాలో, కాదో కనుగొనండి. ఒకవేళ పరిపూర్ణ వర్గం అయితే, వర్గమూలం కనుక్కోండి.

(i) 121
(ii) 55
(iii) 36
(iv) 49
(v) 90

81 నుండి ఒకటితో మొదలయ్యే వరుస బేసి సంఖ్యలు తీసివేస్తే, 9వ సోపానం వద్ద సున్న వచ్చింది. కాబట్టి $\sqrt{81} = 9$.

ఈ పద్ధతి ద్వారా 729 వర్గమూలాన్ని కనుగొనగలరా? కనుగొనవచ్చు. కానీ, ఎక్కువ సమయం పడుతుంది. దీనికి వేరొక సులభ పద్ధతిని ప్రయత్నిద్దాం.

6.5.3 ప్రధాన కారణాంకాల పద్ధతి ద్వారా వర్గమూలాన్ని కనుగొనుట

క్రింది సంఖ్యల ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధాలు మరియు వాటి వర్గాలను పరిశీలించండి.

సంఖ్య యొక్క ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధం	వర్గం యొక్క ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధం
$6 = 2 \times 3$	$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$
$8 = 2 \times 2 \times 2$	$64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$
$12 = 2 \times 2 \times 3$	$144 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$
$15 = 3 \times 5$	$225 = 3 \times 3 \times 5 \times 5$

6 ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధంలో 2 ఎన్ని సార్లు వచ్చింది? ఒకసారి వచ్చింది. 36 ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధంలో 2 ఎన్ని సార్లు వచ్చింది? రెండు సార్లు వచ్చింది. అదే విధంగా 6, 36 ల ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధంలో 3 ఎన్నిసార్లు వచ్చిందో గమనించండి. అదే విధంగా 8, 64 ల ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధంలో 2 ఎన్నిసార్లు వచ్చిందో గమనించండి.

సంఖ్య యొక్క ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధంలో ప్రతి ప్రధాన సంఖ్య ఎన్నిసార్లు వస్తుందో, దానికి రెండింతల సార్లు, వర్గము యొక్క ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధంలో వస్తుంది. 324 వర్గమూలాన్ని ఈ పద్ధతి ద్వారా కనుగొందాం.

324 యొక్క ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధం

2	324
2	162
3	81
3	27
3	9
	3

$324 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ అగును.

By pairing the prime factors, we get

$$324 = \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3} \times \underline{3 \times 3} = 2^2 \times 3^2 \times 3^2 = (2 \times 3 \times 3)^2$$

So, $\sqrt{324} = 2 \times 3 \times 3 = 18$

Similarly can you find the square root of 256? Prime factorisation of 256 is

2	256
2	128
2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
	2

$$256 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

By pairing the prime factors we get,

$$256 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} = (2 \times 2 \times 2 \times 2)^2$$

Therefore, $\sqrt{256} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

Is 48 a perfect square?

We know $48 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times 3$

Since all the factors are not in pairs so 48 is not a perfect square.

Suppose we want to find the smallest multiple of 48 that is a perfect square, how should we proceed? Making pairs of the prime factors of 48 we see that 3 is the only factor that does not have a pair. So we need to multiply by 3 to complete the pair.

Hence $48 \times 3 = 144$ is a perfect square.

Can you tell by which number should we divide 48 to get a perfect square?

The factor 3 is not in pair, so if we divide 48 by 3 we get $48 \div 3 = 16 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2}$ and this number 16 is a perfect square too.

Example 4: Find the square root of 6400.

2	6400
2	3200
2	1600
2	800
2	400
2	200
2	100
2	50
5	25
	5

Solution: Write $6400 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{5 \times 5}$

Therefore $\sqrt{6400} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 = 80$

Example 5: Is 90 a perfect square?

2	90
3	45
3	15
	5

Solution: We have $90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5$

The prime factors 2 and 5 do not occur in pairs. Therefore, 90 is not a perfect square. That 90 is not a perfect square can also be seen from the fact that it has only one zero.

Example 6: Is 2352 a perfect square? If not, find the smallest multiple of 2352 which is a perfect square. Find the square root of the new number.

2	2352
2	1176
2	588
2	294
3	147
7	49
	7

Solution: We have $2352 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times 3 \times \underline{7 \times 7}$

As the prime factor 3 has no pair, 2352 is not a perfect square.

If 3 gets a pair then the number will become perfect square. So, we multiply 2352 by 3 to get,

$$2352 \times 3 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3} \times \underline{7 \times 7}$$

Now each prime factor is in a pair. Therefore, $2352 \times 3 = 7056$ is a perfect square. Thus the required smallest multiple of 2352 is 7056 which is a perfect square.

And, $\sqrt{7056} = 2 \times 2 \times 3 \times 7 = 84$

Example 7: Find the smallest number by which 9408 must be divided so that the quotient is a perfect square. Find the square root of the quotient.

ప్రధాన కారణాంకాలను జత పరచినపుడు

$$324 = \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3} \times \underline{3 \times 3} = 2^2 \times 3^2 \times 3^2 = (2 \times 3 \times 3)^2$$

కాబట్టి, $\sqrt{324} = 2 \times 3 \times 3 = 18$

అదే విధంగా 256 వర్గమూలాన్ని కనుక్కోగలరా? 256 ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధం

$256 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ అవుతుంది.

2	256
2	128
2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
	2

ప్రధానాంకాలను జతలుగా వ్రాయగా,

$$256 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} = (2 \times 2 \times 2 \times 2)^2$$

అందువలన, $\sqrt{256} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

48 పరిపూర్ణ వర్గమా ?

$48 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times 3$ అని మనకు తెలుసు.

48 యొక్క అన్ని కారణాంకాలు జతలుగా లేవు కాబట్టి పరిపూర్ణ వర్గం కాదు.

48 పరిపూర్ణ వర్గమగుటకు గుణించవలసిన అతిచిన్న గుణిజాన్ని కనుగొనాలంటే మనమేం చేయాలి ? 48 ప్రధాన కారణాంకాలను జతలుగా చేస్తే, 3కు మాత్రమే జతలేదని తెలుస్తుంది. కాబట్టి జతగా చేయడానికి 3చేత గుణించాలి .

కావున $48 \times 3 = 144$ పరిపూర్ణ వర్గమవుతుంది.

ఏ సంఖ్యతో భాగిస్తే 48 పరిపూర్ణవర్గం అవుతుంది?

కారణాంకం 3 కు జతలేదు. కాబట్టి 48ని 3తో భాగిస్తే, $48 \div 3 = 16 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2}$ అవుతుంది. 16 కూడా పరిపూర్ణ వర్గం అవుతుంది.

2	6400
2	3200
2	1600
2	800
2	400
2	200
2	100
2	50
5	25
	5

ఉదాహరణ 4: 6400 కు వర్గమూలం కనుగొనండి.

సాధన: $6400 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{5 \times 5}$

$\sqrt{6400} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 = 80$ అవుతుంది.

2	90
3	45
3	15
	5

ఉదాహరణ 5: 90 పరిపూర్ణ వర్గమవుతుందా?

సాధన: $90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5$ అవుతుంది.

ప్రధాన కారణాంకాలు 2, 5 లు జతలుగా లేవు. కావున, 90 పరిపూర్ణ వర్గం కాదు. 90కి చివరన ఒక సున్నా మాత్రమే ఉండటం వల్ల కూడా అది పరిపూర్ణ వర్గం కాదని చెప్పవచ్చు.

ఉదాహరణ 6: 2352 పరిపూర్ణ వర్గమా? కాకుంటే, 2352 పరిపూర్ణ వర్గమగుటకు గుణించవలసిన కనిష్ఠ గుణిజాన్ని కనుక్కోండి ? క్రొత్త సంఖ్య వర్గమూలం కనుక్కోండి.

2	2352
2	1176
2	588
2	294
3	147
7	49
	7

సాధన: $2352 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times 3 \times \underline{7 \times 7}$ అవుతుంది.

ప్రధాన కారణాంకం 3కు జతలేదు కాబట్టి, 2352 పరిపూర్ణ వర్గం కాదు. 3కు జత ఉంటే ఆ సంఖ్య వర్గ సంఖ్య అవుతుంది. అందువలన 2352ను 3చే గుణించిన పరిపూర్ణవర్గమవుతుంది.

$$2352 \times 3 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3} \times \underline{7 \times 7}$$

ఇప్పుడు ప్రతి ప్రధాన కారణాంకం జతగా ఉంది. కావున, $2352 \times 3 = 7056$ ఒక పరిపూర్ణ వర్గమవుతుంది. కావున, 2352 యొక్క పరిపూర్ణ వర్గమైన కనిష్ఠ గుణిజం 7056 అవుతుంది.

కావున, $\sqrt{7056} = 2 \times 2 \times 3 \times 7 = 84$

ఉదాహరణ 7: 9408ను ఏ కనిష్ఠ సంఖ్యచే భాగించినపుడు భాగఫలం పరిపూర్ణ వర్గం అవుతుంది? భాగఫలం యొక్క వర్గమూలాన్ని కనుక్కోండి.

Solution: We have, $9408 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times 3 \times \underline{7 \times 7}$
If we divide 9408 by the factor 3, then
$9408 \div 3 = 3136 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{7 \times 7}$ which is a perfect square. (Why?)
Therefore, the required smallest number is 3.
And, $\sqrt{3136} = 2 \times 2 \times 2 \times 7 = 56.$

Example 8: Find the smallest square number which is divisible by each of the numbers 6, 9 and 15.

2	6, 9, 15
3	3, 9, 15
3	1, 3, 5
5	1, 1, 5
	1, 1, 1

Solution: This has to be done in two steps. First find the smallest common multiple and then find the square number needed. The least number divisible by each one of 6, 9 and 15 is their LCM. The LCM of 6, 9 and 15 is $2 \times 3 \times 3 \times 5 = 90$.
Prime factorisation of 90 is $90 = 2 \times \underline{3 \times 3} \times 5$.

We see that prime factors 2 and 5 are not in pairs. Therefore 90 is not a perfect square.

In order to get a perfect square, each factor of 90 must be paired. So we need to make pairs of 2 and 5. Therefore, 90 should be multiplied by 2×5, i.e., 10.
Hence, the required square number is $90 \times 10 = 900$.

EXERCISE 6.3

1. What could be the possible 'one's' digits of the square root of each of the following numbers?
   (i) 9801 (ii) 99856 (iii) 998001 (iv) 657666025
2. Without doing any calculation, find the numbers which are surely not perfect squares.
   (i) 153 (ii) 257 (iii) 408 (iv) 441
3. Find the square roots of 100 and 169 by the method of repeated subtraction.
4. Find the square roots of the following numbers by the Prime Factorisation Method.
   (i) 729 (ii) 400 (iii) 1764 (iv) 4096
   (v) 7744 (vi) 9604 (vii) 5929 (viii) 9216
   (ix) 529 (x) 8100
5. For each of the following numbers, find the smallest whole number by which it should be multiplied so as to get a perfect square number. Also find the square root of the square number so obtained.
   (i) 252 (ii) 180 (iii) 1008 (iv) 2028
   (v) 1458 (vi) 768
6. For each of the following numbers, find the smallest whole number by which it should be divided so as to get a perfect square. Also find the square root of the square number so obtained.
   (i) 252 (ii) 2925 (iii) 396 (iv) 2645
   (v) 2800 (vi) 1620
7. The students of Class VIII of a school donated ` 2401 in all, for Prime Minister's National Relief Fund. Each student donated as many rupees as the number of students in the class. Find the number of students in the class.

సాధన: $9408 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times 3 \times \underline{7 \times 7}$ అవుతుంది.

9408ను 3చే భాగించగా,

$9408 \div 3 = 3136 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{7 \times 7}$ ఒక పరిపూర్ణ వర్గమవుతుంది (ఎందుకు?)

అందువల్ల, కావలసిన కనిష్ఠ సంఖ్య 3 అవుతుంది.

కావున, $\sqrt{3136} = 2 \times 2 \times 2 \times 7 = 56.$

2	6, 9, 15
3	3, 9, 15
3	1, 3, 5
5	1, 1, 5
	1, 1, 1

ఉదాహరణ 8: 6, 9 , 15 లచే భాగింపబడు అతిచిన్న వర్గసంఖ్యను కనుక్కోండి.

సాధన: దీనిని రెండు సోపానాలలో చేయవచ్చు. మొదటగా కనిష్ఠ సామాన్య గుణిజం (క.సా.గు) కనుగొనాలి. తర్వాత కావలసిన వర్గసంఖ్యను కనుగొనాలి. 6,9,15 లచే భాగించబడు చిన్నసంఖ్య వాటి క.సా.గు. అవుతుంది. 6, 9, 15 ల క.సా.గు $2 \times 3 \times 3 \times 5 = 90$ అవుతుంది.

90 ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధం, $90 = 2 \times \underline{3 \times 3} \times 5$ అవుతుంది.

ప్రధాన కారణాంకాలు 2, 5 లకు జతలేదు. కావున, 90 పరిపూర్ణ వర్గం కాదు.

పరిపూర్ణ వర్గం కావాలంటే 90 కారణాంకాలన్నీ జతలుగా ఉండాలి. కావున 2, 5 లను జతలుగా చేయాలి. 90 ని $2 \times 5 = 10$ చే గుణించాలి.

కావున, మనకు కావలసిన వర్గ సంఖ్య $90 \times 10 = 900$ అవుతుంది.

అభ్యాసం 6.3

1. క్రింది సంఖ్యల వర్గమూలాల ఒకట్ల స్థానంలో ఉండే అంకెలేవి?
   (i) 9801 (ii) 99856 (iii) 998001 (iv) 657666025
2. ఏ విధమైన గణన చేయకుండానే, క్రింది సంఖ్యలలో ఏవి పరిపూర్ణవర్గాలు కావో కనుక్కోండి.
   (i) 153 (ii) 257 (iii) 408 (iv) 441
3. పునరావృత వ్యవకలన పద్ధతి ద్వారా 100 , 169 ల వర్గమూలాలను కనుగొనండి.
4. ప్రధాన కారణాంకాల పద్ధతిలో క్రింది సంఖ్యల వర్గమూలాలను కనుగొనండి.
   (i) 729 (ii) 400 (iii) 1764 (iv) 4096
   (v) 7744 (vi) 9604 (vii) 5929 (viii) 9216
   (ix) 529 (x) 8100
5. క్రింది సంఖ్యలను ఏ కనిష్ఠ సంఖ్యచే గుణిస్తే, పరిపూర్ణ వర్గాలవుతాయి? ఫలిత సంఖ్యకు వర్గమూలాన్ని కూడా కనుక్కోండి.
   (i) 252 (ii) 180 (iii) 1008 (iv) 2028
   (v) 1458 (vi) 768
6. క్రింది సంఖ్యలను, ఏ కనిష్ఠ పూర్ణాంకంచే భాగిస్తే, పరిపూర్ణ వర్గాలవుతాయి? ఫలితసంఖ్యకు వర్గమూలాన్ని కూడా కనుక్కోండి.
   (i) 252 (ii) 2925 (iii) 396 (iv) 2645
   (v) 2800 (vi) 1620
7. ఒక పాఠశాలలోని 8వ తరగతి విద్యార్థులు ప్రధాన మంత్రి జాతీయ సహాయనిధికి `2401ల మొత్తం విరాళంగా ఇచ్చారు. ఆ తరగతిలో ప్రతి విద్యార్థి చెల్లించిన విరాళం, ఆ తరగతిలోని విద్యార్థుల సంఖ్యకు సమానం అయిన ఆ తరగతిలోని విద్యార్థుల సంఖ్యను కనుగొనండి.

8. 2025 plants are to be planted in a garden in such a way that each row contains as many plants as the number of rows. Find the number of rows and the number of plants in each row.

9. Find the smallest square number that is divisible by each of the numbers 4, 9 and 10.

10. Find the smallest square number that is divisible by each of the numbers 8, 15 and 20.

6.5.4 Finding square root by division method

When the numbers are large, even the method of finding square root by prime factorisation becomes lengthy and difficult. To overcome this problem we use Long Division Method.

For this we need to determine the number of digits in the square root.
See the following table:

Number	Square	
10	100	which is the smallest 3-digit perfect square
31	961	which is the greatest 3-digit perfect square
32	1024	which is the smallest 4-digit perfect square
99	9801	which is the greatest 4-digit perfect square

So, what can we say about the number of digits in the square root if a perfect square is a 3-digit or a 4-digit number? We can say that, if a perfect square is a 3-digit or a 4-digit number, then its square root will have 2-digits.

Can you tell the number of digits in the square root of a 5-digit or a 6-digit perfect square?

The smallest 3-digit perfect square number is 100 which is the square of 10 and the greatest 3-digit perfect square number is 961 which is the square of 31. The smallest 4-digit square number is 1024 which is the square of 32 and the greatest 4-digit number is 9801 which is the square of 99.

THINK, DISCUSS AND WRITE

Can we say that if a perfect square is of n-digits, then its square root will have $\frac{n}{2}$ digits if n is even or $\frac{(n+1)}{2}$ if n is odd?

The use of the number of digits in square root of a number is useful in the following method:

- Consider the following steps to find the square root of 529.

  Can you estimate the number of digits in the square root of this number?

Step 1 Place a bar over every pair of digits starting from the digit at one's place. If the number of digits in it is odd, then the left-most single digit too will have a bar.

Thus we have, $\overline{5}\,\overline{29}$.

Step 2 Find the largest number whose square is less than or equal to the number under the extreme left bar ($2^2 < 5 < 3^2$). Take this number as the divisor and the quotient with the number under the extreme left bar as the dividend (here 5). Divide and get the remainder (1 in this case).

$$\begin{array}{r|l} & \;2 \\ \hline 2 & \overline{5}\,\overline{29} \\ & -4 \\ \hline & \;1 \end{array}$$

8. ఒక తోటలో ఎన్ని వరుసలున్నాయో, ప్రతి వరుసలో అన్ని మొక్కలు ఉండేలా 2025 మొక్కలను నాటాలి. తోటలోని వరుసల సంఖ్యను, ప్రతి వరుసలోని మొక్కల సంఖ్యను కనుగొనుము.

9. 4, 9 మరియు 10 లచే భాగించబడు కనిష్ఠ వర్గ సంఖ్యను కనుగొనుము.

10. 8, 15 మరియు 20 లచే భాగించబడు కనిష్ఠ వర్గ సంఖ్యను కనుగొనుము.

6.5.4 భాగహార పద్ధతిన వర్గమూలం కనుగొనుట

ప్రధాన కారణాంకాల పద్ధతిలో పెద్ద సంఖ్యల వర్గమూలాలు కనుక్కోవడం చాలా సుదీర్ఘమైన, కష్టమైన పని. ఈ సమస్యను అధిగమించడానికి, మనం భాగహార పద్ధతిని ఉపయోగిస్తాం.

దీని కొరకు వర్గమూలంలో ఉండే అంకెల సంఖ్యను నిర్ధారించుకోవాలి.
క్రింది పట్టికను చూడండి:

సంఖ్య	వర్గము	
10	100	3 అంకెల కనిష్ఠ వర్గ సంఖ్య
31	961	3 అంకెల గరిష్ఠ వర్గ సంఖ్య
32	1024	4 అంకెల కనిష్ఠ వర్గ సంఖ్య
99	9801	4 అంకెల గరిష్ఠ వర్గ సంఖ్య

3-అంకెల లేదా 4-అంకెల పరిపూర్ణ వర్గానికి, వర్గమూలంలో ఉండే అంకెల సంఖ్యను గూర్చి ఏమి చెప్పవచ్చు? పరిపూర్ణ వర్గ సంఖ్య 3-అంకెలు లేదా 4-అంకెల సంఖ్య అయితే వాటి వర్గమూలంలో 2-అంకెలుంటాయని చెప్పవచ్చు.

5-అంకెల లేదా 6-అంకెల పరిపూర్ణ వర్గానికి, వర్గమూలంలో ఉండే అంకెల సంఖ్యను చెప్పగలరా?

3-అంకెల కనిష్ఠ పరిపూర్ణ వర్గం 100, ఇది 10కి వర్గము. 3-అంకెల గరిష్ఠ పరిపూర్ణ వర్గం 961, ఇది 31కి వర్గము. 4-అంకెల కనిష్ఠ పరిపూర్ణ వర్గం 1024, ఇది 32కి వర్గము. 4-అంకెల గరిష్ఠ పరిపూర్ణ వర్గం 9801, ఇది 99కి వర్గం అవుతుంది.

ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి

ఒక పరిపూర్ణ వర్గంలో n-అంకెలుంటే, దాని వర్గమూలంలో n సరి సంఖ్య అయితే $\frac{n}{2}$ అంకెలు, n బేసి సంఖ్య అయితే $\frac{(n+1)}{2}$ అంకెలు ఉంటాయని చెప్పవచ్చునా?

క్రింది పద్ధతిలో ఒక సంఖ్య వర్గమూలంలోని అంకెల సంఖ్యను కనుగొనడం చాలా ఉపయోగపడుతుంది.

- 529 కి వర్గమూలం కనుక్కోవడానికి క్రింది సోపానాలు పాటించండి.
  దీని వర్గమూలంలోని అంకెల సంఖ్యను అంచనా వేయగలరా?

సోపానం 1 ఒకట్ల స్థానం మొదలుకొని, ప్రతి అంకెల జతమీద అడ్డుగీత (బార్) ఉంచండి. అంకెల సంఖ్య బేసి సంఖ్యలో ఉంటే, ఎడమ వైపు చివరన మిగిలే ఒక అంకె మీద కూడా అడ్డుగీత ఉంచాలి.

అందువలన, $\overline{5}\,\overline{29}$.

సోపానం 2 ఎడమ వైపు చివరన గల అడ్డుగీత క్రింది సంఖ్యకు సమానమైన లేదా తక్కువైన వర్గం గల గరిష్ఠ సంఖ్యను కనుగొనండి ($2^2 < 5 < 3^2$). ఈ సంఖ్యను విభాజకం గాను, భాగఫలంగాను, తీసుకొని లబ్ధాన్ని ఎడమవైపు చివరనున్న విభాజ్యం కింద (ఇచ్చుట 5) రాయండి. భాగించి శేషాన్ని (ఇచ్చుట 1) పొందండి.

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline 2 & \overline{5}\,\overline{29} \\ & -4 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} & \quad 2 \\ \hline 2 & \overline{5}\,\overline{29} \\ & -4 \\ \hline & \quad 1\,29 \end{array}$$

Step 3 Bring down the number under the next bar (i.e., 29 in this case) to the right of the remainder. So the new dividend is 129.

Step 4 Double the quotient and enter it with a blank on its right.

$$\begin{array}{r|l} & \quad 2 \\ \hline 2 & \overline{5}\,\overline{29} \\ & -4 \\ \hline 4_ & \quad 129 \end{array}$$

Step 5 Guess a largest possible digit to fill the blank which will also become the new digit in the quotient, such that when the new divisor is multiplied to the new quotient the product is less than or equal to the dividend.

In this case $42 \times 2 = 84$.

As $43 \times 3 = 129$ so we choose the new digit as 3. Get the remainder.

$$\begin{array}{r|l} & \quad 23 \\ \hline 2 & \overline{5}\,\overline{29} \\ & -4 \\ \hline 43 & \quad 1\,29 \\ & -129 \\ \hline & \quad\ 0 \end{array}$$

Step 6 Since the remainder is 0 and no digits are left in the given number, therefore, $\sqrt{529} = 23$.

- Now consider $\sqrt{4096}$

Step 1 Place a bar over every pair of digits starting from the one's digit. ($\overline{40}\ \overline{96}$).

$$\begin{array}{r|l} & \quad 6 \\ \hline 6 & \overline{40}\,\overline{96} \\ & -36 \\ \hline & \quad 4 \end{array}$$

Step 2 Find the largest number whose square is less than or equal to the number under the left-most bar ($6^2 < 40 < 7^2$). Take this number as the divisor and the number under the left-most bar as the dividend. Divide and get the remainder i.e., 4 in this case.

$$\begin{array}{r|l} & \quad 6 \\ \hline 6 & \overline{40}\,\overline{96} \\ & -36 \\ \hline & \quad 496 \end{array}$$

Step 3 Bring down the number under the next bar (i.e., 96) to the right of the remainder. The new dividend is 496.

$$\begin{array}{r|l} & \quad 6 \\ \hline 6 & \overline{40}\,\overline{96} \\ & -36 \\ \hline 12_ & \quad 496 \end{array}$$

Step 4 Double the quotient and enter it with a blank on its right.

Step 5 Guess a largest possible digit to fill the blank which also becomes the new digit in the quotient such that when the new digit is multiplied to the new quotient the product is less than or equal to the dividend. In this case we see that $124 \times 4 = 496$.

So the new digit in the quotient is 4. Get the remainder.

$$\begin{array}{r|l} & \quad 6\,4 \\ \hline 6 & \overline{40}\,\overline{96} \\ & -36 \\ \hline 12\underline{4} & \quad 496 \\ & -496 \\ \hline & \quad\ \ 0 \end{array}$$

Step 6 Since the remainder is 0 and no bar left, therefore, $\sqrt{4096} = 64$.

Estimating the number

We use bars to find the number of digits in the square root of a perfect square number.

$$\sqrt{\overline{5}\,\overline{29}} = 23 \qquad \text{and} \qquad \sqrt{\overline{40}\,\overline{96}} = 64$$

In both the numbers 529 and 4096 there are two bars and the number of digits in their square root is 2. Can you tell the number of digits in the square root of 14400?

By placing bars we get $\overline{1}\,\overline{44}\,\overline{00}$. Since there are 3 bars, the square root will be of 3 digit.

```
    |  2
  2 | 5̄ 2̄9̄
    |– 4
----|-----
    | 129
```

సోపానం 3 తర్వాతి అడ్డుగీత క్రింద సంఖ్యను (ఇచ్చట 29) , శేషానికి కుడి వైపున దించాలి. ఇప్పుడు కొత్త విభాజ్యము 129 అవుతుంది.

సోపానం 4 భాగఫలాన్ని రెట్టింపు చేసి, కుడి వైపున ఖాళీగడిని చేర్చి వ్రాయండి.

```
    |  2
  2 | 5̄ 2̄9̄
    |– 4
----|-----
 4_ | 129
```

సోపానం 5 ఖాళీ గడిలో వ్రాయడానికి వీలైన పెద్ద సంఖ్యను ఊహించండి. ఇది భాగఫలంలో కొత్త అంకె అవుతుంది. ఈ సంఖ్యతో ఏర్పడిన కొత్త విభాజకాన్ని , కొత్త భాగఫలాన్ని గుణిస్తే వచ్చు లబ్ధం, విభాజ్యానికి సమానంగా లేదా తక్కువగా ఉండాలి.

ఇచట $42 \times 2 = 84$.

$43 \times 3 = 129$ కావున 3ను కొత్త అంకెగా తీసుకుందాం. భాగించి, శేషాన్ని రాబట్టండి.

```
    |  23
  2 | 5̄ 2̄9̄
    |– 4
----|-----
 43 | 129
    |–129
----|-----
    |   0
```

సోపానం 6 శేషము సున్నావచ్చినది. ఇచ్చిన సంఖ్యలో అంకెలేమీ మిగల లేదు. కావున,

$\sqrt{529} = 23$.

- ఇప్పుడు $\sqrt{4096}$ తీసుకొందాం.

సోపానం 1 ఒకట్లస్థానం నుండి మొదలెట్టి, ప్రతి అంకెల జతమీద అడ్డుగీత (బార్) ఉంచండి. ($\overline{40}\,\overline{96}$).

```
    |  6
  6 | 4̄0̄ 9̄6̄
    |– 36
----|-----
    |  4
```

సోపానం 2 మొదటి జత లేదా అంకెకు (ఎడమ నుండి కుడికి) సమానమైన లేదా తక్కువైన వర్గం గల గరిష్ఠ సంఖ్యను కనుగొనండి ($6^2 < 40 < 7^2$). ఈ సంఖ్యను విభాజకంలో మరియు భాగఫలంలో రాయండి. ఇక్కడ ఆసంఖ్య 6. వాటి లబ్ధాన్ని ($6 \times 6 = 36$ను) మొదటి జత విభాజ్యము (ఇచ్చట 40) క్రింద రాసి తీసివేయండి (ఇచ్చట 40 – 36 = 4) శేషాన్ని (ఇచ్చట 4) రాయండి.

```
    |  6
  6 | 4̄0̄ 9̄6̄
    |– 36
----|-----
    | 496
```

సోపానం 3 శేషానికి కుడివైపున, తర్వాతి అడ్డుగీత క్రిందిసంఖ్యను (ఇచ్చట 96) దించాలి. కొత్త విభాజ్యం 496 .

```
    |  6
  6 | 4̄0̄ 9̄6̄
    |– 36
----|-----
12_ | 496
```

సోపానం 4 భాగఫలాన్ని రెట్టింపు చేసి, కుడి వైపున ఖాళీగడి ఉంచి వ్రాయండి.

సోపానం 5 ఖాళీగడిలో వ్రాయడానికి వీలైన పెద్దసంఖ్యను ఊహించండి. ఇది భాగఫలంలో క్రొత్త అంకె అవుతుంది. క్రొత్త అంకెతో, క్రొత్త విభాజకాన్ని గుణిస్తే వచ్చు లబ్ధం, విభాజ్యానికి సమానంగా లేదా తక్కువగా ఉండాలి. ఇచ్చట $124 \times 4 = 496$.

కావున భాగఫలంలో కొత్త అంకె 4. శేషాన్ని రాబట్టండి.

```
    |  64
  6 | 4̄0̄ 9̄6̄
    |– 36
----|-----
124 | 496
    |– 496
----|-----
    |    0
```

సోపానం 6 శేషము సున్నా, అంకెలేవి మిగలలేదు. కావున, $\sqrt{4096} = 64$.

సంఖ్యను అంచనా వేయడం

పరిపూర్ణ వర్గం యొక్క వర్గమూలంలో గల అంకెల సంఖ్యను కనుక్కోవడానికి అడ్డుగీతలను ఉపయోగిస్తాం.

$$\sqrt{5\overline{29}} = 23 \quad \text{మరియు} \quad \sqrt{\overline{40}\,\overline{96}} = 64$$

529, 4096 రెండింటిలోనూ రెండేసి అడ్డు గీతలున్నాయి. కాబట్టి వాటి వర్గమూలంలో 2 అంకెలు ఉంటాయి. 14400కి వర్గమూలంలో ఉండే అంకెల సంఖ్యను చెప్పగలరా?

అడ్డు గీతలను ఉంచగా $\overline{1}\,\overline{44}\,\overline{00}$ అవుతుంది. 3 అడ్డు గీతలున్నాయి, కాబట్టి వర్గమూలంలో 3 అంకెలుంటాయి.

TRY THESE

Without calculating square roots, find the number of digits in the square root of the following numbers.

(i) 25600 (ii) 100000000 (iii) 36864

Example 9: Find the square root of : (i) 729 (ii) 1296

Solution:

(i)

	27
2	$\overline{7}\,\overline{29}$
	– 4
47	329
	329
	0

Therefore $\sqrt{729} = 27$

(ii)

	36
3	$\overline{12}\,\overline{96}$
	– 9
66	396
	396
	0

Therefore $\sqrt{1296} = 36$

Example 10: Find the least number that must be subtracted from 5607 so as to get a perfect square. Also find the square root of the perfect square.

Solution: Let us try to find $\sqrt{5607}$ by long division method. We get the remainder 131. It shows that 74^2 is less than 5607 by 131.

This means if we subtract the remainder from the number, we get a perfect square.

Therefore, the required perfect square is 5607 – 131 = 5476. And, $\sqrt{5476} = 74$.

	74
7	$\overline{56}\,\overline{07}$
	– 49
144	707
	–576
	131

Example 11: Find the greatest 4-digit number which is a perfect square.

Solution: Greatest number of 4-digits = 9999. We find $\sqrt{9999}$ by long division method. The remainder is 198. This shows 99^2 is less than 9999 by 198.

This means if we subtract the remainder from the number, we get a perfect square.

Therefore, the required perfect square is 9999 – 198 = 9801.

And, $\sqrt{9801} = 99$

	99
9	$\overline{99}\,\overline{99}$
	– 81
189	1899
	– 1701
	198

Example 12: Find the least number that must be added to 1300 so as to get a perfect square. Also find the square root of the perfect square.

Solution: We find $\sqrt{1300}$ by long division method. The remainder is 4.

This shows that $36^2 < 1300$.

Next perfect square number is $37^2 = 1369$.

Hence, the number to be added is $37^2 – 1300 = 1369 – 1300 = 69$.

	36
3	$\overline{13}\,\overline{00}$
	– 9
66	400
	– 396
	4

6.6 Square Roots of Decimals

Consider $\sqrt{17.64}$

Step 1 To find the square root of a decimal number we put bars on the integral part (i.e., 17) of the number in the usual manner. And place bars on the decimal part

ప్రయత్నించండి

వర్గమూలాలు గణన చేయకుండానే, క్రింది సంఖ్యల వర్గమూలంలో ఉండే అంకెల సంఖ్యను కనుక్కోండి.
(i) 25600 (ii) 100000000 (iii) 36864

ఉదాహరణ 9: వర్గమూలం కనుగొనండి. (i) 729 (ii) 1296

సాధన:

(i)

	27
2	$\overline{7}\,\overline{29}$
	– 4
47	329
	329
	0

కావున $\sqrt{729} = 27$

(ii)

	36
3	$\overline{12}\,\overline{96}$
	– 9
66	396
	396
	0

కావున $\sqrt{1296} = 36$

ఉదాహరణ10: పరిపూర్ణవర్గం అగుటకు 5607 నుండి తీసివేయవలసిన కనిష్ఠ సంఖ్యను కనుక్కోండి. పరిపూర్ణవర్గానికి వర్గమూలం కూడా కనుక్కోండి.

సాధన: $\sqrt{5607}$ ను భాగహార పద్ధతిలో కనుక్కోవడానికి ప్రయత్నిద్దాం. శేషము 131 వచ్చింది 74^2 విలువ 5607 కన్నా 131 తక్కువ అని తెలుస్తుంది.
అంటే, ఆ సంఖ్య నుండి శేషాన్ని తీసేస్తే పరిపూర్ణ వర్గం వస్తుంది.
కావలసిన పరిపూర్ణ వర్గం 5607 – 131 = 5476 మరియు $\sqrt{5476} = 74$.

	74
7	$\overline{56}\,\overline{07}$
	– 49
144	707
	–576
	131

ఉదాహరణ 11: పరిపూర్ణ వర్గం అయ్యే 4 – అంకెల గరిష్ఠ సంఖ్యను కనుక్కోండి

సాధన: 4–అంకెల గరిష్ఠ సంఖ్య = 9999. $\sqrt{9999}$ ను భాగహార పద్ధతిలో కనుగొందాం. శేషము 198 వచ్చింది. 99^2 విలువ 9999కన్నా 198 తక్కువని తెలుస్తుంది.

అంటే, ఆ సంఖ్య నుండి శేషాన్ని తీసేస్తే పరిపూర్ణ వర్గం వస్తుంది.

కావలసిన పరిపూర్ణ వర్గం 9999 – 198 = 9801.

$\sqrt{9801} = 99$

	99
9	$\overline{99}\,\overline{99}$
	– 81
189	1899
	– 1701
	198

ఉదాహరణ 12: పరిపూర్ణ వర్గం అవ్వడానికి 1300కి కలపవలసిన కనిష్ఠ సంఖ్యను కనుక్కోండి. ఆ పరిపూర్ణ వర్గ సంఖ్య యొక్క వర్గమూలాన్ని కూడా కనుక్కోండి.

సాధన: $\sqrt{1300}$ ను భాగహార పద్ధతిలో కనుగొందాం. శేషము 4 వచ్చింది.
$36^2 < 1300$ అని తెలుస్తుంది. తర్వాత పరిపూర్ణ వర్గం $37^2 = 1369$.
కావున, కూడవలసిన సంఖ్య $37^2 – 1300 = 1369 – 1300 = 69$.

	36
3	$\overline{13}\,\overline{00}$
	– 9
66	400
	– 396
	4

6.6 దశాంశ సంఖ్యల వర్గమూలాలు

$\sqrt{17.64}$ ను తీసుకోండి.

సోపానం 1 దశాంశ సంఖ్య వర్గమూలం కనుగొనడానికి, పూర్ణాంక భాగానికి (అనగా 17నకు) సాధారణ పద్ధతిలో వలె అడ్డుగీతనుంచాలి. దశాంశ భాగానికి (అనగా 64నకు) మొదటి దశాంశ

$$\begin{array}{r|l} & \;4 \\ \hline 4 & \overline{17}.\overline{64} \\ & -16 \\ \hline & \;\;1 \end{array}$$

(i.e., 64) on every pair of digits beginning with the first decimal place. Proceed as usual.

We get $\overline{17}.\overline{64}$.

Step 2 Now proceed in a similar manner. The left most bar is on 17 and $4^2 < 17 < 5^2$. Take this number as the divisor and the number under the left-most bar as the dividend, i.e., 17. Divide and get the remainder.

$$\begin{array}{r|l} & \;4 \\ \hline 4 & \overline{17}.\overline{64} \\ & -16 \\ \hline 8_ & \;1\,64 \end{array}$$

Step 3 The remainder is 1. Write the number under the next bar (i.e., 64) to the right of this remainder, to get 164.

$$\begin{array}{r|l} & \;4. \\ \hline 4 & 17.64 \\ & -16 \\ \hline 82 & \;164 \end{array}$$

Step 4 Double the quotuient and enter it with a blank on its right.

Since 64 is the decimal part so put a decimal point in the quotient.

Step 5 We know 82 × 2 = 164, therefore, the new digit is 2. Divide and get the remainder.

$$\begin{array}{r|l} & 4.2 \\ \hline 4 & 17.64 \\ & -16 \\ \hline 82 & 164 \\ & -164 \\ \hline & 0 \end{array}$$

Step 6 Since the remainder is 0 and no bar left, therefore $\sqrt{17.64} = 4.2$.

Example 13: Find the square root of 12.25.

Solution:

$$\begin{array}{r|l} & 3.5 \\ \hline 3 & \overline{12}.\overline{25} \\ & -9 \\ \hline 65 & 325 \\ & 325 \\ \hline & 0 \end{array}$$

Therefore, $\sqrt{12.25} = 3.5$

Which way to move

Consider a number 176.341. Put bars on both integral part and decimal part. In what way is putting bars on decimal part different from integral part? Notice for 176 we start from the unit's place close to the decimal and move towards left. The first bar is over 76 and the second bar over 1. For .341, we start from the decimal and move towards right. First bar is over 34 and for the second bar we put 0 after 1 and make $.\overline{34}\overline{10}$.

Example 14: Area of a square plot is 2304 m^2. Find the side of the square plot.

Solution: Area of square plot = 2304 m^2

Therefore, side of the square plot = $\sqrt{2304}$ m

We find that, $\sqrt{2304} = 48$

$$\begin{array}{r|l} & 48 \\ \hline 4 & \overline{23}\overline{04} \\ & -16 \\ \hline 88 & 704 \\ & 704 \\ \hline & 0 \end{array}$$

Thus, the side of the square plot is 48 m.

Example 15: There are 2401 students in a school. P.T. teacher wants them to stand in rows and columns such that the number of rows is equal to the number of columns. Find the number of rows.

	4
4	$\overline{17}.\overline{64}$
	– 16
	1

స్థానం నుండి మొదలయ్యే ప్రతి అంకెల జత మీద అడ్డుగీత ఉంచండి. సాధారణ పద్ధతిలోవలె కొనసాగించండి. $\overline{17}.\overline{64}$ వస్తుంది.

సోపానం 2 మరలా అదే విధంగా ప్రయత్నించండి. ఎడమ వైపున గల గీత క్రింద 17 కలదు మరియు $4^2 < 17 < 5^2$. ఈ సంఖ్యను (ఇచ్చుట 4) విభాజకంగాను, గీత క్రింది సంఖ్యను (ఇచ్చుట 17) విభాజ్యంగాను తీసుకొని భాగించి, శేషమును రాబట్టండి.

	4
4	$\overline{17}.\overline{64}$
	– 16
8_	1 64

సోపానం 3 శేషము 1 వస్తుంది. శేషానికి కుడి వైపున, తర్వాత అడ్డుగీత క్రిందనున్న సంఖ్యను (ఇచ్చుట 64) వ్రాయండి. 164 వస్తుంది.

	4.
4	17.64
	– 16
82	164

సోపానం 4 భాగఫలాన్ని రెట్టింపు చేసి, కుడివైపున ఖాళీ గడిని ఉంచి, వ్రాయండి. 64 దశాంశ భాగం కావున భాగఫలంలో దశాంశాన్ని ఉంచండి. (అనగా 4.)

సోపానం 5 $82 \times 2 = 164$, అని మనకు తెలుసు. కావున క్రొత్త అంకె 2 అవుతుంది. భాగించి, శేషాన్ని రాబట్టండి.

సోపానం 6 శేషము సున్న. అంకెలేవీ మిగలలేదు. కావున $\sqrt{17.64} = 4.2$

	4.2
4	17.64
	–16
82	164
	– 164
	0

ఉదాహరణ 13: 12.25 యొక్క వర్గమూలం కనుక్కోండి.

సాధన:

	3.5
3	$\overline{12}.\overline{25}$
	– 9
65	325
	325
	0

కావున $\sqrt{12.25} = 3.5$

అడ్డుగీత గీయు విధానం (ఎటు వైపు కదలాలి)

176.341ను తీసుకుందాం. పూర్ణాంకభాగం, దశాంశభాగం రెండింటిపై అడ్డుగీతలు ఉంచండి. దశాంశ భాగంపై అడ్డుగీతనుంచుట, పూర్ణాంక భాగంపై అడ్డుగీతనుంచుట కంటే ఏ విధంగా భిన్నమైనది? 176ను గమనించండి. దశాంశ బిందువుకు దగ్గరగా ఉన్న ఒకట్ల స్థానం నుండి ప్రారంభించి ఎడమ వైపు కదులుతాం. మొదటి అడ్డుగీత 76 మీద, రెండవది 1 మీద ఉంచుతాం. .341కు దశాంశం నుండి ప్రారంభించి, కుడివైపుకు కదులుతాం. మొదటి అడ్డుగీత 34 మీద, 1 తరువాత '0' ఉంచి, ఆ జతపై రెండవ అడ్డుగీత ఉంచుతాం. అపుడు $.\overline{34}\overline{10}$ అవుతుంది.

ఉదాహరణ 14: చతుస్రాకార స్థలం వైశాల్యం 2304చ.మీ. అయితే చతురస్ర భుజం కొలతను కనుగొనండి.

సాధన: చతురస్రాకార స్థలం వైశాల్యం = 2304 చ.మీ.

కావున, చతురస్ర భుజం పొడవు = $\sqrt{2304}$ మీ.

	48
4	$\overline{23}\overline{04}$
	–16
88	704
	704
	0

$\sqrt{2304}$ = 48 అని కనుగొన్నాం.

కాబట్టి, చతురస్ర భుజం పొడవు 48 మీ.

ఉదాహరణ 15: ఒక పాఠశాలలో 2401 మంది విద్యార్థులున్నారు. వారిని అడ్డు వరుసల సంఖ్య, నిలువు వరుసల సంఖ్య సమానంగా ఉండేలా వరుసలలో నిలబెట్టాలని వ్యాయామ ఉపాధ్యాయులు అనుకున్నారు. అయినచో, అడ్డువరుసల సంఖ్య కనుక్కోండి .

Solution: Let the number of rows be x

So, the number of columns = x

Therefore, number of students = $x \times x = x^2$

Thus, $x^2 = 2401$ gives $x = \sqrt{2401} = 49$

The number of rows = 49.

$$\begin{array}{r|l} & \;\;49 \\ \hline 4 & \overline{24}\,\overline{01} \\ & -16 \\ \hline 89 & \;\;801 \\ & \;\;801 \\ \hline & \quad 0 \end{array}$$

6.7 Estimating Square Root

Consider the following situations:

1. Deveshi has a square piece of cloth of area 125 cm^2. She wants to know whether she can make a handkerchief of side 15 cm. If that is not possible she wants to know what is the maximum length of the side of a handkerchief that can be made from this piece.
2. Meena and Shobha played a game. One told a number and other gave its square root. Meena started first. She said 25 and Shobha answered quickly as 5. Then Shobha said 81 and Meena answered 9. It went on, till at one point Meena gave the number 250. And Shobha could not answer. Then Meena asked Shobha if she could atleast tell a number whose square is closer to 250.

In all such cases we need to *estimate* the square root.

We know that $100 < 250 < 400$ and $\sqrt{100} = 10$ and $\sqrt{400} = 20$.

So $\quad 10 < \sqrt{250} < 20$

But still we are not very close to the square number.

We know that $15^2 = 225$ and $16^2 = 256$

Therefore, $\quad 15 < \sqrt{250} < 16$ and 256 is much closer to 250 than 225.

So, $\quad \sqrt{250}$ is approximately 16.

TRY THESE

Estimate the value of the following to the nearest whole number.

(i) $\sqrt{80}$ (ii) $\sqrt{1000}$ (iii) $\sqrt{350}$ (iv) $\sqrt{500}$

EXERCISE 6.4

1. Find the square root of each of the following numbers by Division method.

(i) 2304 (ii) 4489 (iii) 3481 (iv) 529

(v) 3249 (vi) 1369 (vii) 5776 (viii) 7921

(ix) 576 (x) 1024 (xi) 3136 (xii) 900

2. Find the number of digits in the square root of each of the following numbers (without any calculation).

(i) 64 (ii) 144 (iii) 4489 (iv) 27225

(v) 390625

సాధన: అడ్డు వరుసల సంఖ్యను x అనుకొనుము
కావున, నిలువ వరుసల సంఖ్య $= x$ అవుతుంది.
అందువలన, విద్యార్థుల సంఖ్య $= x \times x = x^2$
కనుక, $x^2 = 2401$, $x = \sqrt{2401} = 49$
అడ్డువరుసల సంఖ్య $= 49$.

	49
4	$\overline{24}\,\overline{01}$
	–16
89	801
	801
	0

6.7 వర్గమూలాలను అంచనా వేయటం

క్రింది సందర్భాలను పరిశీలించండి.

1. దేవేషి వద్ద 125 చ.సెం.మీ.ల వైశాల్యం గల చతురస్రాకారపు వస్త్రం కలదు. దాని నుండి ఆమె 15 సెం.మీ. భుజంగా గల చేతిరుమాలును తయారుచేయగలనా అని అనుకున్నది. అది సాధ్యం కాకపోతే, ఆ వస్త్రంతో తయారుచేసే చేతిరుమాలు అంచు గరిష్ఠ పొడవు ఎంతవుతుందో తెలుసుకోవాలనుకున్నది.
2. మీనా మరియు శోభ ఒక ఆట ఆడారు. ఒకరు ఒక సంఖ్యను చెబితే మరొకరు దాని వర్గమూలం చెబుతున్నారు. మొదట మీనా ప్రారంభించినది. ఆమె 25 చెపితే, శోభ వెంటనే 5 అని జవాబిచ్చింది. అపుడు శోభ 81 చెప్పింది. మీనా 9 అని జవాబిచ్చింది. మీనా 250 అను సంఖ్య యొక్క వర్గమూలం అడిగింది. శోభ జవాబివ్వలేకపోయింది. అప్పుడు 250 కి దగ్గరలో వర్గాన్ని కలిగిన సంఖ్యనైనా చెప్పమని మీనా, శోభను అడిగింది.

ఇలాంటి సందర్భాలన్నింటిలోను, వర్గమూలాన్ని *అంచనా* వేయవలసిన అవసరం ఉంది.

$100 < 250 < 400$ మరియు $\sqrt{100} = 10$ మరియు $\sqrt{400} = 20$ అని మనకు తెలుసు.

కావున, $10 < \sqrt{250} < 20$

కానీ, ఇంకా వర్గసంఖ్యకు చాలా దగ్గరగా లేము
$15^2 = 225$ మరియు $16^2 = 256$ అని మనకు తెలుసు.

కావున, $15 < \sqrt{250} < 16$ మరియు 250 విలువ 225 కంటే 256కి దగ్గరగా ఉంది.

కావున, $\sqrt{250}$ విలువ సుమారుగా 16.

ప్రయత్నించండి

కింది వాని విలువలను సమీప పూర్ణాంకానికి అంచనావేయండి.

(i) $\sqrt{80}$ (ii) $\sqrt{1000}$ (iii) $\sqrt{350}$ (iv) $\sqrt{500}$

అభ్యాసం 6.4

1. భాగహార పద్ధతిలో క్రింది సంఖ్యల వర్గమూలం కనుగొనండి.

(i) 2304 (ii) 4489 (iii) 3481 (iv) 529
(v) 3249 (vi) 1369 (vii) 5776 (viii) 7921
(ix) 576 (x) 1024 (xi) 3136 (xii) 900

2. క్రింది సంఖ్యల వర్గమూలంలోని అంకెల సంఖ్యను కనుగొనండి (ఏ విధమైన గణన చేయకుండానే).

(i) 64 (ii) 144 (iii) 4489 (iv) 27225
(v) 390625

3. Find the square root of the following decimal numbers.
   (i) 2.56 (ii) 7.29 (iii) 51.84 (iv) 42.25
   (v) 31.36
4. Find the least number which must be subtracted from each of the following numbers so as to get a perfect square. Also find the square root of the perfect square so obtained.
   (i) 402 (ii) 1989 (iii) 3250 (iv) 825
   (v) 4000
5. Find the least number which must be added to each of the following numbers so as to get a perfect square. Also find the square root of the perfect square so obtained.
   (i) 525 (ii) 1750 (iii) 252 (iv) 1825
   (v) 6412
6. Find the length of the side of a square whose area is 441 m^2.
7. In a right triangle ABC, $\angle B = 90°$.
   (a) If AB = 6 cm, BC = 8 cm, find AC (b) If AC = 13 cm, BC = 5 cm, find AB
8. A gardener has 1000 plants. He wants to plant these in such a way that the number of rows and the number of columns remain same. Find the minimum number of plants he needs more for this.
9. There are 500 children in a school. For a P.T. drill they have to stand in such a manner that the number of rows is equal to number of columns. How many children would be left out in this arrangement.

WHAT HAVE WE DISCUSSED?

1. If a natural number m can be expressed as n^2, where n is also a natural number, then m is a **square number**.
2. All square numbers end with 0, 1, 4, 5, 6 or 9 at units place.
3. Square numbers can only have even number of zeros at the end.
4. **Square root** is the inverse operation of square.
5. There are two integral square roots of a perfect square number.

   Positive square root of a number is denoted by the symbol $\sqrt{\ }$.

   For example, $3^2 = 9$ gives $\sqrt{9} = 3$

3. క్రింది దశాంశ సంఖ్యలకు వర్గమూలం కనుగొనండి.
   (i) 2.56 (ii) 7.29 (iii) 51.84 (iv) 42.25
   (v) 31.36
4. క్రింది సంఖ్యలు పరిపూర్ణ వర్గాలు కావడానికి తీసివేయవలసిన కనిష్ఠ సంఖ్యను కనుక్కోండి. వచ్చిన పరిపూర్ణవర్గానికి, వర్గమూలం కూడా కనుగొనండి.
   (i) 402 (ii) 1989 (iii) 3250 (iv) 825
   (v) 4000
5. క్రింది సంఖ్యలు పరిపూర్ణ వర్గాలు కావడానికి కూడవలసిన కనిష్ఠ సంఖ్యను కనుగొనండి. ఫలిత పరిపూర్ణ వర్గానికి, వర్గమూలం కూడా కనుగొనండి.
   (i) 525 (ii) 1750 (iii) 252 (iv) 1825
   (v) 6412
6. ఒక చతురస్ర వైశాల్యం 441 చ.మీ. అయిన భుజం పొడవు కనుగొనండి.
7. ABC లంబకోణ త్రిభుజంలో $\angle B = 90°$.
   (a) AB = 6 సెం.మీ., BC = 8 సెం.మీ అయిన AC ని కనుగొనండి.
   (b) AC = 13 సెం.మీ., BC = 5 సెం.మీ., అయిన AB ని కనుగొనండి.
8. ఒక తోటమాలి దగ్గర 1000 మొక్కలున్నాయి. అతడు, వాటిని అడ్డ వరుసలు, నిలువు వరుసలు సమానంగా ఉండేలా నాటాలనుకొన్నాడు. ఇంకా అదనంగా అతనికి కావలసిన మొక్కల కనిష్ఠ సంఖ్య కనుగొనండి.
9. ఒక పాఠశాలలో 500 మంది పిల్లలున్నారు. వారు వ్యాయామం చేయడానికి అడ్డువరుసలు, నిలువు వరుసలలో సమానంగా ఉండేలా వ్యాయామ ఉపాధ్యాయులు నిలబెట్టాల్సి ఉంటుంది. ఈ అమరికలో ఇంకా ఎంత మంది పిల్లలు మిగులుతారు.

మనం ఏమి చర్చించుకున్నాం?

1. ఒక సహజసంఖ్య m ను, మరొక సహజసంఖ్య n యొక్క వర్గము n^2 గా వ్యక్తపరచగలిగితే, అపుడు m ఒక **వర్గ సంఖ్య** అవుతుంది.
2. అన్ని వర్గసంఖ్యలు, ఒకట్ల స్థానంలో 0, 1, 4, 5, 6 లేదా 9 తో అంతమవుతాయి.
3. వర్గ సంఖ్యల చివరలో సున్నాలు సరిసంఖ్యలో మాత్రమే ఉంటాయి.
4. **వర్గమూలం** అనునది వర్గమునకు విలోమ ప్రక్రియ.
5. ఒక పరిపూర్ణ వర్గసంఖ్యకు రెండు వర్గ మూలాలుంటాయి.

   ఒక సంఖ్య యొక్క ధనాత్మక వర్గమూలాన్ని $\sqrt{\ }$ గుర్తుతో సూచిస్తారు.

   ఉదాహరణకు, $3^2 = 9$ అయిన $\sqrt{9} = 3$ అవుతుంది.

CHAPTER
7

Cubes and Cube Roots

0852CH07

7.1 Introduction

This is a story about one of India's great mathematical geniuses, S. Ramanujan. Once another famous mathematician Prof. G.H. Hardy came to visit him in a taxi whose number was 1729. While talking to Ramanujan, Hardy described this number "a dull number". Ramanujan quickly pointed out that 1729 was indeed interesting. He said it is the smallest number that can be expressed as a sum of two cubes in two different ways:

$$1729 = 1728 + 1 = 12^3 + 1^3$$

$$1729 = 1000 + 729 = 10^3 + 9^3$$

1729 has since been known as the Hardy – Ramanujan Number, even though this feature of 1729 was known more than 300 years before Ramanujan.

Hardy – Ramanujan Number

1729 is the smallest Hardy–Ramanujan Number. There are an infinitely many such numbers. Few are 4104 (2, 16; 9, 15), 13832 (18, 20; 2, 24), Check it with the numbers given in the brackets.

How did Ramanujan know this? Well, he loved numbers. All through his life, he experimented with numbers. He probably found numbers that were expressed as the sum of two squares and sum of two cubes also.

There are many other interesting patterns of cubes. Let us learn about cubes, cube roots and many other interesting facts related to them.

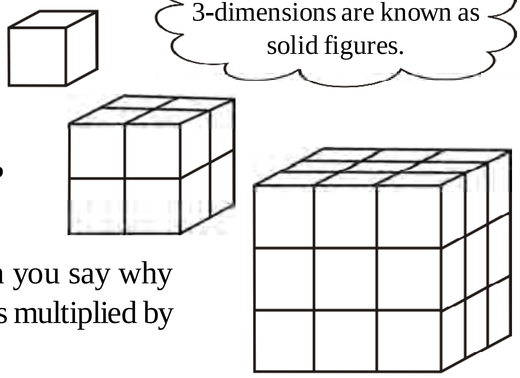
7.2 Cubes

Figures which have 3-dimensions are known as solid figures.

You know that the word 'cube' is used in geometry. A cube is a solid figure which has all its sides equal. How many cubes of side 1 cm will make a cube of side 2 cm?

How many cubes of side 1 cm will make a cube of side 3 cm?

Consider the numbers 1, 8, 27, ...



These are called **perfect cubes or cube numbers**. Can you say why they are named so? Each of them is obtained when a number is multiplied by taking it three times.

ఘనములు ఘనమూలాలు

అధ్యాయం **7**

Z7U7P2

7.1 పరిచయం

భారతీయ గొప్ప గణిత మేధావులలో ఒకరైన శ్రీ శ్రీనివాస రామానుజన్ గారి గురించిన ఒక కథ ఇది. ఒకసారి మరొక ప్రముఖ గణిత శాస్త్రవేత్త ప్రొ॥జి.హెచ్. హార్డీ గారు వీరిని చూడటానికి 1729 నెంబరు గల ఒక టాక్సీలో వచ్చారు. ఆయన రామానుజన్ గారితో మాట్లాడుతూ నేను వచ్చిన టాక్సీ నెంబరు 1729, ఇది ఒక "నిస్తేజమైన సంఖ్య" అని అన్నారు. రామానుజన్ గారు వెంటనే స్పందిస్తూ 1729 ఒక ఆసక్తికరమైన సంఖ్య మరియు అది రెండు విభిన్న సంఖ్యల ఘనముల మొత్తంగా రెండు విధములుగా రాయగల కనిష్ఠ సంఖ్య అని చెప్పారు.

$$1729 = 1728 + 1 = 12^3 + 1^3$$

$$1729 = 1000 + 729 = 10^3 + 9^3$$

అప్పటి నుంచి 1729ని హార్డీ రామానుజన్ సంఖ్య అని పిలుస్తారు. రామానుజన్‌కు 300 సం॥ల పూర్వమే 1729 సంఖ్య యొక్క విశిష్టత గురించి పూర్వీకులకు తెలుసు.

> **హార్డీ - రామానుజన్ సంఖ్య**
>
> 1729 హార్డీ-రామానుజన్ కనిష్ఠ సంఖ్య. ఈ విధమైన సంఖ్యలు అపరిమితం. వాటిలో కొన్ని 4104 (2,16; 9,15) 13832 (18, 20; 2, 24) వీటిని బ్రాకెట్లలో ఇచ్చిన సంఖ్యలతో పరీక్షించండి.

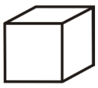
రామానుజన్ దీని గురించి ఎలా తెలుసుకున్నారు? తను సంఖ్యలను ప్రేమించేవాడు. అతని జీవితాంతం సంఖ్యలతో ప్రయోగాలు చేశారు. సంఖ్యలను రెండు వర్గముల మొత్తంగా మరియు రెండు ఘనముల మొత్తంగా రాయవచ్చని కనుగొన్నాడు.

ఇంకా చాలా ఆసక్తికరమైన ఘనముల అమరికలు ఉన్నాయి. ఇప్పుడు మనం ఘనములు, ఘనమూలముల మరియు వాటి గురించి అనేక ఇతర ఆసక్తికరమైన విషయాలను నేర్చు

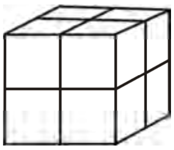
త్రిమితీయ కొలతలు గల వస్తువులను ఘనాకార వస్తువులు అంటారు

7.2 ఘనములు

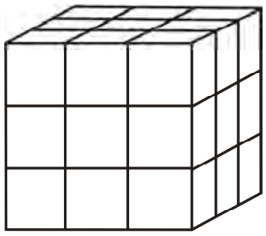
'ఘనము' అను పదమును రేఖాగణితములో ఉపయోగించామని మనకు తెలుసు. ఘనము అనగా అంచులు అన్నీ సమానముగా గల ఘనాకృతి.



2 సెం.మీ అంచుగా గల ఘనమును తయారు చేయడానికి 1 సెం.మీ అంచు గల ఘనములు ఎన్ని కావాలి?



3 సెం.మీ అంచు గల ఘనము తయారు చేయడానికి 1 సెం.మీ అంచు గల ఘనములు ఎన్ని కావాలి?



1, 8, 27....... సంఖ్యలను తీసుకుందాం.

వీటిని **పరిపూర్ణ ఘనములు** లేదా **ఘన సంఖ్యలు** అంటాం. వాటికి ఈ పేరు ఎలా వచ్చిందో మీరు చెప్పగలరా? ఒక సంఖ్యను అదే సంఖ్యచే మూడుసార్లు గుణించగా పై సంఖ్యలు వస్తాయి.

We note that $1 = 1 \times 1 \times 1 = 1^3$; $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$; $27 = 3 \times 3 \times 3 = 3^3$.
Since $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$, therefore 125 is a cube number.

Is 9 a cube number? No, as $9 = 3 \times 3$ and there is no natural number which multiplied by taking three times gives 9. We can see also that $2 \times 2 \times 2 = 8$ and $3 \times 3 \times 3 = 27$. This shows that 9 is not a perfect cube.

The following are the cubes of numbers from 1 to 10.

Table 1

Number	Cube
1	$1^3 = 1$
2	$2^3 = 8$
3	$3^3 = 27$
4	$4^3 = 64$
5	$5^3 =$ _____
6	$6^3 =$ _____
7	$7^3 =$ _____
8	$8^3 =$ _____
9	$9^3 =$ _____
10	$10^3 =$ _____

The numbers 729, 1000, 1728 are also perfect cubes.

Complete it.

There are only ten perfect cubes from 1 to 1000. (Check this). How many perfect cubes are there from 1 to 100?

Observe the cubes of even numbers. Are they all even? What can you say about the cubes of odd numbers?

Following are the cubes of the numbers from 11 to 20.

Table 2

Number	Cube
11	1331
12	1728
13	2197
14	2744
15	3375
16	4096
17	4913
18	5832
19	6859
20	8000

We are even, so are our cubes

We are odd so are our cubes

$1 = 1 \times 1 \times 1 = 1^3$; $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$; $27 = 3 \times 3 \times 3 = 3^3$అని మనకు తెలుసు. అలానే $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$, కావున 125 ఒక ఘన సంఖ్య.

9 ఒక ఘన సంఖ్యా? కాదు. ఎందుకనగా $9 = 3 \times 3$ మరియు ఒక సంఖ్యను దానితోనే మూడు సార్లు గుణించగా లబ్ధం '9' వచ్చేలా ఎటువంటి సహజ సంఖ్య లేదు.
ఇంకా $2\times2\times2=8$ మరియు $3\times3\times3=27$. కనుక 9 పరిపూర్ణ ఘనము కాదు.
1 నుండి 10 వరకు ఘనములు ఈ దిగువ ఉన్నాయి.

పట్టిక – 1

సంఖ్య	ఘనము
1	$1^3 = 1$
2	$2^3 = 8$
3	$3^3 = 27$
4	$4^3 = 64$
5	$5^3 =$ _____
6	$6^3 =$ _____
7	$7^3 =$ _____
8	$8^3 =$ _____
9	$9^3 =$ _____
10	$10^3 =$ _____

729, 1000, 1728 సంఖ్యలు కూడా పరిపూర్ణ ఘనములు

పూర్తి చేయండి

1 నుండి 1000 వరకు కేవలం 10 పరి పూర్ణ ఘనములు ఉన్నాయి (సరిచూడండి). 1 నుండి 100 వరకు ఎన్ని పరి పూర్ణ ఘనములుంటాయి?

సరి సంఖ్యల ఘనములను పరిశీలించండి. అవి అన్నియు కూడా సరి సంఖ్యలేనా? బేసి సంఖ్యల ఘనములను గురించి మీరు ఏమి చెప్పగలరు?
క్రింది పట్టికలో 11 నుండి 20 వరకు గల సంఖ్యల ఘనములున్నాయి.

పట్టిక – 2

సంఖ్య	ఘనము
11	1331
12	1728
13	2197
14	2744
15	3375
16	4096
17	4913
18	5832
19	6859
20	8000

మేము సరి సంఖ్యలం మా ఘనములు కూడ మాలాగనే సరిసంఖ్యలు

మేము బేసి సంఖ్యలం మా ఘనములు కూడా మాలాగనే బేసిసంఖ్యలు

Consider a few numbers having 1 as the one's digit (or unit's). Find the cube of each of them. What can you say about the one's digit of the cube of a number having 1 as the one's digit?

Similarly, explore the one's digit of cubes of numbers ending in 2, 3, 4, ... , etc.

TRY THESE

Find the one's digit of the cube of each of the following numbers.

(i) 3331 (ii) 8888 (iii) 149 (iv) 1005

(v) 1024 (vi) 77 (vii) 5022 (viii) 53

7.2.1 Some interesting patterns

1. Adding consecutive odd numbers

Observe the following pattern of sums of odd numbers.

$$1 = 1 = 1^3$$
$$3 + 5 = 8 = 2^3$$
$$7 + 9 + 11 = 27 = 3^3$$
$$13 + 15 + 17 + 19 = 64 = 4^3$$
$$21 + 23 + 25 + 27 + 29 = 125 = 5^3$$

Is it not interesting? How many consecutive odd numbers will be needed to obtain the sum as 10^3?

TRY THESE

Express the following numbers as the sum of odd numbers using the above pattern?

(a) 6^3 (b) 8^3 (c) 7^3

Consider the following pattern.

$$2^3 - 1^3 = 1 + 2 \times 1 \times 3$$
$$3^3 - 2^3 = 1 + 3 \times 2 \times 3$$
$$4^3 - 3^3 = 1 + 4 \times 3 \times 3$$

Using the above pattern, find the value of the following.

(i) $7^3 - 6^3$ (ii) $12^3 - 11^3$ (iii) $20^3 - 19^3$ (iv) $51^3 - 50^3$

2. Cubes and their prime factors

Consider the following prime factorisation of the numbers and their cubes.

Prime factorisation of a number	Prime factorisation of its cube
$4 = 2 \times 2$	$4^3 = 64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^3 \times 2^3$
$6 = 2 \times 3$	$6^3 = 216 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 3^3$
$15 = 3 \times 5$	$15^3 = 3375 = 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5 = 3^3 \times 5^3$
$12 = 2 \times 2 \times 3$	$12^3 = 1728 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 2^3 \times 3^3$

each prime factor appears three times in its cubes

ఒకట్ల స్థానములో 1 కలిగి ఉన్న సంఖ్యలను పరిశీలించండి. వాటి ఘనములను కనుగొనండి. ఒకట్ల స్థానములో '1' కలిగి ఉన్న సంఖ్యల ఘనములలో గల ఒకట్ల స్థానము గురించి మీరు ఏమి చెప్పగలరు?

అదే విధంగా, ఒకట్ల స్థానములో 2,3,4..... మొదలగు వాటిని కలిగియున్న సంఖ్యల ఘనములలో గల ఒకట్ల స్థానము గురించి అన్వేషించండి.

ప్రయత్నించండి

ఈ క్రింది ప్రతి సంఖ్య యొక్క ఘనములోని ఒకట్ల స్థానంలో ఉండు అంకెను కనుగొనండి.

(i) 3331	(ii) 8888	(iii) 149	(iv) 1005
(v) 1024	(vi) 77	(vii) 5022	(viii) 53

7.2.1 కొన్ని ఆసక్తికరమైన అమరికలు

1. వరుస బేసి సంఖ్యలను సంకలనం చేయడం

క్రింది వరుస బేసి సంఖ్యల మొత్తముల అమరికను గమనించండి.

$$1 = 1 = 1^3$$
$$3 + 5 = 8 = 2^3$$
$$7 + 9 + 11 = 27 = 3^3$$
$$13 + 15 + 17 + 19 = 64 = 4^3$$
$$21 + 23 + 25 + 27 + 29 = 125 = 5^3$$

ఇది ఆసక్తికరంగా లేదా? ఎన్ని వరుస బేసి సంఖ్యల మొత్తం 10^3 అవుతుంది?

ప్రయత్నించండి

పైన అమరికను ఉపయోగించి, క్రింది సంఖ్యలను బేసి సంఖ్యల మొత్తంగా వ్రాయుము.

(a) 6^3 (b) 8^3 (c) 7^3

క్రింది అమరికను గమనించండి.

$$2^3 - 1^3 = 1 + 2 \times 1 \times 3$$
$$3^3 - 2^3 = 1 + 3 \times 2 \times 3$$
$$4^3 - 3^3 = 1 + 4 \times 3 \times 3$$

పై అమరికను ఉపయోగించి, క్రింది వాటి విలువలు కనుగొనండి.

(i) $7^3 - 6^3$ (ii) $12^3 - 11^3$ (iii) $20^3 - 19^3$ (iv) $51^3 - 50^3$

2. ఘనములు మరియు వాటి ప్రధాన కారణాంకాలు

క్రింది సంఖ్యల మరియు వాటి ఘనముల ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధంను గమనించండి.

సంఖ్యల ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధం	వాటి ఘనముల ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధం
$4 = 2 \times 2$	$4^3 = 64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^3 \times 2^3$
$6 = 2 \times 3$	$6^3 = 216 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 3^3$
$15 = 3 \times 5$	$15^3 = 3375 = 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5 = 3^3 \times 5^3$
$12 = 2 \times 2 \times 3$	$12^3 = 1728 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 2^3 \times 3^3$

ప్రతి ప్రధాన కారణాంకం దాని ఘనములో 3 సార్లు వచ్చింది.

2	216
2	108
2	54
3	27
3	9
3	3
	1

Observe that each prime factor of a number appears three times in the prime factorisation of its cube.

Do you remember that $a^m \times b^m = (a \times b)^m$

In the prime factorisation of any number, if each factor appears three times, then, is the number a perfect cube? Think about it. Is 216 a perfect cube?

By prime factorisation, $216 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$

Each factor appears 3 times. $216 = 2^3 \times 3^3 = (2 \times 3)^3$

$= 6^3$ which is a perfect cube!

Is 729 a perfect cube? $729 = \underline{3 \times 3 \times 3} \times \underline{3 \times 3 \times 3}$

factors can be grouped in triples

Yes, 729 is a perfect cube.

Now let us check for 500.

Prime factorisation of 500 is $2 \times 2 \times \underline{5 \times 5 \times 5}$.

So, 500 is not a perfect cube.

There are three 5's in the product but only two 2's.

Example 1: Is 243 a perfect cube?

Solution: $243 = \underline{3 \times 3 \times 3} \times 3 \times 3$

In the above factorisation 3×3 remains after grouping the 3's in triplets. Therefore, 243 is not a perfect cube.

TRY THESE

Which of the following are perfect cubes?

1. 400
2. 3375
3. 8000
4. 15625
5. 9000
6. 6859
7. 2025
8. 10648

7.2.2 Smallest multiple that is a perfect cube

Raj made a cuboid of plasticine. Length, breadth and height of the cuboid are 15 cm, 30 cm, 15 cm respectively.

Anu asks how many such cuboids will she need to make a perfect cube? Can you tell?

Raj said, Volume of cuboid is $15 \times 30 \times 15 = 3 \times 5 \times 2 \times 3 \times 5 \times 3 \times 5$

$= 2 \times \underline{3 \times 3 \times 3} \times \underline{5 \times 5 \times 5}$

Since there is only one 2 in the prime factorisation. So we need 2×2, i.e., 4 to make it a perfect cube. Therefore, we need 4 such cuboids to make a cube.

Example 2: Is 392 a perfect cube? If not, find the smallest natural number by which 392 must be multiplied so that the product is a perfect cube.

Solution: $392 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times 7 \times 7$

The prime factor 7 does not appear in a group of three. Therefore, 392 is not a perfect cube. To make its a cube, we need one more 7. In that case

$392 \times 7 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{7 \times 7 \times 7} = 2744$ which is a perfect cube.

2	216
2	108
2	54
3	27
3	9
3	3
	1

ఏదైనా ఒక సంఖ్య యొక్క ప్రతి ప్రధాన కారణాంకము దాని ఘనము ప్రధాన కారణాంకాల యొక్క లబ్ధంలో 3 సార్లు వస్తుందని గమనించండి.

> మీకు జ్ఞాపకం ఉందా
> $a^m \times b^m = (a \times b)^m$

ఏదైన సంఖ్య యొక్క ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధంలో, ప్రతి కారణాంకము 3 సార్లు ఉన్నచో, ఆ సంఖ్య పరిపూర్ణ ఘనము అవుతుందా? దీని గురించి ఆలోచించండి. 216 ఒక పరిపూర్ణ ఘనము అగునా?

ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధంగా వ్రాయగా $216 = 2\times2\times2\times3\times3\times3$

ప్రతి కారణాంకము 3 సార్లు వచ్చింది. $216 = 2^3 \times 3^3 = (2\times3)^3$

$= 6^3$ ఇది పరిపూర్ణ ఘనం!

> కారణాంకాలను మూడేసి సంఖ్యల సమూహాలుగా రాయవచ్చు

729 ఒక పరిపూర్ణ ఘనమా? $729 = \underline{3 \times 3 \times 3} \times \underline{3 \times 3 \times 3}$

అవును, 729 ఒక పరిపూర్ణ ఘనమే.

ఇప్పుడు 500 ను పరీక్షిద్దాం.

500 యొక్క ప్రధాన కారణాంకాల లబ్దం $= 2 \times 2 \times \underline{5 \times 5 \times 5}$.

కనుక, 500 పరిపూర్ణ ఘన సంఖ్య కాదు.

> లబ్ధంలో 5- మూడు సార్లు వచ్చింది. అయితే 2 కేవలం రెండు సార్లు మాత్రమే వచ్చింది.

ఉదాహరణ 1: 243 పరిపూర్ణ ఘనమా?

సాధన : $243 = \underline{3 \times 3 \times 3} \times 3 \times 3$

పై ప్రధాన కారణాంక విభజనలో 3 ను త్రికములుగా వ్రాసిన తరువాత 3×3 మిగిలినది. అందువలన 243 పరిపూర్ణ ఘనం కాదు.

ప్రయత్నించండి

క్రింది వాటిలో ఏవి పరిపూర్ణ ఘనములు?

1. 400
2. 3375
3. 8000
4. 15625
5. 9000
6. 6859
7. 2025
8. 10648

7.2.2 పరిపూర్ణ ఘనము కావడానికి గుణించవలసిన కనిష్ఠ సంఖ్య

రాజ్ ప్లాస్టిసిన్‌తో ఒక దీర్ఘ ఘనము తయారు చేశాడు. దాని పొడవు, వెడల్పు, ఎత్తులు వరుసగా 15సెం.మీ. 30 సెం.మీ, 15 సెం.మీ.

పరిపూర్ణ ఘనం తయారు చేయడానికి ఇటువంటి దీర్ఘఘనమలు ఎన్ని కావాలో మీరు చెప్పగలరా? అని అను అడిగింది. దానికి రాజ్, దీర్ఘఘనం ఘనపరిమాణం $= 15\times30\times15 = 3\times5\times2\times3\times5\times3\times5$

$= 2\times\underline{3\times3\times3}\times\underline{5\times5\times5}$

ఈ ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధంలో '2' కేవలం ఒకసారి మాత్రమే ఉంది. కావున ఇచ్చిన సంఖ్య పరిపూర్ణ ఘనము కావాడానికి $2\times2=4$ తో గుణించాలి. అందువలన పరిపూర్ణ ఘనము చేయడానికి ఇలాంటి 4 దీర్ఘ ఘనములు అవసరం అని చెప్పాడు.

ఉదాహరణ 2: 392 పరిపూర్ణ ఘనమా? కానిచో, ఏ కనిష్ఠ సహజ సంఖ్యతో 392 ను గుణించిన వచ్చు లబ్దము పరిపూర్ణ ఘనమగునో కనుక్కోండి.

సాధన: $392 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times 7 \times 7$

ఇందులో ప్రధాన కారణాంకం 7 మూడు సార్లు లేదు. కావున, 392 పరిపూర్ణ ఘనము కాదు.

దీనిని పూర్ణ ఘనము చేయడానికి, ఇంకా ఒక 7 కావాలి.

$392 \times 7 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{7 \times 7 \times 7} = 2744$ ఇది ఒక పరిపూర్ణ ఘనము.

Hence the smallest natural number by which 392 should be multiplied to make a perfect cube is 7.

Example 3: Is 53240 a perfect cube? If not, then by which smallest natural number should 53240 be divided so that the quotient is a perfect cube?

Solution: $53240 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{11 \times 11 \times 11} \times 5$

The prime factor 5 does not appear in a group of three. So, 53240 is not a perfect cube. In the factorisation 5 appears only one time. If we divide the number by 5, then the prime factorisation of the quotient will not contain 5.

So, $53240 \div 5 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{11 \times 11 \times 11}$

Hence the smallest number by which 53240 should be divided to make it a perfect cube is 5.

The perfect cube in that case is = 10648.

Example 4: Is 1188 a perfect cube? If not, by which smallest natural number should 1188 be divided so that the quotient is a perfect cube?

Solution: $1188 = 2 \times 2 \times \underline{3 \times 3 \times 3} \times 11$

The primes 2 and 11 do not appear in groups of three. So, 1188 is not a perfect cube. In the factorisation of 1188 the prime 2 appears only two times and the prime 11 appears once. So, if we divide 1188 by $2 \times 2 \times 11 = 44$, then the prime factorisation of the quotient will not contain 2 and 11.

Hence the smallest natural number by which 1188 should be divided to make it a perfect cube is 44.

And the resulting perfect cube is $1188 \div 44 = 27\ (=3^3)$.

Example 5: Is 68600 a perfect cube? If not, find the smallest number by which 68600 must be multiplied to get a perfect cube.

Solution: We have, $68600 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 7$. In this factorisation, we find that there is no triplet of 5.

So, 68600 is not a perfect cube. To make it a perfect cube we multiply it by 5.

Thus, $68600 \times 5 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 7$

$= 343000$, which is a perfect cube.

Observe that 343 is a perfect cube. From Example 5 we know that 343000 is also perfect cube.

THINK, DISCUSS AND WRITE

Check which of the following are perfect cubes. (i) 2700 (ii) 16000 (iii) 64000 (iv) 900 (v) 125000 (vi) 36000 (vii) 21600 (viii) 10000 (ix) 27000000 (x) 1000. What pattern do you observe in these perfect cubes?

కనుక 392 పరిపూర్ణ ఘనము అగుటకు గుణించవలసిన కనిష్ఠ సహజ సంఖ్య 7.

ఉదాహరణ3: 53240 పరిపూర్ణ ఘనమా? కానిచో, ఏ కనిష్ఠ సహజ సంఖ్యచే 53240 ను భాగించిన భాగఫలం పరిపూర్ణ ఘనం అవుతుంది?

సాధన: $53240 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{11 \times 11 \times 11} \times 5$

దీనిలో ప్రధాన కారణాంకము '5' మూడు సార్లు లేదు. కనుక 53240 పరిపూర్ణ ఘనము కాదు. ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధంలో '5' ఒకసారి మాత్రమే ఉంది. కావున ఇచ్చిన సంఖ్యను '5' చే భాగించినచో భాగఫలపు ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధంలో 5 ఉండదు.

కనుక, $53240 \div 5 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{11 \times 11 \times 11}$

53240 పరిపూర్ణ ఘనము అగుటకు భాగించవలసిన కనిష్ఠ సంఖ్య 5.

ఈ సందర్భములో పరిపూర్ణ ఘనము = 10648.

ఉదాహరణ 4: 1188 పరిపూర్ణ ఘనమా? కానిచో, ఏ కనిష్ఠ సహజ సంఖ్యచే 1188 ను భాగించినచో భాగఫలం పరిపూర్ణ ఘనమగును?

సాధన: $1188 = 2 \times 2 \times \underline{3 \times 3 \times 3} \times 11$

ప్రధాన కారణాంకాలు 2 మరియు 11లు మూడు సార్లు లేవు. కనుక, 1188 పరిపూర్ణ ఘనము కాదు. 1188 యొక్క ప్రధాన కారణాంకములలో 2 రెండు సార్లు మరియు 11 కేవలం ఒకసారి మాత్రమే ఉంది. కనుక, మనం ఇచ్చిన సంఖ్యను $2 \times 2 \times 11 = 44$ చే భాగించినచో భాగఫలపు ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధంలో 2 మరియు 11 ఉండవు.

అందువలన 1188 పరిపూర్ణ ఘనము అగుటకు భాగించవలసిన కనిష్ఠ సహజ సంఖ్య 44 మరియు ఫలిత పరిపూర్ణ ఘనము = $1188 \div 44 = 27$ ($=3^3$).

ఉదాహరణ 5: 68600 పరిపూర్ణ ఘనమేనా? కానిచో, ఏ కనిష్ఠ సహజ సంఖ్యచే గుణించిన 68600 పరిపూర్ణ ఘనమగునో కనుక్కోండి.

సాధన: $68600 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 7$ ప్రధాన కారణాంకము 5 మూడు సార్లు లేదు.

కనుక, 68600 పరిపూర్ణ ఘనము కాదు. దీనిని పరిపూర్ణ ఘనం చేయడానికి 5 చే గుణించాలి.

అందువలన, $68600 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 7$.

$= 343000$, ఇది పరిపూర్ణ ఘనము.

343 ఒక పరిపూర్ణ ఘనం అని గమనించాము. ఉదాహరణ 5 నుండి 343000 కూడా పరిపూర్ణ ఘనం అని మనము తెలుసుకున్నాం.

ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి

క్రింది సంఖ్యలు పరిపూర్ణ ఘనములో కాదో పరీక్షించండి. (i) 2700 (ii) 16000 (iii) 64000 (iv) 900 (v) 125000 (vi) 36000 (vii) 21600 (viii) 10000 (ix) 27000000 (x) 1000.

ఈ పరిపూర్ణ ఘనములో ఏవిధమైన అమరికను మీరు గమనించారు?

EXERCISE 7.1

1. Which of the following numbers are not perfect cubes?
   (i) 216 (ii) 128 (iii) 1000 (iv) 100
   (v) 46656
2. Find the smallest number by which each of the following numbers must be multiplied to obtain a perfect cube.
   (i) 243 (ii) 256 (iii) 72 (iv) 675
   (v) 100
3. Find the smallest number by which each of the following numbers must be divided to obtain a perfect cube.
   (i) 81 (ii) 128 (iii) 135 (iv) 192
   (v) 704
4. Parikshit makes a cuboid of plasticine of sides 5 cm, 2 cm, 5 cm. How many such cuboids will he need to form a cube?

7.3 Cube Roots

If the volume of a cube is 125 cm^3, what would be the length of its side? To get the length of the side of the cube, we need to know a number whose cube is 125.

Finding the square root, as you know, is the inverse operation of squaring. Similarly, finding the cube root is the inverse operation of finding cube.

We know that $2^3 = 8$; so we say that the cube root of 8 is 2.

We write $\sqrt[3]{8} = 2$. **The symbol $\sqrt[3]{\ }$ denotes 'cube-root.'**

Consider the following:

Statement	Inference
$1^3 = 1$	$\sqrt[3]{1} = 1$
$2^3 = 8$	$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$
$3^3 = 27$	$\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$
$4^3 = 64$	$\sqrt[3]{64} = 4$
$5^3 = 125$	$\sqrt[3]{125} = 5$

Statement	Inference
$6^3 = 216$	$\sqrt[3]{216} = 6$
$7^3 = 343$	$\sqrt[3]{343} = 7$
$8^3 = 512$	$\sqrt[3]{512} = 8$
$9^3 = 729$	$\sqrt[3]{729} = 9$
$10^3 = 1000$	$\sqrt[3]{1000} = 10$

7.3.1 Cube root through prime factorisation method

Consider 3375. We find its cube root by prime factorisation:

$$3375 = \underline{3 \times 3 \times 3} \times \underline{5 \times 5 \times 5} = 3^3 \times 5^3 = (3 \times 5)^3$$

Therefore, cube root of 3375 = $\sqrt[3]{3375} = 3 \times 5 = 15$

Similarly, to find $\sqrt[3]{74088}$, we have,

అభ్యాసం 7.1

1. క్రింది సంఖ్యలలో ఏవి పరిపూర్ణ ఘనములు కావు?
   (i) 216 (ii) 128 (iii) 1000 (iv) 100
   (v) 46656
2. ఏ కనిష్ట సంఖ్యచే గుణించిన ఈ క్రింది సంఖ్యలు పరిపూర్ణ ఘన సంఖ్యలు అగునో కనుగొనండి?
   (i) 243 (ii) 256 (iii) 72 (iv) 675
   (v) 100
3. ఏ కనిష్ట సంఖ్యచే భాగించిన ఈ క్రింది సంఖ్యలు పరిపూర్ణ ఘనములగునో కనుగొనండి?
   (i) 81 (ii) 128 (iii) 135 (iv) 192
   (v) 704
4. పరీక్షిత్ ప్లాస్టిసిన్‌తో 5 సెం.మీ, 2 సెం.మీ మరియు 5 సెం.మీ కొలతలు గల ఒక దీర్ఘ ఘనాన్ని తయారు చేశాడు. ఒక ఘనం చేయడానికి అతనికి అలాంటి దీర్ఘ ఘనములు ఎన్ని కావలెను?

7.3 ఘనమూలములు

ఒక ఘనం ఘనపరిమాణం 125 ఘ.సెం.మీ. అయిన ఆ ఘనం భుజం కొలత ఎంత ఉండవచ్చు? ఘనం భుజం కొలత పొందవలెనన్న 125 ఏ సంఖ్య యొక్క ఘనమో తెలుసుకోవలసిన అవసరం ఉంది.

వర్గమూలం కనుగొనడం వర్గమునకు విలోమ ప్రక్రియ అని మనకు తెలుసు. అదే విధంగా, ఘనమూలం కనుగొనడం ఘనమును కనుగొను ప్రక్రియకు విలోమము.

$2^3 = 8$ అని మనకు తెలుసు. కనుక 8 యొక్క ఘనమూలం 2.

$\sqrt[3]{8} = 2$ అని రాస్తాము. $\sqrt[3]{\ }$ **గుర్తు 'ఘనమూలాన్ని' సూచిస్తుంది.**

క్రింది వాటిని గమనించండి:

ప్రవచనము	ప్రతిపాదన	ప్రవచనము	ప్రతిపాదన
$1^3 = 1$	$\sqrt[3]{1} = 1$	$6^3 = 216$	$\sqrt[3]{216} = 6$
$2^3 = 8$	$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$	$7^3 = 343$	$\sqrt[3]{343} = 7$
$3^3 = 27$	$\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$	$8^3 = 512$	$\sqrt[3]{512} = 8$
$4^3 = 64$	$\sqrt[3]{64} = 4$	$9^3 = 729$	$\sqrt[3]{729} = 9$
$5^3 = 125$	$\sqrt[3]{125} = 5$	$10^3 = 1000$	$\sqrt[3]{1000} = 10$

7.3.1 ప్రధాన కారణాంక పద్ధతిలో ఘనమూలం కనుగొనుట

3375 యొక్క ఘనమూలాన్ని ప్రధాన కారణాంక పద్ధతిన కనుగొందాం:

$$3375 = \underline{3 \times 3 \times 3} \times \underline{5 \times 5 \times 5} = 3^3 \times 5^3 = (3 \times 5)^3$$

కనుక, 3375 ఘనమూలం $= \sqrt[3]{3375} = 3 \times 5 = 15$

అదే విధంగా, $\sqrt[3]{74088}$ ను కనుగొందాం.

$$74088 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{3 \times 3 \times 3} \times \underline{7 \times 7 \times 7} = 2^3 \times 3^3 \times 7^3 = (2 \times 3 \times 7)^3$$

Therefore, $\sqrt[3]{74088} = 2 \times 3 \times 7 = 42$

Example 6: Find the cube root of 8000.

Solution: Prime factorisation of 8000 is $\underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{5 \times 5 \times 5}$

So, $\sqrt[3]{8000} = 2 \times 2 \times 5 = 20$

Example 7: Find the cube root of 13824 by prime factorisation method.

Solution:

$$13824 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{3 \times 3 \times 3} = 2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 3^3.$$

Therefore, $\sqrt[3]{13824} = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$

THINK, DISCUSS AND WRITE

State true or false: for any integer m, $m^2 < m^3$. Why?

7.3.2 Cube root of a cube number

If you know that the given number is a cube number then following method can be used.

Step 1 Take any cube number say 857375 and start making groups of three digits starting from the right most digit of the number.

857	375
↓	↓
second group	first group

We can estimate the cube root of a given cube number through a step by step process.

We get 375 and 857 as two groups of three digits each.

Step 2 First group, i.e., 375 will give you the one's (or unit's) digit of the required cube root.

The number 375 ends with 5. We know that 5 comes at the unit's place of a number only when it's cube root ends in 5.

So, we get 5 at the unit's place of the cube root.

Step 3 Now take another group, i.e., 857.

We know that $9^3 = 729$ and $10^3 = 1000$. Also, $729 < 857 < 1000$. We take the one's place, of the smaller number 729 as the ten's place of the required cube root. So, we get $\sqrt[3]{857375} = 95$.

Example 8: Find the cube root of 17576 through estimation.

Solution: The given number is 17576.

Step 1 Form groups of three starting from the rightmost digit of 17576.

$$74088 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{3 \times 3 \times 3} \times \underline{7 \times 7 \times 7} = 2^3 \times 3^3 \times 7^3 = (2 \times 3 \times 7)^3$$

అందువలన, $\sqrt[3]{74088} = 2 \times 3 \times 7 = 42$

ఉదాహరణ 6: 8000 యొక్క ఘనమూలాన్ని కనుగొనుము?

సాధన: 8000 యొక్క ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధం= $\underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{5 \times 5 \times 5}$

కావున, $\sqrt[3]{8000} = 2 \times 2 \times 5 = 20$

ఉదాహరణ 7: 13824 యొక్క ఘనమూలాన్ని ప్రధాన కారణాంక పద్ధతిన కనుగొనుము?

సాధన:

$$13824 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{3 \times 3 \times 3} = 2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 3^3.$$

అందువలన, $\sqrt[3]{13824} = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$

ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి

m ఏదైనా ఒక పూర్ణ సంఖ్య అయినచో $m^2 < m^3$ అగును. ఇది సత్యమా లేదా అసత్యమా తెల్పండి. ఎందుకు?

7.3.2 ఘన సంఖ్యల ఘనమూలం

ఇచ్చిన సంఖ్య పరిపూర్ణ ఘన సంఖ్య అని మీకు తెలిసినచో, దాని ఘనమూలాన్ని అంచనా వేయుటలో దిగువ విధానాన్ని ఉపయోగించవచ్చు.

సోపానం 1 ఏదైన ఒక ఘన సంఖ్య 857375 ను తీసుకుందాం. దీని అంకెలను కుడి వైపు నుండి (అనగా ఒకట్ల స్థానము నుండి) ప్రారంభించి మూడు అంకెలు ఉండునట్లు సమూహములుగా విభజించాలి.

857	375
↓	↓
రెండవ సమూహము	మొదటి సమూహము

ఇచ్చిన ఘన సంఖ్య యొక్క ఘనమూలాన్ని వివిధ సోపాన ప్రక్రియల ద్వారా మనము అంచనా వేయవచ్చు.

ప్రతి దానిలో మూడు అంకెలు గల రెండు సమూహాలు 375 మరియు 857లను మనం పొంది ఉన్నాము.

సోపానం 2 మొదటి సమూహం 375 నుండి మనకు కావలసిన ఘనమూలము యొక్క ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె లభిస్తుంది. 375 లోని చివరి అంకె 5. ఒక సంఖ్య యొక్క ఒకట్ల స్థానంలో 5 ఉన్నచో, ఆ సంఖ్య యొక్క ఘనమూలం ఒకట్ల స్థానములో కూడా 5 ఉంటుందని మనకు తెలుసు.

కనుక, ఇచ్చిన సంఖ్య యొక్క ఘనమూలంలోని ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె 5.

సోపానం 3 ఇప్పుడు రెండవ సమూహము 857 ను తీసుకుందాం.

$9^3 = 729$ మరియు $10^3 = 1000$ అని మనకు తెలుసు. ఇంకా $729 < 857 < 1000$. కనిష్ట సంఖ్య 729 లోని ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె, కావలసిన ఘనమూలంలో పదుల స్థానంగా తీసుకుంటాము. $\sqrt[3]{857375} = 95$. (ఈ పద్ధతి కొన్ని సందర్భాలలో మాత్రమే సరైనది).

ఉదాహరణ 8: 17576 యొక్క ఘనమూలాన్ని అంచనా విధానం ద్వారా కనుగొనుము.

సాధన: ఇచ్చిన సంఖ్య 17576

సోపానం 1 ఇచ్చిన సంఖ్య 17576 లో ఒకట్ల స్థానముతో మొదలు పెట్టి మూడు అంకెలు

17 576. In this case one group i.e., 576 has three digits whereas 17 has only two digits.

Step 2 Take 576.

The digit 6 is at its one's place.

We take the one's place of the required cube root as 6.

Step 3 Take the other group, i.e., 17.
Cube of 2 is 8 and cube of 3 is 27. 17 lies between 8 and 27.
The smaller number among 2 and 3 is 2.

The one's place of 2 is 2 itself. Take 2 as ten's place of the cube root of 17576.

Thus, $\sqrt[3]{17576} = 26$ (Check it!)

EXERCISE 7.2

1. Find the cube root of each of the following numbers by prime factorisation method.

   (i) 64 (ii) 512 (iii) 10648 (iv) 27000
   (v) 15625 (vi) 13824 (vii) 110592 (viii) 46656
   (ix) 175616 (x) 91125

2. State true or false.
   (i) Cube of any odd number is even.
   (ii) A perfect cube does not end with two zeros.
   (iii) If square of a number ends with 5, then its cube ends with 25.
   (iv) There is no perfect cube which ends with 8.
   (v) The cube of a two digit number may be a three digit number.
   (vi) The cube of a two digit number may have seven or more digits.
   (vii) The cube of a single digit number may be a single digit number.

3. You are told that 1,331 is a perfect cube. Can you guess without factorisation what is its cube root? Similarly, guess the cube roots of 4913, 12167, 32768.

WHAT HAVE WE DISCUSSED?

1. Numbers like 1729, 4104, 13832, are known as Hardy – Ramanujan Numbers. They can be expressed as sum of two cubes in two different ways.

2. Numbers obtained when a number is multiplied by itself three times are known as **cube numbers**. For example 1, 8, 27, ... etc.

3. If in the prime factorisation of any number each factor appears three times, then the number is a perfect cube.

4. The symbol $\sqrt[3]{\ }$ denotes cube root. For example $\sqrt[3]{27} = 3$.

ఉండునట్లు సమూహాలుగా విభజించుము.

17 576. ఈ సందర్భములో మొదటి సమూహము 576లో మూడు అంకెలు ఉన్నాయి. కానీ రెండవ సమూహము 17 లో రెండు అంకెలు మాత్రమే ఉన్నాయి.

సోపానం 2 576 ను తీసుకొనుము.

ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె 6.

ఘనమూలం ఒకట్ల స్థానంలోని అంకెను 6 గా తీసుకుంటాం.

సోపానం 3 రెండవ సమూహము 17 ను తీసుకొనుము.

2 యొక్క ఘనం 8 మరియు 3 యొక్క ఘనం 27. 8 మరియు 27 మధ్యలో 17 ఉండును.

2 మరియు 3 లలో కనిష్ఠ సంఖ్య 2.

2 యొక్క ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె కూడా 2, కావున 17526 ఘనమూలం యొక్క పదుల స్థానంలో 2 ను తీసుకుంటాం.

ఆవిధంగా, $\sqrt[3]{17576} = 26$ (సరిచూడండి!)

అభ్యాసం 7.2

1. ప్రధాన కారణాంక పద్ధతి ద్వారా దిగువ సంఖ్యల ఘన మూలాలను కనుగొనండి.

   (i) 64 (ii) 512 (iii) 10648 (iv) 27000

   (v) 15625 (vi) 13824 (vii) 110592 (viii) 46656

   (ix) 175616 (x) 91125

2. సత్యమో అసత్యమో తెల్పండి.

   (i) బేసి సంఖ్య యొక్క ఘనము సరి సంఖ్య

   (ii) ఒక పరిపూర్ణ ఘనం చివరి రెండు సున్నాలతో అంతము కాదు.

   (iii) ఒక సంఖ్య యొక్క వర్గము 5తో అంతం అయినచో దాని ఘనము 25 తో అంతం అవుతుంది.

   (iv) 8తో అంతం అగు పరిపూర్ణ ఘన సంఖ్య లేదు.

   (v) రెండంకెల సంఖ్య ఘనము మూడు అంకెల సంఖ్య అవ్వవచ్చు.

   (vi) రెండంకెల సంఖ్య ఘనములో 7 లేదా అంతకంటే ఎక్కువ అంకెలు ఉండవచ్చు.

   (vii) ఒక ఒక అంకె సంఖ్య యొక్క ఘనం కూడా ఒక అంకె సంఖ్య అవ్వవచ్చు.

3. 1331 ఒక పరిపూర్ణ ఘనం అని మీరు తెలిపారు. ప్రధాన కారణాంక విభజన చేయకుండా దాని ఘనమూలమును ఊహించగలరా? అదే విధంగా 4913, 12167, 32768 ల ఘనమూలములను ఊహించండి.

మనం ఏమి చర్చించుకున్నాం?

1. 1729, 4104, 13832 సంఖ్యలను హార్డీ – రామానుజన్ సంఖ్యలని అంటాము, వాటిని రెండు సంఖ్యల ఘనముల మొత్తంగా రెండు విధానాలలో వ్యక్తపరచవచ్చు.

2. ఒక సంఖ్యను దానితోనే మూడుసార్లు గుణించగా వచ్చు సంఖ్యలను **ఘన సంఖ్యలు** అంటారు. ఉదాహరణకు 1,8,27, ... మొదలగునవి.

3. ఏదైనా సంఖ్య ప్రధాన కారణాంక విభజనలో ప్రతి కారణాంకం మూడు సార్లు వచ్చినచో, ఆ సంఖ్య ఒక పరిపూర్ణ ఘనము అవుతుంది.

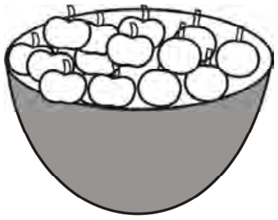
4. $\sqrt[3]{\ }$ గుర్తు ఘనమూలమును సూచిస్తుంది. ఉదాహరణకు $\sqrt[3]{27} = 3$.

Comparing Quantities

CHAPTER 8

0852CH08

8.1 Recalling Ratios and Percentages



We know, ratio means comparing two quantities.

A basket has two types of fruits, say, 20 apples and 5 oranges.

Then, the ratio of the number of oranges to the number of apples = 5 : 20.

The comparison can be done by using fractions as, $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$

The number of oranges is $\frac{1}{4}$th the number of apples. In terms of ratio, this is 1 : 4, read as, "1 is to 4"

OR

Number of apples to number of oranges = $\frac{20}{5} = \frac{4}{1}$ which means, the number of apples is 4 times the number of oranges. This comparison can also be done using percentages.

There are 5 oranges out of 25 fruits. So percentage of oranges is $\frac{5}{25} \times \frac{4}{4} = \frac{20}{100} = 20\%$ [Denominator made 100].	OR	By unitary method: Out of 25 fruits, number of oranges are 5. So out of 100 fruits, number of oranges $= \frac{5}{25} \times 100 = 20$.

Since contains only apples and oranges,

So, percentage of apples + percentage of oranges = 100

or percentage of apples + 20 = 100

or percentage of apples = 100 – 20 = 80

Thus the basket has 20% oranges and 80% apples.

Example 1: A picnic is being planned in a school for Class VII. Girls are 60% of the total number of students and are 18 in number.

The picnic site is 55 km from the school and the transport company is charging at the rate of ` 12 per km. The total cost of refreshments will be ` 4280.

పరిమాణాలను పోల్చుట

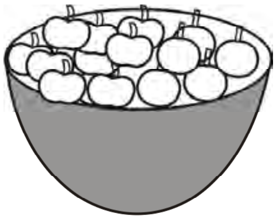
అధ్యాయం

8

H5I2L5

8.1 నిష్పత్తి-శాతముల పునఃశ్చరణ

నిష్పత్తి అనగా రెండు రాశుల పోలిక అని మనకు తెలుసు.
ఒక బుట్టలో రెండు రకాల పండ్లు ఉన్నాయి. అందులో ఆపిల్స్ 20, నారింజలు 5.
నారింజల సంఖ్యకు, ఆపిల్స్ సంఖ్యకు గల నిష్పత్తి = 5 : 20.



ఈ పోలికను భిన్న రూపంలో $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$ గా రాయవచ్చును.

నారింజల సంఖ్య, ఆపిల్స్ సంఖ్య లో $\frac{1}{4}$ ఉంటుంది. దీనిని నిష్పత్తి రూపంలో 1:4 గా రాస్తూ, 1 ఈజ్ టు 4 అని చదువుతాం.

(లేదా)

నారింజల సంఖ్యతో పోల్చినప్పుడు ఆపిల్స్ సంఖ్య= $\frac{20}{5} = \frac{4}{1}$ అనగా ఆపిల్స్ సంఖ్య నారింజల సంఖ్యకు 4 రెట్లు ఉంటుంది. ఈ పోల్చడమనేది శాతములను ఉపయోగించి కూడా చెప్పవచ్చు.

బుట్టలో గల 25 పండ్లలో నారింజలు 5 కనుక నారింజల శాతము

$$\frac{5}{25} \times \frac{4}{4} = \frac{20}{100} = 20\%$$

[హారమును 100 గా మార్చడం].

లేదా

ఏక వస్తుపద్ధతి:
25 పండ్లలో నారింజలు 5 ఉన్నవి.
కనుక 100 పండ్లలో నారింజల సంఖ్య

$$= \frac{5}{25} \times 100 = 20.$$

బుట్టలో ఆపిల్స్, నారింజలు మాత్రమే ఉన్నవి కనుక,

ఆపిల్స్ శాతము + నారింజల శాతము = 100

లేదా ఆపిల్స్ శాతము +20 = 100

లేదా ఆపిల్స్ శాతము =100 – 20 = 80

బుట్టలో 20% నారింజలు, 80% ఆపిల్స్ కలవు.

ఉదాహరణ 1: ఒక పాఠశాలలో 7వ తరగతికి విహారయాత్ర ఏర్పాటు చేయడమైనది. మొత్తం విద్యార్థులలో 60 శాతం బాలికలు మరియు వారి సంఖ్య 18.

పాఠశాల నుండి విహారయాత్రా స్థలం 55 కి.మీ. దూరంలో కలదు. విహారయాత్రా స్థలానికి ప్రయాణించుటకు రవాణా సంస్థకు కి.మీ.కు `12 చెల్లించ వలసి ఉంటుంది. అల్పాహారమునకు అగు ఖర్చుల మొత్తం `4280.

Can you tell.

1. The ratio of the number of girls to the number of boys in the class?
2. The cost per head if two teachers are also going with the class?
3. If their first stop is at a place 22 km from the school, what per cent of the total distance of 55 km is this? What per cent of the distance is left to be covered?

Solution:

1. To find the ratio of girls to boys.

   Ashima and John came up with the following answers.

   They needed to know the number of boys and also the total number of students.

Ashima did this

Let the total number of students be x. 60% of x is girls.

Therefore, 60% of x = 18

$$\frac{60}{100} \times x = 18$$

or, $x = \frac{18 \times 100}{60} = 30$

Number of students = 30.

OR

John used the unitary method

There are 60 girls out of 100 students.

There is one girl out of $\frac{100}{60}$ students.

So, 18 girls are out of how many students?

Number of students $= \frac{100}{60} \times 18$

$= 30$

So, the number of boys = 30 – 18 = 12.

Hence, ratio of the number of girls to the number of boys is 18 : 12 or $\frac{18}{12} = \frac{3}{2}$.

$\frac{3}{2}$ is written as 3 : 2 and read as 3 is to 2.

2. To find the cost per person.

   Transportation charge = Distance both ways × Rate

   = ` (55 × 2) × 12

   = ` 110 × 12 = s` 1320

   Total expenses = Refreshment charge

   + Transportation charge

   = `4280 + `1320

   = `5600

Total number of persons = 18 girls + 12 boys + 2 teachers

= 32 persons

Ashima and John then used unitary method to find the cost per head.

For 32 persons, amount spent would be `5600.

The amount spent for 1 person = ` $\frac{5600}{32}$ = ` 175.

3. The distance of the place where first stop was made = 22 km.

క్రింది వాటిని తెలుపగలరా.

1. తరగతిలోని బాలికలు మరియు బాలుర నిష్పత్తి?
2. వారితో ఇద్దరు ఉపాధ్యాయులు కూడా వెళితే ప్రతి ఒక్కరికీ అగు ఖర్చు?
3. పాఠశాల నుండి మొదటి మజిలీ(స్టాప్) 22 కి.మీ.దూరంలో ఉంటే మొత్తం దూరం 55 కి.మీ.లలో అది ఎంత శాతము? ఇంకనూ ఎంత శాతం దూరం ప్రయాణించవలసివుంది?

సాధన:

1. బాలికలు, బాలుర నిష్పత్తి కనుగొనుట

   అషీమా, జాన్ క్రింది విధంగా సమాధానాలిచ్చారు.

   వారిద్దరు బాలుర సంఖ్యను మరియు మొత్తం విద్యార్థుల సంఖ్యను కనుగొనవలసిన అవసరముంది.

అషీమా చేసిన విధానం

మొత్తం విద్యార్థుల సంఖ్య x అనుకొనుము

x లో 60% బాలికలు.

అందువలన, x లో 60% = 18

$$\frac{60}{100} \times x = 18$$

లేదా $x = \frac{18 \times 100}{60} = 30$

మొత్తం విద్యార్థుల సంఖ్య = 30.

లేదా

ఏక వస్తు పద్ధతిన జాన్ చేసిన విధానం

100 మంది విద్యార్థులలో 60 మంది బాలికలు కలరు. అంటే ప్రతి $\frac{100}{60}$ విద్యార్థులలో ఒక బాలిక ఉంటుంది. మరి ఎంత మంది విద్యార్థులలో 18 మంది బాలికలు ఉంటారు?

మొత్తం విద్యార్థుల సంఖ్య $= \frac{100}{60} \times 18 = 30$

కావున, బాలుర సంఖ్య = మొత్తం విద్యార్థుల సంఖ్య − బాలికల సంఖ్య = 30 – 18 = 12.

కనుక బాలికలు, బాలుర నిష్పత్తి 18 : 12 లేదా $\frac{18}{12} = \frac{3}{2}$.

$\frac{3}{2}$ ను 3:2 గా రాస్తూ, 3 ఈజ్ టు 2 గా చదువుతాము.

2. ప్రతి ఒక్కరికి అయ్యే ఖర్చు కనుగొనుట

రవాణా ఖర్చు = రెండు వైపులా ప్రయాణించవలసిన దూరం × 1 కి.మీ.కు అగు ఖర్చు

= `(55 × 2) × 12

= `110 × 12 = `1320

మొత్తం ఖర్చు = అల్పాహార ఖర్చు + రవాణా ఖర్చు

= `4280 + `1320

= `5600

మొత్తం మనుష్యుల సంఖ్య = 18 బాలికలు + 12 బాలురు + ఇద్దరు ఉపాధ్యాయులు

= 32 మంది.

అషీమా, జాన్ ఇద్దరూ ప్రతి ఒక్కరికీ అయ్యే ఖర్చును ఏక వస్తుపద్ధతి ద్వారానే కనుగొన్నారు.

32 మందికి అయ్యేఖర్చు `5600.

ఒక్కొక్కరికి అగు ఖర్చు $= ` \frac{5600}{32}$ = `175.

3. మొదటి మజిలీ(స్టాప్)కు గల దూరం = 22 కి.మీ.

To find the percentage of distance:

Ashima used this method:

$$\frac{22}{55} = \frac{22}{55} \times \frac{100}{100} = 40\%$$

[She is multiplying the ratio by $\frac{100}{100} = 1$ and converting to percentage.]

OR

John used the unitary method:

Out of 55 km, 22 km are travelled.

Out of 1 km, $\frac{22}{55}$ km are travelled.

Out of 100 km, $\frac{22}{55} \times 100$ km are travelled.

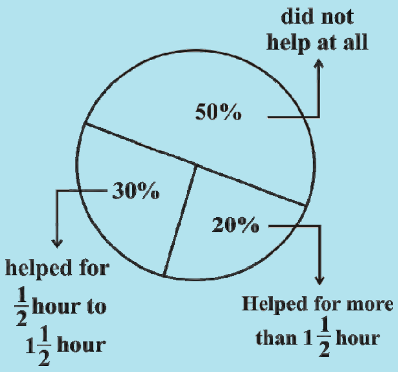
That is 40% of the total distance is travelled.

Both came out with the same answer that the distance from their school of the place where they stopped at was 40% of the total distance they had to travel.
Therefore, the percent distance left to be travelled = 100% – 40% = 60%.

TRY THESE

In a primary school, the parents were asked about the number of hours they spend per day in helping their children to do homework. There were 90 parents who helped for $\frac{1}{2}$ hour to $1\frac{1}{2}$ hours. The distribution of parents according to the time for which, they said they helped is given in the adjoining figure ; 20% helped for more than $1\frac{1}{2}$ hours per day;

30% helped for $\frac{1}{2}$ hour to $1\frac{1}{2}$ hours; 50% did not help at all.



Using this, answer the following:

(i) How many parents were surveyed?

(ii) How many said that they did not help?

(iii) How many said that they helped for more than $1\frac{1}{2}$ hours?

EXERCISE 8.1

1. Find the ratio of the following.
   (a) Speed of a cycle 15 km per hour to the speed of scooter 30 km per hour.
   (b) 5 m to 10 km
   (c) 50 paise to ₹5
2. Convert the following ratios to percentages.
   (a) 3 : 4
   (b) 2 : 3
3. 72% of 25 students are interested in mathematics. How many are not interested in mathematics?
4. A football team won 10 matches out of the total number of matches they played. If their win percentage was 40, then how many matches did they play in all?
5. If Chameli had ₹600 left after spending 75% of her money, how much did she have in the beginning?

దూరం యొక్క శాతము కనుగొనుటకు:

అషీమా చేసిన విధానము:

$$\frac{22}{55}=\frac{22}{55}\times\frac{100}{100}=40\%$$

[ఆమె నిష్పత్తి ని $\frac{100}{100}=1$ చే

గుణించి శాతంగా మార్చుకుంది.]

లేదా

జాన్ చేసిన ఏక వస్తు విధానం:

55 కి.మీ లలో 22 కి.మీ ప్రయాణం చేస్తే

1కి.మీ.కు ప్రయాణించిన దూరం $\frac{22}{55}$ కి.మీ.

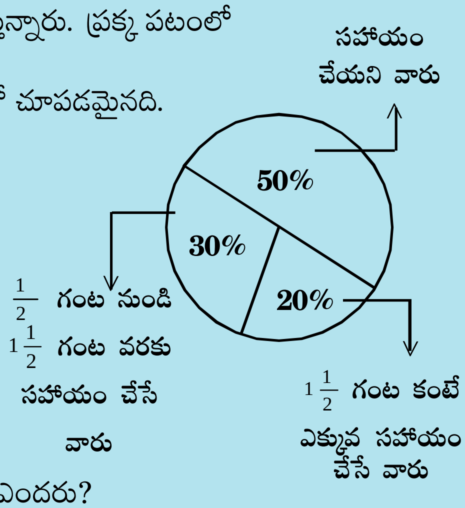
100 కి.మీ.కు ప్రయాణించిన దూరం $\frac{22}{55}\times 100$ కి.మీ.

అనగా ప్రయాణించిన దూరం 40%.

పాఠశాల నుండి మొత్తం ప్రయాణించవలసిన దూరంలో మొదటి మజిలీకి గల దూరం 40% అని ఇద్దరూ ఒకే సమాధానం చెప్పారు. కనుక, ఇంకనూ ప్రయాణించ వలసిన దూరం $= 100\% - 40\% = 60\%$.

ప్రయత్నించండి

ఒక ప్రాథమిక పాఠశాలలో విద్యార్థుల తల్లిదండ్రులు వారి పిల్లలకు రోజులో ఎన్ని గంటలు ఇంటిపని (హోం వర్క్) చేయడంలో సహాయపడుతారో అడిగి తెలుసుకోబడింది. 90 మంది తల్లిదండ్రులు రోజులో $\frac{1}{2}$ గంట నుండి $1\frac{1}{2}$ గంట వరకు సహాయం చేస్తున్నారు. ప్రక్క పటంలో ఎంత మంది తల్లిదండ్రులు వారి పిల్లలకు ఎంత సమయం కేటాయిస్తున్నారో చూపడమైనది.



రోజులో $1\frac{1}{2}$ గంట కంటే ఎక్కువ సహాయం చేస్తున్నవారు 20%,

$\frac{1}{2}$ గంట నుండి $1\frac{1}{2}$ గంటల వరకు సహాయం చేస్తున్నవారు 30%,

అసలు సహాయం చెయ్యని వారు 50%

ఈ సమాచారాన్ని ఉపయోగించి, క్రింది వాటికి సమాధానాలు తెలపండి:

(i) సర్వే చేయబడిన తల్లిదండ్రులెంతమంది?

(ii) సహాయం చేయట్లేదని తెలిపిన తల్లిదండ్రులు ఎంత మంది?

(iii) $1\frac{1}{2}$ గంట కంటే ఎక్కువ సమయం సహాయం చేస్తున్న తల్లిదండ్రులు ఎందరు?

అభ్యాసం 8.1

1. క్రింది వాటికి నిష్పత్తులు కనుగొనుము.
   (a) ఒక సైకిల్ వేగము గంటకు 15 కి.మీ, స్కూటర్ వేగము గంటకు 30 కి.మీ
   (b) 5 మీటర్లు మరియు 10 కి.మీ
   (c) 50 పైసలు మరియు `5
2. క్రింది నిష్పత్తులను శాతములలోనికి మార్చుము.
   (a) 3 : 4
   (b) 2 : 3
3. 25 మంది విద్యార్థులలో 72% విద్యార్థులు గణితంలో ఆసక్తి కలిగి ఉంటే, ఆసక్తి కలిగి ఉందని వారి సంఖ్య ఎంత?
4. ఒక ఫుట్‌బాల్ జట్టు ఆడిన మొత్తం మ్యాచ్‌లలో 10 మ్యాచ్‌లు గెలిచినది. గెలిచిన శాతం 40 అయితే వారు ఆడిన మొత్తం మ్యాచ్‌లు ఎన్ని?
5. చమేలీ తన వద్దనున్న డబ్బులో 75 % ఖర్చు చేసిన తరువాత ఆమె వద్ద `600 మిగిలిన, మొదట ఆమె వద్దనున్న డబ్బు ఎంత?

6. If 60% people in a city like cricket, 30% like football and the remaining like other games, then what per cent of the people like other games? If the total number of people is 50 lakh, find the exact number who like each type of game.

8.2 Finding the Increase or Decrease Per cent

We often come across such information in our daily life as.

(i) 25% off on marked prices (ii) 10% hike in the price of petrol

Let us consider a few such examples.

Example 2: The price of a scooter was ₹34,000 last year. It has increased by 20% this year. What is the price now?

Solution:

Amita said that she would first find the increase in the price, which is 20% of sÁT 34,000, and then find the new price.

20% of ₹ 34000 = ₹ $\frac{20}{100} \times 34000$

= ₹6800

New price = Old price + Increase

= ₹34,000 + ₹ 6,800

= ₹40,800

OR

Sunita used the unitary method.

20% increase means,

₹100 increased to ₹120.

So, ₹34,000 will increase to?

Increased price = ₹ $\frac{120}{100} \times 34000$

= ₹ 40,800

Similarly, a percentage decrease in price would imply finding the actual decrease followed by its subtraction the from original price.

Suppose in order to increase its sale, the price of scooter was decreased by 5%. Then let us find the price of scooter.

Price of scooter = ₹34000

Reduction = 5% of ₹34000

= ₹ $\frac{5}{100} \times 34000$ = ₹1700

New price = Old price – Reduction

= ₹34000 – ₹1700 = ₹32300

We will also use this in the next section of the chapter.

8.3 Finding Discounts

Discount is a reduction given on the Marked Price (MP) of the article.

This is generally given to attract customers to buy goods or to promote sales of the goods. You can find the discount by subtracting its sale price from its marked price.

So, Discount = Marked price – Sale price

6. ఒక నగర జనాభాలో 60% క్రికెట్‌ను, 30% ఫుట్‌బాల్‌ను, మిగిలిన వారు ఇతర ఆటలను ఇష్టపడతారు. అయితే ఎంత శాతం మంది ఇతర ఆటలను ఇష్టపడతారు? నగర జనాభా 50 లక్షలు అయిన ప్రతి ఒక్క ఆటను ఇష్టపడువారి ఖచ్చిత సంఖ్యను కనుగొనండి.

8.2 శాతంలో పెరుగుదల లేదా తగ్గుదల కనుగొనుట

మనం నిత్యజీవితంలో తరచుగా ఇటువంటి ప్రకటనలు చూస్తూ ఉంటాం.

(i) ప్రకటన వెలపై 25% తగ్గింపు (ii) పెట్రోల్ ధరపై 10% పెంపు

ఇలాంటి కొన్ని ఉదాహరణలను పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ 2: క్రిందటి సంవత్సరం ఒక స్కూటర్ వెల ` 34000. ఈ సంవత్సరం 20% పెరుగుదల ఉన్న ప్రస్తుత వెల ఎంత?

సాధన:

అమిత చెప్పిన విధానం: మొదట `34000 వెలలో 20% పెరిగిన పరిమాణాన్ని కనుగొని, తరువాత క్రొత్త వెలను కనుగొనాలని తెలిపింది.

`34000 లో 20% = ` $\frac{20}{100} \times 34000$

= `6800

ప్రస్తుత వెల = పాత ధర + పెరుగుదల

= `34000 + `6800

= `40800

లేదా

సునీత ఉపయోగించిన ఏక వస్తువిధానం:

20% పెరుగుదల అంటే `100, s`120గా పెరిగింది అని అర్థం. కనుక s`34000 లలో పెరుగుదల ఎంత?

పెరిగిన తరువాత ప్రస్తుత వెల

= ` $\frac{120}{100} \times 34000$ = `40800

ఇదేవిధంగా, శాతములో తగ్గుదల కనుగొనుట అనగా తగ్గించవలసిన విలువ కనుగొని, మొదట ఇచ్చిన అసలు విలువ నుండి తీసివేయడం.

అమ్మకాలు పెంచడానికి స్కూటర్ వెల 5% తగ్గించారు అనుకుంటే అప్పుడు స్కూటర్ వెల ఎంతో కనుగొందాం.

స్కూటర్ వెల = `34000

తగ్గింపు = `34000 లో 5%

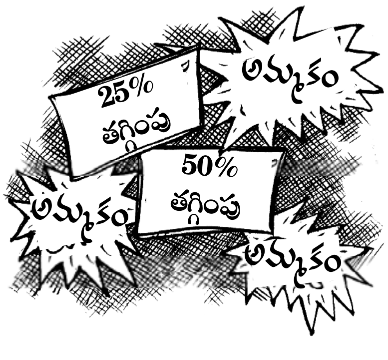
= ` $\frac{5}{100} \times 34000$ = `1700

కొత్త వెల = పాత వెల – తగ్గింపు

= `34000 – `1700 = `32300

దీనిని మనం ఈ అధ్యాయములోని తరువాత భాగములో కూడా ఉపయోగిస్తాము.

8.3 రుసుము (డిస్కౌంట్) కనుగొనుట



వస్తువు ప్రకటన వెలపై ఇచ్చు తగ్గింపును **రుసుము** అంటారు.

సాధారణంగా వినియోగదారులను ఆకర్షించడానికి లేదా అమ్మకాలు పెరిగేటట్లు చేయడానికి ఈ రుసుములు ఇవ్వబడతాయి. ప్రకటన వెల (M. P) నుండి అమ్మకపు వెల (S. P) ను తీసివేసి రుసుమును కనుగొనవచ్చు.

కావున, రుసుము = ప్రకటన వెల – అమ్మకపు వెల

Example 3: An item marked at `840 is sold for `714. What is the discount and discount %?

Solution: Discount = Marked Price – Sale Price
= `840 – `714
= `126

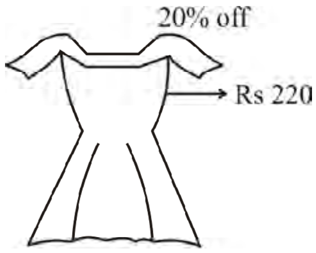
Since discount is on marked price, we will have to use marked price as the base.

On marked price of `840, the discount is `126.
On MP of `100, how much will the discount be?

$$\text{Discount} = \frac{126}{840} \times 100\% = 15\%$$

You can also find discount when discount % is given.

Example 4: The list price of a frock is `220. A discount of 20% is announced on sales. What is the amount of discount on it and its sale price.



Solution: Marked price is same as the list price.
20% discount means that on `100 (MP), the discount is `20.

By unitary method, on `1 the discount will be ` $\frac{20}{100}$.

On s`220, discount = ` $\frac{20}{100} \times 220$ = ` 44

The sale price = (`220 – `44) or `176

Rehana found the sale price like this —

A discount of 20% means for a MP of `100, discount is `20. Hence the sale price is sÁ`80. Using unitary method, when MP is s`100, sale price is `80;

When MP is ` 1, sale price is s` $\frac{80}{100}$.

Hence when MP is `220, sale price = ` $\frac{80}{100} \times 220$ = `176.

Even though the discount was not found, I could find the sale price directly.

TRY THESE

1. A shop gives 20% discount. What would the sale price of each of these be?
   (a) A dress marked at `120
   (b) A pair of shoes marked at `750
   (c) A bag marked at `250
2. A table marked at `15,000 is available for `14,400. Find the discount given and the discount per cent.
3. An almirah is sold at `5,225 after allowing a discount of 5%. Find its marked price.

ఉదాహరణ 3 : ఒక వస్తువు ప్రకటన వెల `840 మరియు అమ్మకపు వెల `714 అయిన రుసుము ఎంత ? రుసుము శాతమెంత?

సాధన :

రుసుము = ప్రకటన వెల – అమ్మకపు వెల
= `840 – `714
= `126

రుసుమును ప్రకటన వెలపై లెక్కిస్తారు కావున ప్రకటన వెలను ఆధారంగా తీసుకోవాలి

ప్రకటన వెల `840పై రుసుము `126 అయిన
ప్రకటన వెల `100పై రుసుము ఎంత ?

రుసుము $= \frac{126}{840} \times 100\% = 15\%$

రుసుము శాతమును ఇచ్చినపుడు కూడా రుసుమును కనుగొనగలం.

ఉదాహరణ 4: ఒక గౌను పట్టీ వెల `220గా ప్రకటించి దానిపై 20% రుసుము ప్రకటించారు. రుసమ మరియు అమ్మకపు వెల కనుగొనండి.

సాధన : పట్టీ వెల లేక ప్రకటన వెల రెండూ ఒకటే.
20% రుసుము అనగా `100 కు `20 రుసుము అని అర్థం

ఏకవస్తు పద్ధతిన, `1 పై రుసుము ` $\frac{20}{100}$.

` 220పై రుసుము = ` $\frac{20}{100} \times 220$ = ` 44

అమ్మకపు వెల = (`220 – `44) లేదా `176

రెహానా అమ్మకపు వెల క్రింది విధముగా కనుగొన్నది.

20% రుసుము అనగా ప్రకటన వెల `100 రుసుము `20 అని అర్థం. కనుక అమ్మకపు వెల `80; ఏకవస్తు పద్ధతిన ప్రకటన వెల `100 అయినప్పుడు అమ్మకపు వెల `80.

ప్రకటన వెల `1, అయినపుడు అమ్మకపు వెల ` $\frac{80}{100}$.

కనుక ప్రకటన వెల `220 అయినపుడు అమ్మకపు వెల = ` $\frac{80}{100} \times 220$
= `176.

రుసుము కనుగొనకప్పటికీ నేను నేరుగా అమ్మకపు వెలను కనుగొనగలిగాను.

ప్రయత్నించండి

1. ఒక దుకాణంలో వస్తువులపై 20% రుసుము ఇస్తే క్రింది వస్తువుల అమ్మకపు వెల ఎంత?
   (a) ఒక డ్రెస్ ప్రకటన వెల `120  (b) ఒక జత చెప్పుల ప్రకటన వెల `750
   (c) ఒక సంచి ప్రకటన వెల `250
2. `15000 ప్రకటన వెల గల మేజాబల్ల `14400కి లభిస్తే ఇవ్వబడిన రుసుమును మరియు రుసుము శాతాన్ని కనుగొనండి.
3. ఒక బీరువా పై 5% రుసుము ప్రకటించిన తరువాత `5225 కు అమ్మితే ప్రకటన వెల కనుగొనండి.

8.3.1 Estimation in percentages

Your bill in a shop is ₹577.80 and the shopkeeper gives a discount of 15%. How would you estimate the amount to be paid?

(i) Round off the bill to the nearest tens of ₹577.80, i.e., to ₹580.

(ii) Find 10% of this, i.e., ₹ $\frac{10}{100} \times 580 =$ ₹ 58 .

(iii) Take half of this, i.e., $\frac{1}{2} \times 58 =$ ₹ 29 .

(iv) Add the amounts in (ii) and (iii) to get ₹87.

You could therefore reduce your bill amount by ₹87 or by about ₹85, which will be ₹495 approximately.

1. Try estimating 20% of the same bill amount. 2. Try finding 15% of ₹375.

8.4 Prices Related to Buying and Selling (Profit and Loss)

For the school fair (mela) I am going to put a stall of lucky dips. I will charge ₹10 for one lucky dip but I will buy items which are worth ₹5.

So you are making a profit of 100%.

No, I will spend ₹3 on paper to wrap the gift and tape. So my expenditure is ₹8.

This gives me a profit of ₹2, which is, $\frac{2}{8} \times 100\% = 25\%$ only.

Sometimes when an article is bought, some additional expenses are made while buying or before selling it. These expenses have to be included in the cost price.

These expenses are sometimes referred to as **overhead charges**. These may include expenses like amount spent on repairs, labour charges, transportation etc.

8.4.1 Finding cost price/selling price, profit %/loss%

Example 5: Sohan bought a second hand refrigerator for ₹2,500, then spent ₹500 on its repairs and sold it for ₹3,300. Find his loss or gain per cent.

Solution: Cost Price (CP) = ₹2500 + ₹500 (overhead expenses are added to give CP)

= ₹3000

Sale Price (SP) = ₹3300

As SP > CP, he made a profit = ₹3300 – ₹3000 = ₹300

His profit on ₹3,000 is ₹300. How much would be his profit on ₹100?

Profit $= \frac{300}{3000} \times 100\% = \frac{30}{3}\% = 10\%$

$$P\% = \frac{P}{CP} \times 100$$

8.3.1 శాతాలను అంచనావేయుట

ఒక దుకాణంలో మీరు చేసిన కొనుగోలు బిల్లు `577.80. దుకాణదారుడు మీకిచ్చిన రుసుము 15% అయితే మీరు చెల్లించవలసిన మొత్తములను ఎలా అంచనా వేస్తారు?

(i) `577.80 బిల్లును దగ్గర పదులకు సవరిస్తే `580 అవుతుంది.

(ii) `580 లో 10% కనుగొంటే అది ` $\frac{10}{100} \times 580 =$ ` 58 అవుతుంది .

(iii) `58 లో సగం తీసుకుంటే అది $\frac{1}{2} \times 58 =$ ` 29 అవుతుంది.

(iv) (ii) మరియు (iii) లను కలిపితే `87 వస్తుంది .
కనుక మీరు కొనుగోలు చేసిన మొత్తం బిల్లు నుండి `87 లేదా `85 తగ్గిస్తే మీరు చెల్లించ వలసినది సుమారుగా `495 అవుతుంది.

1. పై బిల్లుకు 20% రుసుమును అంచనావెయ్యండి
2. `375 పై 15% కనుగొనుటకు ప్రయత్నించండి.

8.4 కొనడం మరియు అమ్మడానికి సంబంధించిన ధరలు (లాభ నష్టములు)

పాఠశాలలో జరిగే మేళాలో నేనొక లక్కీ డిప్ స్టాల్ పెడతాను. ఒక్కొక్క లక్కీ డిప్ కు `10 వసూలు చేస్తాను. కానీ నేను `5 విలువు గల వస్తువులనే కొనుగోలు చేస్తాను.

అలాగైతే నీవు 100% లాభం పొందుతావు

లేదు, నేను బహుమతులను ప్యాక్ చేయడానికి కావలిసిన కాగితం మరియు టేప్ కొనుగోలు నిమిత్తం `3 ఖర్చు చేస్తాను కనుక నా ఖర్చు `8 అవుతుంది.

దీని వలన నాకు `2 లాభం వుంటుంది. అది $\frac{2}{8} \times 100\% = 25\%$ మాత్రమే.

ఒక్కొక్క సారి వస్తువులను కొని అమ్మే ముందు కొన్ని అదనపు ఖర్చులు చేయడం జరుగుతుంది. వీటిని వస్తువు కొన్న వెలకు కలపవలసి వుంటుంది.

ఈ ఖర్చులనే మనం ఒక్కొక్కసారి **ఓవర్ హెడ్ చార్జెస్ (అదనపుఖర్చులు)** అంటాము. అదనపు ఖర్చులంటే మరమ్మత్తులు, రవాణా, కూలీ ఖర్చులు, రవాణా మొదలగు వాటికి చెల్లించు ఖర్చులు.

8.4.1 కొన్నవెల/అమ్మినవెల, లాభంశాతం/నష్టశాతములను కనుగొనుట

ఉదాహరణ 5: సోహన్ ఒక పాత రెఫ్రిజిరేటర్‌ను `2500కు కొని దానిని `500తో మరమ్మత్తు చేయించి `3,300లకు అమ్మెను. అతను పొందిన లాభ లేదా నష్ట శాతము కనుగొనండి.

సాధన: కొన్నవెల (CP) = `2500 + `500 (కొన్నవెల పొందుటకు అదనపు ఖర్చులు కలపాలి)

= `3000

అమ్మినవెల (SP) = `3300

అ.వె > కొ.వె, కనుక సోహన్ పొందిన లాభం = `3300 – `3000 = `300

`3000 పై `300 లాభం పొందితే `100 పై ఎంత లాభం పొందుతాడు?

లాభము $= \frac{300}{3000} \times 100\% = \frac{30}{3}\% = 10\%$

లాభశాతం = $\frac{\text{లాభం}}{\text{కొన్నవెల}} \times 100$

TRY THESE

1. Find selling price (SP) if a profit of 5% is made on
   (a) a cycle of `700 with `50 as overhead charges.
   (b) a lawn mower bought at `1150 with `50 as transportation charges.
   (c) a fan bought for `560 and expenses of `40 made on its repairs.

Example 6: A shopkeeper purchased 200 bulbs for `10 each. However 5 bulbs were fused and had to be thrown away. The remaining were sold at `12 each. Find the gain or loss %.

Solution: Cost price of 200 bulbs = 200 × `10 = `2000

5 bulbs were fused. Hence, number of bulbs left = 200 – 5 = 195

These were sold at `12 each.

The SP of 195 bulbs = `195 × 12 = `2340

He obviously made a profit (as SP > CP).

Profit = `2340 – `2000 = `340

On `2000, the profit is `340. How much profit is made on `100? Profit

$$= \frac{340}{2000} \times 100\% = 17\%.$$

Example 7: Meenu bought two fans for `1200 each. She sold one at a loss of 5% and the other at a profit of 10%. Find the selling price of each. Also find out the total profit or loss.

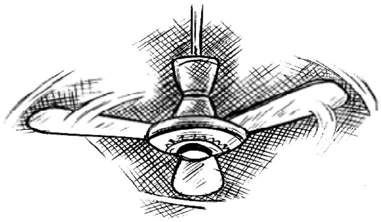
Solution: Overall CP of each fan = `1200. One is sold at a loss of 5%.

This means if CP is `100, SP is `95.

Therefore, when CP is `1200, then SP = ` $\frac{95}{100} \times 1200$ = `1140

Also second fan is sold at a profit of 10%.

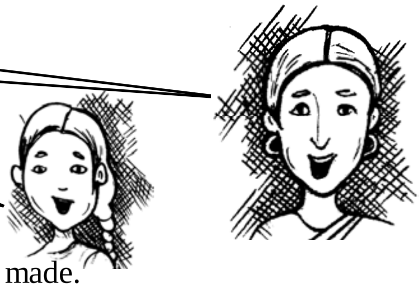
It means, if CP is `100, SP is `110.



Therefore, when CP is `1200, then SP = ` $\frac{110}{100} \times 1200$ = `1320

Was there an overall loss or gain?

We need to find the combined CP and SP to say whether there was an overall profit or loss.



Total CP = `1200 + `1200 = `2400

Total SP = `1140 + `1320 = `2460

Since total SP > total CP, a profit of `(2460 – 2400) or `60 has been made.

TRY THESE

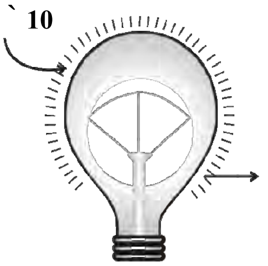
1. A shopkeeper bought two TV sets at `10,000 each. He sold one at a profit 10% and the other at a loss of 10%. Find whether he made an overall profit or loss.

ప్రయత్నించండి

1. లాభశాతం 5% అయిన క్రింది వాటి అమ్మిన వెలను కనుగొనండి
   (a) `700 ఖరీదు గల సైకిల్ పై అదనపు ఖర్చు `50 అయిన
   (b) `1150 ఖరీదు గల గడ్డి కోయు యంత్రముపై రవాణా ఖర్చు `50 అయిన
   (c) `560 వెల గల ఫ్యాన్ మరమ్మత్తులకై `40 ఖర్చు చేసిన

ఉదాహరణ 6: ఒక దుకాణదారుడు ఒక్కొక్క బల్బ్ `10 చొప్పున 200 బల్బులను కొనెను. అందులో ఫ్యూజ్ పోయిన 5 బల్బ్ లను పారవేసెను. మిగిలిన వాటిని ఒక్కొక్క దానిని `12 కు అమ్మిన లాభం లేదా నష్ట శాతమును కనుగొనండి.

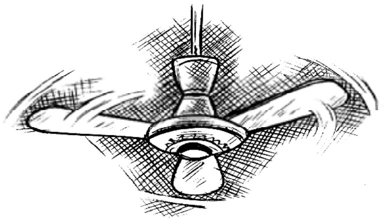
సాధన: 200 బల్బ్‌లను కొన్నవెల = 200 × `10 = `2000
ఫ్యూజ్ పోయిన 5 బల్బ్‌లను తీసివేయగా మిగిలిన బల్బ్‌ల సంఖ్య = 200 – 5 = 195
ఒక్కొక్క బల్బును అమ్మిన వెల `12
195 బల్బ్‌లను అమ్మినవెల = `195 × 12 = `2340
ఖచ్చితంగా అతడు లాభమును పొందును. (అ.వె. > కొ.వె.).
లాభము = `2340 – `2000 = `340
`2000 పై లాభము `340 అయిన `100 పై లాభమెంత ?



లాభం = $\frac{340}{2000} \times 100\% = 17\%$.

ఉదాహరణ 7: మీను, ఒక్కొక్క ఫ్యాన్ `1200 చొప్పున రెండు ఫ్యాన్లను కొని ఒకదానిని 5% నష్టమునకు. మరొకదానిని 10% లాభమునకు అమ్మిన. వాటి అమ్మకపు వెలను కనుగొనుము మొత్తము మీద అతనికెంత లాభమో లేదా ఎంత నష్టమో కనుగొనండి.

సాధన: ఒక్కొక్క ఫ్యాన్ కొన్నవెల = `1200. ఒక ఫ్యాన్ ను 5% నష్టానికి అమ్మెను కనుక కొన్న వెల `100 అయినప్పుడు అమ్మినవెల `95 అవుతుంది.

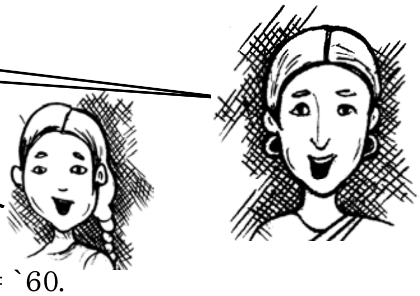


కొన్న వెల `1200 అయినప్పుడు అమ్మినవెల = ` $\frac{95}{100} \times 1200$ = `1140
రెండవ ఫ్యాన్‌ను 10% లాభానికి అమ్మెను.
కనుక, కొన్న వెల `100 అయినప్పుడు, అమ్మినవెల `110 అవుతుంది

కనుక కొన్న వెల `1200 అయినప్పుడు, అమ్మినవెల = ` $\frac{110}{100} \times 1200$ = `1320

మొత్తం మీద లాభమా లేదా నష్టమా?

మొత్తం మీద లాభమా, నష్టమా అని తెలుపుటకు మనం రెండిటిని కలిపి అమ్మిన వెల, కొన్నవెలలను తెలుసుకోవాలి.



మొత్తం కొన్నవెల = `1200 + `1200 = `2400
మొత్తం అమ్మినవెల = `1140 + `1320 = `2460
మొత్త అ.వె. > మొత్తం కొ.వె. కనుక లాభమే. లాభము = `2460 – `2400 = `60.

ప్రయత్నించండి

1. ఒక దుకాణదారుడు రెండు టీవీలను ఒక్కొక్కటి `10,000 చొప్పున కొని ఒక దానిపై 10% లాభము, మరొక దానిపై 10% నష్టమునకు అమ్మెను. మొత్తం మీద అతనికి లాభమా లేదా నష్టమా కనుగొనండి.

8.5 Sales Tax/Value Added Tax/Goods and Services Tax

The teacher showed the class a bill in which the following heads were written.

Bill No.			Date	
Menu				
S.No.	Item	Quantity	Rate	Amount
		Bill amount + ST (5%)		
	Total			

Sales tax (ST) is charged by the government on the sale of an item. It is collected by the shopkeeper from the customer and given to the government. This is, therefore, always on the selling price of an item and is added to the value of the bill. There is another type of tax which is included in the prices known as **Value Added Tax (VAT)**.

From July 1, 2017, Government of India introduced GST which stands for Goods and Services Tax which is levied on supply of goods or services or both.

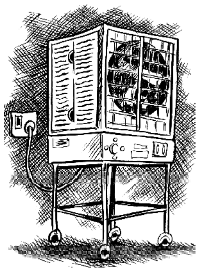
Example 8: (**Finding Sales Tax**) The cost of a pair of roller skates at a shop was ₹450. The sales tax charged was 5%. Find the bill amount.

Solution: On ₹100, the tax paid was ₹5.

On ₹450, the tax paid would be = ₹ $\frac{5}{100} \times 450$

= ₹22.50

Bill amount = Cost of item + Sales tax = ₹450 + ₹22.50 = ₹472.50.



Example 9: (**Value Added Tax (VAT)**) Waheeda bought an air cooler for ₹3300 including a tax of 10%. Find the price of the air cooler before VAT was added.

Solution: The price includes the VAT, i.e., the value added tax. Thus, a 10% VAT means if the price without VAT is ₹100 then price including VAT is ₹110.

Now, when price including VAT is ₹110, original price is ₹100.

Hence when price including tax is ₹3300, the original price = ₹ $\frac{100}{110} \times 3300$ = ₹3000.

Example 10: Salim bought an article for ₹784 which included GST of 12% . What is the price of the article before GST was added?

Solution: Let original price of the article be ₹100. GST = 12%.

Price after GST is included = ₹(100+12) = ₹112

When the selling price is ₹ 112 then original price = ₹100.

When the selling price is ₹784, then original price = ₹ $\frac{100}{12} \times 784$ = ₹ 700

8.5 అమ్మకపు పన్ను/ విలువ ఆధారిత పన్ను/ వస్తుసేవల పన్ను

ఉపాధ్యాయుడు క్రింద కనబరచిన వివరాలు గల బిల్లును విద్యార్థులకు చూపించెను.

బిల్లు నెం.			తేదీ.	
వివరాలు				
వ.సం	వస్తువు	పరిమాణం	ధర	మొత్తం
		బిల్లుమొత్తం + ST (5%)		
	మొత్తం			

అమ్మకపు పన్నును వస్తువు అమ్మకం పై ప్రభుత్వం విధిస్తుంది. దుకాణదారుడు, వినియోగదారులనుండి ఈ పన్ను వసూలు చేసి ప్రభుత్వానికి చెల్లించును. కనుక ఇది వస్తువు అమ్మిన వెలనుబట్టి ఉండి బిల్లులోనే కలుపబడి ఉంటుంది. ఇలా కాకుండా మరొక రకమైన పన్ను ఉంది. ఇందులో వస్తువు విలువలోనే పన్ను కలుపబడి ఉంటుంది. దీనినే **విలువ ఆధారిత పన్ను (VAT)** అంటారు.

01 – 07 – 2017 నుండి భారత ప్రభుత్వం వస్తువులు మరియు సేవల పన్ను (GST) ను అమలులోకి తెచ్చింది. ఈ పన్ను వస్తువుల సరఫరా లేదా సేవ లేదా రెండింటి పైన విధించ బడుతుంది.

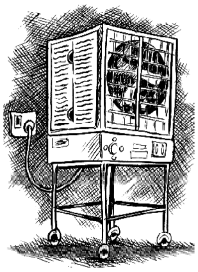
ఉదాహరణ 8: **(అమ్మకపు పన్ను కనుగొనుట)** ఒక దుకాణం లో ఒక జత స్కేటింగ్ బూట్లు ఖరీదు ₹450 దానిపై 5% అమ్మకపు పన్ను విధించిన చెల్లించవలసిన బిల్లు మొత్తంను కనుగొనండి.

సాధన: ₹100పై అమ్మకపు పన్ను ₹5.

$$₹450\text{పై అమ్మకపు పన్ను} = ₹\frac{5}{100}\times 450$$

$$= ₹22.50$$

బిల్లు మొత్తం = వస్తువు ఖరీదు + అమ్మకపు పన్ను = ₹450 + ₹22.50 = ₹472.50.



ఉదాహరణ 9: **(విలువ ఆధారిత పన్ను (VAT))** వహీదా ఒక ఎయిర్ కూలరును 10% పన్ను తో కలిపి ₹3300కు కొన్నది. VAT కలపకముందు ఎయిర్ కూలర్ ఖరీదును కనుగొనండి.

సాధన: కూలర్ ఖరీదుకు విలువ ఆధారిత పన్ను VAT కలుపబడినది. 10% VAT అనగా VAT కలుపక ముందు ఖరీదు ₹100 అనుకొనిన 10% VAT కలిపిన తరువాత ఖరీదు ₹110 అని అర్థం.

VAT కలిపిన తరువాత కూలర్ ఖరీదు ₹110 అయింది అంటే దాని అసలు ఖరీదు ₹100.

VAT కలిపిన తరువాత ₹3300 అయితే, కూలర్ అసలు ఖరీదు = $₹\frac{100}{110}\times 3300 =$ ₹3000.

ఉదాహరణ 10: సలీం ఒక వస్తువును 12% GST తో కలిపి ₹784కు కొనిన GST కలుపక ముందు వస్తువు వెల ఎంత?

సాధన: వస్తువు అసలు వెల ₹100 అనుకొనుము. GST = 12%.

GST కలిపిన తరవాత వెల = (₹100+ ₹12) = ₹112

అమ్మకపు వెల ₹112 అయినప్పుడు అసలు వెల = ₹100

అమ్మకపు వెల ₹784 అయిన అసలు వెల = $₹\frac{100}{112}\times 784 = ₹700$

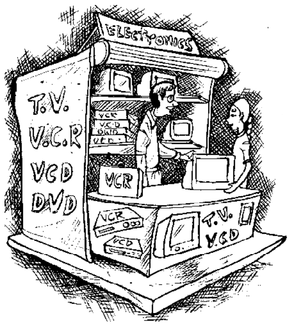
THINK, DISCUSS AND WRITE

1. Two times a number is a 100% increase in the number. If we take half the number what would be the decrease in per cent?
2. By what per cent is `2,000 less than `2,400? Is it the same as the per cent by which `2,400 is more than `2,000?

EXERCISE 8.2

1. A man got a 10% increase in his salary. If his new salary is `1,54,000, find his original salary.

2. On Sunday 845 people went to the Zoo. On Monday only 169 people went. What is the per cent decrease in the people visiting the Zoo on Monday?



3. A shopkeeper buys 80 articles for `2,400 and sells them for a profit of 16%. Find the selling price of one article.

4. The cost of an article was `15,500. `450 were spent on its repairs. If it is sold for a profit of 15%, find the selling price of the article.

5. A VCR and TV were bought for `8,000 each. The shopkeeper made a loss of 4% on the VCR and a profit of 8% on the TV. Find the gain or loss percent on the whole transaction.

6. During a sale, a shop offered a discount of 10% on the marked prices of all the items. What would a customer have to pay for a pair of jeans marked at `1450 and two shirts marked at `850 each?

7. A milkman sold two of his buffaloes for `20,000 each. On one he made a gain of 5% and on the other a loss of 10%. Find his overall gain or loss. (**Hint:** Find CP of each)

8. The price of a TV is `13,000. The sales tax charged on it is at the rate of 12%. Find the amount that Vinod will have to pay if he buys it.

9. Arun bought a pair of skates at a sale where the discount given was 20%. If the amount he pays is `1,600, find the marked price.

10. I purchased a hair-dryer for `5,400 including 8% VAT. Find the price before VAT was added.

11. An article was purchased for `1239 including GST of 18%. Find the price of the article before GST was added?

8.6 Compound Interest

You might have come across statements like “one year interest for FD (fixed deposit) in the bank @ 9% per annum” or ‘Savings account with interest @ 5% per annum’.

ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి

1. ఒక సంఖ్యను రెండు రెట్లు చేస్తే ఆ సంఖ్యలో 100 % పెరుగుదల ఉంటుంది. అయితే సంఖ్యలో సగ భాగం తీసుకుంటే ఎంత శాతం తరుగుదల ఉంటుంది?
2. `2400 కంటే `2000 ఎంత శాతము తక్కువ? ఈ విలువ `2000 కంటే `2400 ఎంత శాతం ఎక్కువ అనుదానికి సమానమా?

అభ్యాసం 8.2

1. ఒక వ్యక్తి వేతనంలో 10% పెరిగిన తరువాత కొత్తవేతనం `1,54,000 అయితే అతని అసలు వేతనం కనుగొనండి.

2. ఒక జంతు ప్రదర్శనశాలను ఆదివారంనాడు 845, సోమవారం నాడు కేవలం 169 మంది సందర్శించినారు. సోమవారంనాడు ఎంత తక్కువ శాతం మంది జంతుప్రదర్శన శాలను సందర్శించారు?

3. ఒక దుకాణదారుడు 80 వస్తువులను `2400కు కొని 16% లాభానికి అమ్మితే ఒక వస్తువు అమ్మిన వెలను కనుగొనండి.

4. ఒక వస్తువు ఖరీదు `15,500. మరమ్మత్తులకైన ఖర్చు `450. దానిని 15% లాభంకు అమ్మిన ఆ వస్తువు అమ్మిన వెలను కనుగొనండి.

5. ఒక దుకాణదారుడు VCR మరియు TVలను ఒక్కొక్క దానిని `8000లకు కొని VCR ను 4% నష్టమునకు TVని 8 % లాభమునకు అమ్మిన మొత్తము మీద వచ్చే లాభం లేదా నష్ట శాతాన్ని కనుగొనండి.

6. ఒక దుకాణం తమ అన్ని వస్తువుల అమ్మకాలలో ప్రకటన వెలపై 10% రుసుము ప్రకటించింది. ఒక జత జీన్స్ పై `1450 మరియు రెండు చొక్కాలపై ఒక్కొక్కటి `850 ప్రకటన వెల ఉంటే వినియోగదారుడు ఎంత మొత్తం చెల్లించాలి ?

7. ఒక పాల వ్యాపారి తన రెండు గేదెలను ఒక్కొక్క దానిని `20000కు అమ్మగా, ఒక దానిపై 5% లాభము మరొక దానిపై 10% నష్టమును పొందిన మొత్తము మీద వచ్చే లాభం లేదా నష్టాన్ని కనుగొనండి. (**సూచన:** ఒక్కొక్కదాని కొన్న వెలను కనుగొనండి)

8. ఒక TV వెల `13000 దాని పై 12% అమ్మకపు పన్ను విధించబడినది. దానిని కొనాలనుకుంటే వినోద్ ఎంత చెల్లించవలసి ఉంటుందో కనుగొనుము.

9. అరుణ్ ఒక జత స్కేట్లను 20% రుసుముపై `1600 కి కొంటే, వాటి ప్రకటన వెల ఎంత?

10. నేను 8% VAT తో కలిపి ఒక హెయిర్ డ్రైయర్‌ను `5400కు కొంటే VAT కలుపక ముందు దాని అసలు ఖరీదు ఎంత?

11. ఒక వస్తువు 18% GST తో కలిపి `1239కు ఖరీదు చెయ్యబడింది. GST కలుపక ముందు వస్తువు వెల ఎంత?

8.6 చక్రవడ్డీ

బ్యాంక్ లో "ఫిక్స్‌డ్ డిపాజిట్‌పై వడ్డీ @9% సంవత్సరానికి" లేదా 'పొదుపు ఖాతా పై వార్షిక వడ్డీ @5% సంవత్సరానికి' మొదలైన ప్రకటనలను మీరు చూసే ఉంటారు.

Interest is the extra money paid by institutions like banks or post offices on money deposited (kept) with them. Interest is also paid by people when they borrow money. We already know how to calculate **Simple Interest**.

Example 11: A sum of ₹10,000 is borrowed at a rate of interest 15% per annum for 2 years. Find the simple interest on this sum and the amount to be paid at the end of 2 years.

Solution: On ₹100, interest charged for 1 year is ₹15.

So, on ₹10,000, interest charged $= \frac{15}{100} \times 10000 =$ ₹1500

Interest for 2 years = ₹1500 × 2 = ₹3000

Amount to be paid at the end of 2 years = Principal + Interest

= ₹10000 + ₹3000 = ₹13000

TRY THESE

Find interest and amount to be paid on ₹15000 at 5% per annum after 2 years.

My father has kept some money in the post office for 3 years. Every year the money increases as more than the previous year.

We have some money in the bank. Every year some interest is added to it, which is shown in the passbook. This interest is not the same, each year it increases.

Normally, the interest paid or charged is never simple. The interest is calculated on the amount of the previous year. This is known as interest compounded or **Compound Interest** (C.I.).

Let us take an example and find the interest year by year. Each year our sum or principal changes.

Calculating Compound Interest

A sum of ₹20,000 is borrowed by Heena for 2 years at an interest of 8% compounded annually. Find the Compound Interest (C.I.) and the amount she has to pay at the end of 2 years.

Aslam asked the teacher whether this means that they should find the interest year by year. The teacher said 'yes', and asked him to use the following steps :

1. Find the Simple Interest (S.I.) for one year.

   Let the principal for the first year be P_1. Here, P_1 = ₹20,000

   SI_1 = SI at 8% p.a. for 1st year = ₹ $\frac{20000 \times 8}{100}$ = ₹1600

2. Then find the amount which will be paid or received. This becomes principal for the next year.

   Amount at the end of 1st year = $P_1 + SI_1$ = ₹20000 + ₹1600

   = ₹21600 = P_2 (Principal for 2nd year)

బ్యాంకులు, పోస్ట్ ఆఫీస్ వంటి సంస్థలలో మనం దాచుకున్న (ఉంచుకున్న) డబ్బు పై అదనంగా వారు మనకిచ్చే డబ్బును **వడ్డీ** అంటాం. డబ్బును అప్పుగా తెచ్చుకొన్నప్పుడు బాకీదారులు దానికి వడ్డీని కూడా చెల్లిస్తారు. **సామాన్య వడ్డీ**ని ఎలా లెక్కించాలో మనకు ఇంతకు ముందే తెలుసు.

ఉదాహరణ 11: ₹10000/ లను 15% వడ్డీ రేటున 2సం॥లకు వడ్డీకి తీసుకొనిన, రెండు సంవత్సరాల తరువాత కట్టవలసిన సామాన్య వడ్డీని, మొత్తమును కనుగొనుము.

సాధన: ₹100 కు ఒక సంవత్సరమునకు కట్టవలసిన వడ్డీ ₹15.

₹10000కు ఒక సం॥కు కట్టవలసిన వడ్డీ $= \frac{15}{100} \times 10000 =$ ₹1500

2 సం॥లకు కట్టవలసిన వడ్డీ = ₹1500 × 2 = ₹3000

2 సం॥ చివర కట్టవలసిన మొత్తం = అసలు + వడ్డీ

= ₹10000 + ₹3000 = ₹13000

ప్రయత్నించండి

₹15000పై సంవత్సరానికి వడ్డీ రేటు 5% చొప్పున 2సం॥ల తరువాత చెల్లించవలసిన వడ్డీ, మొత్తంలను కనుగొనుము.

నా తండ్రి కొంత డబ్బును 3సంవత్సరాల కాలానికి పోస్ట్ ఆఫీస్‌లో ఉంచారు. ఆ డబ్బు ప్రతి సంవత్సరం క్రిందటి సంవత్సరం కంటే ఎక్కువ అవుతున్నది.

బ్యాంకులో మనకు కొంత సొమ్ము ఉంది. ప్రతీ సంవత్సరం కొంత వడ్డీని దానికి కలిపి, పాస్ బుక్‌లో చూపిస్తారు. ఈ వడ్డీ ప్రతీ సంవత్సరం సమానంగా ఉండదు, పెరుగుతూ ఉంటుంది.

సాధారణంగా ఈ రకంగా చెల్లించబడే వడ్డీ ఎప్పుడూ సామాన్యవడ్డీ కాదు. ఈ వడ్డీని మునుపటి సంవత్సరం వచ్చిన మొత్తంపై లెక్కిస్తారు. ఈ పద్ధతిన కట్టే వడ్డీని **చక్రవడ్డీ (C.I.)** అంటారు.

మనం ఒక ఉదాహరణ తీసుకొని, ప్రతీ సంవత్సరం వడ్డీని లెక్కిద్దాం. ప్రతీ సంవత్సరం మొత్తం లేదా అసలు మారుతూ ఉంటుంది.

చక్రవడ్డీ లెక్కించుట

సంవత్సరానికి 8% వడ్డీ రేటుతో హీనా 2 సంవత్సరాలకు ప్రతి సంవత్సరము వడ్డీ తిరుగ కట్టు పద్ధతిన ₹20,000 అప్పు తీసుకుంది. 2 సంవత్సరాల చివర ఆమె చెల్లించవలసిన వడ్డీ మరియు మొత్తములను కనుగొనుము.

అస్లాం సంవత్సరాల వారీగా వడ్డీ లెక్క కట్టవలసి ఉంటుందా అని ఉపాధ్యాయుడిని అడిగాడు. ఉపాధ్యాయుడు 'అవును' అని, ఈ క్రింది సోపానాలను ఉపయోగించుకోమని సూచించారు.

1. ఒక సంవత్సరమునకు సామాన్యవడ్డీని కనుగొనాలి.
   మొదటి సంవత్సరపు అసలు P_1 అనుకొనుము ఇక్కడ P_1 = ₹20000

   SI_1 = సం॥నికి 8% వడ్డీ రేటుతో మొదటి సంవత్సరం సామాన్యవడ్డీ = ₹$\frac{20000 \times 8}{100}$ = ₹1600
2. తరువాత చెల్లించవలసిన లేదా తీసుకొన్న మొత్తమును కనుగొనాలి. ఇది తరువాత సంత్సరమునకు అసలు అవుతుంది.

   మొదటి సంవత్సరము చివర మొత్తం = $P_1 + SI_1$ = ₹20000 + ₹1600

   = ₹21600 = P_2 (రెండవ సంవత్సరానికి అసలు)

3. Again find the interest on this sum for another year.

$$SI_2 = \text{SI at 8\% p.a. for 2nd year} = ₹\ \frac{21600 \times 8}{100}$$

$$= ₹1728$$

4. Find the amount which has to be paid or received at the end of second year.

$$\text{Amount at the end of 2nd year} = P_2 + SI_2$$

$$= ₹21600 + ₹1728$$

$$= ₹23328$$

$$\text{Total interest given} = ₹1600 + ₹1728$$

$$= ₹3328$$

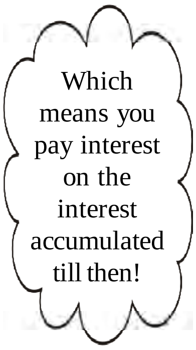
Reeta asked whether the amount would be different for simple interest. The teacher told her to find the interest for two years and see for herself.

$$\text{SI for 2 years} = ₹\ \frac{20000 \times 8 \times 2}{100} = ₹3200$$

Reeta said that when compound interest was used Heena would pay ₹128 more.

Let us look at the difference between simple interest and compound interest. We start with ₹100. Try completing the chart.

		Under Simple Interest	Under Compound Interest
First year	Principal	₹ 100.00	₹ 100.00
	Interest at 10%	₹ 10.00	₹ 10.00
	Year-end amount	₹ 110.00	₹ 110.00
Second year	Principal	₹ 100.00	₹ 110.00
	Interest at 10%	₹ 10.00	₹ 11.00
	Year-end amount	₹(110 + 10) = ₹120	₹ 121.00
Third year	Principal	₹ 100.00	₹ 121.00
	Interest at 10%	₹ 10.00	₹ 12.10
	Year-end amount	₹(120 + 10) = ₹130	₹ 133.10



Note that in 3 years,

Interest earned by Simple Interest = ₹(130 – 100) = ₹30, whereas,

Interest earned by Compound Interest = ₹(133.10 – 100) = ₹33.10

Note also that the Principal remains the same under Simple Interest, while it changes year after year under compound interest.

3. ఈ మొత్తానికి మరొక సంవత్సర కాలానికి మరల వడ్డీ కనుగొనాలి.

$$SI_2 = \text{సం॥నికి } 8\% \text{ వడ్డీ రేటుతో రెండవ సంవత్సరం సామాన్య వడ్డీ} = ` \frac{21600 \times 8}{100}$$

$$= `1728$$

4. రెండవ సంవత్సరం చివర చెల్లించవలసిన లేక తీసుకొన్న మొత్తమును కనుగొనాలి.

రెండవ సంవత్సరం చివర చెల్లించవలసిన మొత్తం $= P_2 + SI_2$

= `21600 + `1728

= `23328

ఇచ్చిన మొత్తం వడ్డీ = `1600 + `1728

= `3328

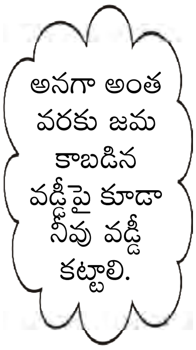
రీటా సామాన్య వడ్డీ పద్ధతిన ఈ మొత్తం వేరుగా ఉంటుందా? అని ఉపాధ్యాయుడిని అడిగింది. సామాన్య వడ్డీ పద్ధతిన రెండు సంవత్సరాలకు వడ్డీని కనుగొని పరిశీలించమని ఉపాధ్యాయుడి చెప్పారు.

$$\text{రెండు సంవత్సరములకు సామాన్య వడ్డీ} = ` \frac{20000 \times 8 \times 2}{100} = `3200$$

చక్రవడ్డీ ప్రకారము హీనా `128 అధికంగా కట్టవలసి ఉంటుంది అని రీటా చెప్పింది.

మనం ఇప్పుడు సరళ వడ్డీ, చక్రవడ్డీల మధ్య గల వ్యత్యాసమును గమనిద్దాం. `100తో ప్రారంభించి పట్టికను పూర్తి చేయడానికి ప్రయత్నిద్దాం.

		సామాన్యవడ్డీ పద్ధతి	చక్రవడ్డీ పద్ధతి
మొదటి సం॥	అసలు	` 100.00	` 100.00
	10% వడ్డీ	` 10.00	` 10.00
	సం॥ చివర మొత్తం	` 110.00	` 110.00
రెండవ సం॥	అసలు	` 100.00	` 110.00
	10% వడ్డీ	` 10.00	` 11.00
	సం॥ చివర మొత్తం	`(110 + 10) = `120	` 121.00
మూడవ సం॥	అసలు	` 100.00	` 121.00
	10% వడ్డీ	` 10.00	` 12.10
	సం॥ చివర మొత్తం	`(120 + 10) = `130	` 133.10



3 సంవత్సరాలలో,

సామాన్యవడ్డీ ప్రకారం పొందిన వడ్డీ = `(130 – 100) = `30

అయితే చక్రవడ్డీ ప్రకారం పొందిన వడ్డీ = `(133.10–100) = `33.10 అని గమనించవచ్చు.

సామాన్యవడ్డీ ప్రకారము అసలు ఎల్లప్పుడూ ఒకేలా ఉంటుంది. కానీ చక్రవడ్డీ ప్రకారం ప్రతీ సంవత్సరం అసలు మారుతూ ఉంటుందని గమనించండి.

8.7 Deducing a Formula for Compound Interest

Zubeda asked her teacher, 'Is there an easier way to find compound interest?' The teacher said 'There is a shorter way of finding compound interest. Let us try to find it.'

Suppose P_1 is the sum on which interest is compounded annually at a rate of R% per annum.

Let P_1 = ₹5000 and R = 5. Then by the steps mentioned above

1. $SI_1 = ₹\,\frac{5000 \times 5 \times 1}{100}$ or $SI_1 = ₹\,\frac{P_1 \times R \times 1}{100}$

so, $A_1 = ₹5000 + \frac{5000 \times 5 \times 1}{100}$ or $A_1 = P_1 + SI_1 = P_1 + \frac{P_1 R}{100}$

$= ₹5000\left(1+\frac{5}{100}\right) = P_2$ $\qquad = P_1\left(1+\frac{R}{100}\right) = P_2$

2. $SI_2 = ₹5000\left(1+\frac{5}{100}\right) \times \frac{5 \times 1}{100}$ or $SI_2 = \frac{P_2 \times R \times 1}{100}$

$= ₹\,\frac{5000 \times 5}{100}\left(1+\frac{5}{100}\right)$ $\qquad = P_1\left(1+\frac{R}{100}\right) \times \frac{R}{100}$

$= \frac{P_1 R}{100}\left(1+\frac{R}{100}\right)$

$A_2 = ₹\,5000\left(1+\frac{5}{100}\right) + ₹\,\frac{5000 \times 5}{100}\left(1+\frac{5}{100}\right)$ $\qquad A_2 = P_2 + SI_2$

$= ₹\,5000\left(1+\frac{5}{100}\right)\left(1+\frac{5}{100}\right)$ $\qquad = P_1\left(1+\frac{R}{100}\right) + P_1\frac{R}{100}\left(1+\frac{R}{100}\right)$

$= ₹\,5000\left(1+\frac{5}{100}\right)^2 = P_3$ $\qquad = P_1\left(1+\frac{R}{100}\right)\left(1+\frac{R}{100}\right)$

$= P_1\left(1+\frac{R}{100}\right)^2 = P_3$

Proceeding in this way the amount at the end of n years will be

$$A_n = P_1\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$$

Or, we can say

$$A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$$

8.7 చక్రవడ్డీ సూత్రమును ఉత్పాదించుట

చక్రవడ్డీ కనుగొనడానికి ఏమైనా సులభ పద్ధతి ఉందా? అని జుబేదా తన ఉపాధ్యాయురాలిని అడిగింది. చక్రవడ్డీ కనుగొనడానికి ఒక సులభ పద్ధతి ఉంది. దానిని కనుగొనడానికి ప్రయత్నిద్దాం అని ఆమె అన్నారు.

అసలు P_1 సంవత్సరానికి వడ్డీ రేటు R% అనుకొనిన చక్రవడ్డీని లెక్కించారనుకుందాము.

P_1 = ₹5000 మరియు R = 5 అనుకుందాం. పైన తెలిపిన సోపానాల ఆధారంగా

1. $SI_1 = ₹\frac{5000 \times 5 \times 1}{100}$ లేదా $SI_1 = ₹\frac{P_1 \times R \times 1}{100}$

కనుక, $A_1 = ₹5000 + \frac{5000 \times 5 \times 1}{100}$ లేదా $A_1 = P_1 + SI_1 = P_1 + \frac{P_1R}{100}$

$= ₹5000\left(1+\frac{5}{100}\right) = P_2$ $\qquad = P_1\left(1+\frac{R}{100}\right) = P_2$

2. $SI_2 = ₹5000\left(1+\frac{5}{100}\right) \times \frac{5 \times 1}{100}$ లేదా $SI_2 = \frac{P_2 \times R \times 1}{100}$

$= ₹\frac{5000 \times 5}{100}\left(1+\frac{5}{100}\right)$ $\qquad = P_1\left(1+\frac{R}{100}\right) \times \frac{R}{100}$

$= \frac{P_1R}{100}\left(1+\frac{R}{100}\right)$

$A_2 = ₹5000\left(1+\frac{5}{100}\right) + ₹\frac{5000 \times 5}{100}\left(1+\frac{5}{100}\right)$ $\qquad A_2 = P_2 + SI_2$

$= ₹5000\left(1+\frac{5}{100}\right)\left(1+\frac{5}{100}\right)$ $\qquad = P_1\left(1+\frac{R}{100}\right) + P_1\frac{R}{100}\left(1+\frac{R}{100}\right)$

$= ₹5000\left(1+\frac{5}{100}\right)^2 = P_3$ $\qquad = P_1\left(1+\frac{R}{100}\right)\left(1+\frac{R}{100}\right)$

$= P_1\left(1+\frac{R}{100}\right)^2 = P_3$

ఇదే పద్ధతిని కొనసాగించిన, n సంవత్సరముల తరువాత మొత్తం

$$A_n = P_1\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$$

లేదా, $A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$ అని చెప్పవచ్చు.

So, Zubeda said, but using this we get only the formula for the amount to be paid at the end of n years, and not the formula for compound interest.

Aruna at once said that we know CI = A – P, so we can easily find the compound interest too.

Example 12: Find CI on `12600 for 2 years at 10% per annum compounded annually.

Solution: We have, $A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$, where Principal (P) = `12600, Rate (R) = 10, Number of years (n) = 2

$$= \text{`}12600\left(1+\frac{10}{100}\right)^2 = \text{`}12600\left(\frac{11}{10}\right)^2$$

$$= \text{`}12600 \times \frac{11}{10} \times \frac{11}{10} = \text{`}15246$$

CI = A – P = `15246 – `12600 = `2646

TRY THESE

1. Find CI on a sum of `8000 for 2 years at 5% per annum compounded annually.

8.8 Rate Compounded Annually or Half Yearly (Semi Annually)

You may want to know why 'compounded annually' was mentioned after 'rate'. Does it mean anything?

It does, because we can also have interest rates compounded half yearly or quarterly. Let us see what happens to `100 over a period of one year if an interest is compounded annually or half yearly.

Time period and rate when interest not compounded annually

The time period after which the interest is added each time to form a new principal is called the **conversion period**. When the interest is compounded half yearly, there are two conversion periods in a year each after 6 months. In such situations, the half yearly rate will be half of the annual rate. What will happen if interest is compounded quarterly? In this case, there are 4 conversion periods in a year and the quarterly rate will be one-fourth of the annual rate.

P = `100 at 10% per annum compounded annually	P = `100 at 10% per annum compounded half yearly
The time period taken is 1 year	The time period is 6 months or $\frac{1}{2}$ year
$I = \text{`}\frac{100 \times 10 \times 1}{100} = \text{Rs } 10$	$I = \text{`}\frac{100 \times \boxed{10 \times \frac{1}{2}}}{100} = \text{`}5$ (Rate becomes half)
A = `100 + `10 = `110	A = `100 + `5 = `105 Now for next 6 months the P = `105
	So, $I = \text{`}\frac{105 \times 10 \times \frac{1}{2}}{100} = \text{`}5.25$ and A = `105 + `5.25 = `110.25

ఈ పద్ధతినుపయోగించి 'n' సంవత్సరాల చివర కట్టవలసిన మొత్తమునకు మాత్రమే సూత్రము తెలుస్తుంది, కానీ చక్రవడ్డీ సూత్రం కాదు అని జుబేదా అంది.

చక్రవడ్డీ = మొత్తం – అసలు అని మనకు తెలుసు కనుక వచ్చిన మొత్తం నుండి అసలును తీసివేస్తే చక్రవడ్డీ ఎంతో తెలుస్తుంది అని అరుణ అంది.

ఉదాహరణ 12: `12,600 కు 10% వడ్డీ రేటు చొప్పున 2సంవత్సరాలకు అగు చక్ర వడ్డీని కనుగొనుము.

సాధన: $A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$ అని మనకు తెలుసు, అసలు (P) = `12600, రేటు (R) = 10,

సంవత్సరాల సంఖ్య (n) = 2

$$= `12600\left(1+\frac{10}{100}\right)^2 = `12600\left(\frac{11}{10}\right)^2$$

$$= `12600 \times \frac{11}{10} \times \frac{11}{10} = `15246$$

చక్రవడ్డీ CI = A – P = `15246 – `12600 = `2646

ప్రయత్నించండి

1. `8000పై 5%రేటు చొప్పున సం॥నికి ఒకసారి వడ్డీ తిరుగుకట్టు పద్ధతిన 2 సం॥లకి అయ్యే చక్రవడ్డీ కనుగొనండి.

8.8 సంవత్సరమునకు లేదా అర్ధ సంవత్సరమునకు చక్రవడ్డీ గణించుట

'వడ్డీరేటు' తరువాత 'సంవత్సరమునకు ఒకసారి వడ్డీ తిరుగ కట్టెడి పద్ధతి' అని పేర్కొంటున్నాం. దీనికి ఏమైనా అర్థం ఉందా?

ఉన్నది. ఎందుకంటే చక్రవడ్డీ,6 నెలలకొకసారి లేదా 3 నెలలకొకసారి కూడా లెక్కించ బడుతుంది.

`100కి సంవత్సరానికొకసారి లేదా అర్ధ సంవత్సరాని కొకసారి వడ్డీ తిరుగ కట్టినప్పుడు ఏంజరుగుతుందో గమనిద్దాం.

చక్రవడ్డీ సంవత్సరానికి ఒకసారి లెక్కించనప్పుడు కాలము మరియు రేటు

చక్రవడ్డీని లెక్కకట్టునప్పుడు వడ్డీని, అసలుకు ఎంత కాలం తరువాత కలుపుతున్నామో ఆ కలిపే కాలాన్ని మనం **వడ్డీని తిరుగకట్టెడు కాలవ్యవధి** అంటాము. వడ్డీని అర్ధసంవత్సరానికి ఒకసారి లెక్కకట్టునప్పుడు, సంవత్సరములో రెండు కాలవ్యవధులు ఉంటాయి. అప్పుడు వడ్డీరేటును సంవత్సరపు వడ్డీ రేటులో సగంగా తీసుకొని కాలవ్యవధులు సంవత్సరములో 2గా తీసుకోవాలి.

3 నెలలకు ఒకసారి వడ్డీ తిరుగకట్టినప్పుడు ఏమౌతుంది? సంవత్సరములో 4 కాలవ్యవధులు ఉంటాయి. త్రై మాసిక వడ్డీ సంవత్సరం వడ్డీ రేటులో 1/4 ఉంటుంది.

P = `100, 10% వడ్డీ రేటుతో సం॥నకు ఒక సారి వడ్డీ కట్టునపుడు	P = `100, 10% వడ్డీ రేటుతో అర్ధ సం॥నకు ఒక సారి వడ్డీకట్టినపుడు
తీసుకున్న కాల పరిమితి 1సంవత్సరం	తీసుకున్న కాలపరిమితి 6నెలలు లేదా $\frac{1}{2}$ సం॥
$I = `\frac{100 \times 10 \times 1}{100} = Rs\ 10$	$I = `\frac{100 \times \boxed{10 \times \frac{1}{2}}}{100} = `5$
A = `100 + `10 = `110	A = `100 + `5 = `105   తరువాత 6 నెలలకు P = `105
	కావున, $I = `\frac{105 \times 10 \times \frac{1}{2}}{100} = `5.25$ మరియు A = `105 + `5.25 = `110.25

రేటు సగం అవుతుంది.

Do you see that, if interest is compounded half yearly, we compute the interest two times. So time period becomes twice and rate is taken half.

TRY THESE

Find the time period and rate for each .

1. A sum taken for $1\frac{1}{2}$ years at 8% per annum is compounded half yearly.
2. A sum taken for 2 years at 4% per annum compounded half yearly.

THINK, DISCUSS AND WRITE

A sum is taken for one year at 16% p.a. If interest is compounded after every three months, how many times will interest be charged in one year?

Example 13: What amount is to be repaid on a loan of ₹12000 for $1\frac{1}{2}$ years at 10% per annum compounded half yearly.

Solution:

Principal for first 6 months = ₹12,000	Principal for first 6 months = ₹12,000
There are 3 half years in $1\frac{1}{2}$ years. Therefore, compounding has to be done 3 times. Rate of interest = half of 10% = 5% half yearly $A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$ $= ₹12000\left(1+\frac{5}{100}\right)^3$ $= ₹12000 \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20}$ = ₹13,891.50	Time = 6 months = $\frac{6}{12}$ year = $\frac{1}{2}$ year Rate = 10% $I = ₹\frac{12000 \times 10 \times \frac{1}{2}}{100} = ₹600$ A = P + I = ₹12000 + ₹600 = ₹12600. It is principal for next 6 months. $I = ₹\frac{12600 \times 10 \times \frac{1}{2}}{100} = ₹630$ Principal for third period = ₹12600 + ₹630 = ₹13,230. $I = ₹\frac{13230 \times 10 \times \frac{1}{2}}{100} = ₹661.50$ A = P + I = ₹13230 + ₹661.50 = ₹13,891.50

అర్ధ సంవత్సరమునకు వడ్డీ తిరుగ కట్టినప్పుడు,వడ్డీని రెండు సార్లు లెక్కిస్తాము.కనుక కాలవ్యవధి 2, వడ్డీ రేటును సగముగా తీసుకోవడం గమనించారా.

ప్రయత్నించండి

క్రింది సందర్భాలకు కాలవ్యవధులను, రేటును కనుగొనండి.

1. కొంత సొమ్మును సంవత్సరమునకు 8% వడ్డీ పై అర్ధ సంవత్సరమునకు ఒకసారి వడ్డీ తిరుగకట్టు పద్ధతిన $1\frac{1}{2}$ సంవత్సరములకు అప్పు తీసుకున్నపుడు.
2. కొంత సొమ్మును సం॥నకు 4% వడ్డీపై అర్ధ సంవత్సరమునకు ఒకసారి తిరిగికట్టు పద్ధతిన 2సం॥లకు అప్పు తీసుకున్నపుడు.

ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి

సం॥నికి 16% వడ్డీ రేటుతో కొంత సొమ్మును 1 సం॥నకు అప్పుగా తీసుకుంటే 3 నెలలకు ఒకసారి వడ్డీ తిరుగకట్టవలెనన్న, ఒక సంవత్సరములో ఎన్ని సార్లు వడ్డీని తిరుగకట్ట వలసి ఉంటుంది?

ఉదాహరణ 13: అర్ధసంవత్సరమునకు ఒకసారి వడ్డీ కట్టెడు పద్ధతిన `12000ల అప్పుపై సంవత్సరమునకు 10% వడ్డీ రేటుతో $1\frac{1}{2}$ సంవత్సరాల తరువాత చెల్లించవలసిన మొత్తం ఎంత?.

సాధన:

మొదటి 6 నెలలకు అసలు = `12000	మొదటి 6 నెలలకు అసలు = `12000
$1\frac{1}{2}$ సంవత్సరాలలో 3 అర్ధ సంవత్సరాలు కలవు కనుక 3 సార్లు చక్ర వడ్డీ లెక్కించ వలసి ఉంటుంది. వడ్డీరేటు = 10% లో సగం = అర్ధ సంవత్సరానికి 5% $A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$ = `12000 $\left(1+\frac{5}{100}\right)^3$ = `12000 $\times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20}$ = `13,891.50	తిరుగకట్టెడి కాలం = 6 నెలలు = $\frac{6}{12}$సం॥ = $\frac{1}{2}$ సం॥ రేటు = 10% I = ` $\frac{12000 \times 10 \times \frac{1}{2}}{100}$ = `600 A = P + I = `12000 + `600 = `12600 ఇది తరువాత 6నెలలకు అసలు అవుతుంది. I = ` $\frac{12600 \times 10 \times \frac{1}{2}}{100}$ = `630 మూడవ కాలవ్యవధికి అసలు = `12600 + `630 = `13,230. I = ` $\frac{13230 \times 10 \times \frac{1}{2}}{100}$ = `661.50 A = P + I = `13230 + `661.50 = `13,891.50

TRY THESE

Find the amount to be paid

1. At the end of 2 years on ₹2,400 at 5% per annum compounded annually.
2. At the end of 1 year on ₹1,800 at 8% per annum compounded quarterly.

Example 14: Find CI paid when a sum of ₹10,000 is invested for 1 year and 3 months at $8\frac{1}{2}$% per annum compounded annually.

Solution: Mayuri first converted the time in years.

$$1 \text{ year } 3 \text{ months} = 1\frac{3}{12} \text{ year} = 1\frac{1}{4} \text{ years}$$

Mayuri tried putting the values in the known formula and came up with:

$$A = ₹10000 \left(1 + \frac{17}{200}\right)^{1\frac{1}{4}}$$

Now she was stuck. She asked her teacher how would she find a power which is fractional? The teacher then gave her a hint:

Find the amount for the whole part, i.e., 1 year in this case. Then use this as principal to get simple interest for $\frac{1}{4}$ year more. Thus,

$$A = ₹10000 \left(1 + \frac{17}{200}\right)$$

$$= ₹10000 \times \frac{217}{200} = ₹10,850$$

Now this would act as principal for the next $\frac{1}{4}$ year. We find the SI on ₹10,850 for $\frac{1}{4}$ year.

$$SI = ₹\frac{10850 \times \frac{1}{4} \times 17}{100 \times 2}$$

$$= ₹\frac{10850 \times 1 \times 17}{800} = ₹230.56$$

ప్రయత్నించండి

చెల్లించాల్సిన మొత్తం కనుగొనండి

1. సంవత్సరానికొకసారి వడ్డీ చెల్లించు పద్ధతిన `2400పై సంవత్సరమునకు 5% వడ్డీరేటుతో 2 సంవత్సరాల చివర చెల్లించాల్సిన మొత్తం ఎంత?
2. 3 నెలలకొకసారి వడ్డీ తిరుగకట్టెడి పద్ధతిన `1800 పై సంవత్సరమునకు 8% రేటుతో సంవత్సరం చివర చెల్లించవలసిన మొత్తమును కనుగొనుము.

ఉదాహరణ 14: `10,000 లను ఒక సంవత్సరం 3నెలల కాలానికి పెట్టుబడి పెట్టినపుడు $8\frac{1}{2}\%$ వడ్డీరేటుతో సం॥నికి ఒకసారి వడ్డీ లెక్కించు పద్ధతిన చెల్లించవలసిన చక్ర వడ్డీ కనుగొనుము.

సాధన: మయూరి మొదట కాలాన్ని సంవత్సరములలోకి మార్చింది.

$$1 \text{ సంవత్సరం } 3 \text{ నెలలు} = 1\frac{3}{12} \text{ సం॥} = 1\frac{1}{4} \text{ సం॥లు.}$$

తరువాత సూత్రంలో విలువలను ప్రతిక్షేపించి ఈవిధంగా తెలిపింది.

$$A = \grave{}10000\left(1+\frac{17}{200}\right)^{1\frac{1}{4}}$$

కానీ ఘాతాంకంలో భిన్నమున్నపుడు ఎలా చేయాలో అర్థంకాక ఉపాధ్యాయుడ్ని అడిగింది. ఉపాధ్యాయుడు, మొదట పూర్ణాంకములకు, అనగా ఈ లెక్కలో 1 సంవత్సరమునకు చక్ర వడ్డీ ప్రకారం మొత్తమును కొనగొని, ఈ మొత్తమునకు $\frac{1}{4}$ సంవత్సరమునకు అసలుగా తీసుకొని సామాన్య వడ్డీ ని లెక్కించమని సూచించారు. దానిప్రకారం,

$$A = \grave{}10000\left(1+\frac{17}{200}\right)$$

$$= \grave{}10000 \times \frac{217}{200} = \grave{}10,850$$

$\frac{1}{4}$ సంవత్సర కాలమునకు అసలు `10,850 అవుతుంది. సామాన్య వడ్డీ ప్రకారం $\frac{1}{4}$ సం. కాలానికి `10,850కు అయ్యే వడ్డీ

$$\text{సామాన్య వడ్డీ} = \grave{}\,\frac{10850 \times \frac{1}{4} \times 17}{100 \times 2}$$

$$= \grave{}\,\frac{10850 \times 1 \times 17}{800} = \grave{}230.56$$

Interest for first year = `10850 – `10000 = `850

And, interest for the next $\frac{1}{4}$ year = `230.56

Therefore, total compound Interest = 850 + 230.56 = `1080.56.

8.9 Applications of Compound Interest Formula

There are some situations where we could use the formula for calculation of amount in CI. Here are a few.

(i) Increase (or decrease) in population.

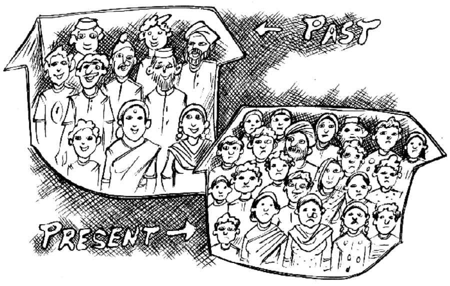
(ii) The growth of a bacteria if the rate of growth is known.

(iii) The value of an item, if its price increases or decreases in the intermediate years.

Example 15: The population of a city was 20,000 in the year 1997. It increased at the rate of 5% p.a. Find the population at the end of the year 2000.

Solution: There is 5% increase in population every year, so every new year has new population. Thus, we can say it is increasing in compounded form.

Population in the beginning of 1998 = 20000 (we treat this as the principal for the 1st year)



Increase at 5% = $\frac{5}{100} \times 20000 = 1000$

Population in 1999 = 20000 + 1000 = 21000

Treat as the Principal for the 2nd year.

Increase at 5% = $\frac{5}{100} \times 21000 = 1050$

Population in 2000 = 21000 + 1050

= 22050

Treat as the Principal for the 3rd year.

Increase at 5% = $\frac{5}{100} \times 22050$

= 1102.5

At the end of 2000 the population = 22050 + 1102.5 = 23152.5

or, Population at the end of 2000 = $20000\left(1+\frac{5}{100}\right)^3$

$= 20000 \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20}$

= 23152.5

So, the estimated population = 23153.

మొదటి సంవత్సరపు వడ్డీ = `10850 – `10000 = `850

తరువాతి $\frac{1}{4}$ సంవత్సర కాలానికి వడ్డీ = `230.56

కావున, మొత్తం చక్రవడ్డీ = 850 + 230.56 = `1080.56.

8.9 చక్రవడ్డీ సూత్రం యొక్క అనువర్తనములు

చక్ర వడ్డీ ప్రకారము మొత్తమును కనుగొను సూత్రమును ఉపయోగించు కొన్ని సందర్భాలు:

(i) జనాభా పెరుగుదల (లేదా తరుగుదల).

(ii) బాక్టీరియా పెరుగుదల రేటు తెలిసినచో వాటి పెరుగుదల.

(iii) కొన్ని సంవత్సరముల మధ్యలో ఒక వస్తువు విలువ పెరుగుతూ లేదా తగ్గుతూ ఉన్నప్పుడు ఆ వస్తువు విలువ.

ఉదాహరణ 15: 1997లో ఒక నగర జనాభా 20,000. ఆ నగర జనాభా పెరుగుదల రేటు సంవత్సరానికి 5% అయిన 2000 సంవత్సరం చివర జనాభాను కనుగొనండి.

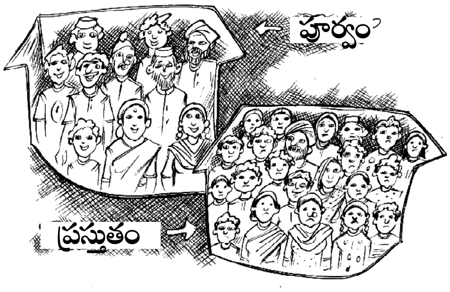
సాధన: ప్రతి సంవత్సరం జనాభాలో పెరుగుదల 5%. కనుక ప్రతి సంవత్సరం జనాభా కూడా మారుతూవుంటుంది. అందువలన అది చక్రవడ్డీ రూపంలో పెరుగుతుందని చెప్పవచ్చు.

1998 ప్రారంభంలో జనాభా = 20000 (దీనిని మనం మొదటి సంవత్సరం అసలు అనుకుందాం)

5% పెరుగుదల = $\frac{5}{100} \times 20000 = 1000$

1999 లో జనాభా = 20000 + 1000 = 21000

(దీనిని 2వ సం॥నకు అసలు అనుకుందాం)



5% పెరుగుదల = $\frac{5}{100} \times 21000 = 1050$

2000లో జనాభా = 21000 + 1050

= 22050

(దీనిని 3వ సం॥నకు అసలు అనుకుందాం)

5% పెరుగుదల = $\frac{5}{100} \times 22050$

= 1102.5

2000 సం॥ చివరికి జనాభా = 22050 + 1102.5 = 23152.5

లేదా, 2000 సం॥ చివరికి జనాభా = $20000\left(1+\frac{5}{100}\right)^3$

$= 20000 \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20}$

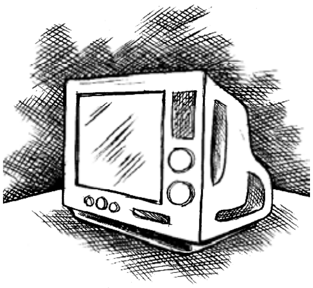
= 23152.5

కావున, అంచనా వేసిన జనాభా = 23153.

Aruna asked what is to be done if there is a decrease. The teacher then considered the following example.

Example 16: A TV was bought at a price of ₹21,000. After one year the value of the TV was depreciated by 5% (Depreciation means reduction of value due to use and age of the item). Find the value of the TV after one year.

Solution:



Principal = ₹21,000

Reduction = 5% of ₹21000 per year

$$= ₹\frac{21000 \times 5 \times 1}{100} = ₹1050$$

value at the end of 1 year = ₹21000 – ₹1050 = ₹19,950

Alternately, We may directly get this as follows:

$$\text{value at the end of 1 year} = ₹21000 \left(1 - \frac{5}{100}\right)$$

$$= ₹21000 \times \frac{19}{20} = ₹19,950$$

TRY THESE

1. A machinery worth ₹10,500 depreciated by 5%. Find its value after one year.
2. Find the population of a city after 2 years, which is at present 12 lakh, if the rate of increase is 4%.

EXERCISE 8.3

1. Calculate the amount and compound interest on

(a) ₹10,800 for 3 years at $12\frac{1}{2}$% per annum compounded annually.

(b) ₹18,000 for $2\frac{1}{2}$ years at 10% per annum compounded annually.

(c) ₹62,500 for $1\frac{1}{2}$ years at 8% per annum compounded half yearly.

(d) ₹8,000 for 1 year at 9% per annum compounded half yearly.

(You could use the year by year calculation using SI formula to verify).

(e) ₹10,000 for 1 year at 8% per annum compounded half yearly.

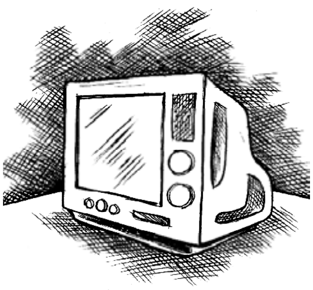
2. Kamala borrowed ₹26,400 from a Bank to buy a scooter at a rate of 15% p.a. compounded yearly. What amount will she pay at the end of 2 years and 4 months to clear the loan?

(**Hint:** Find A for 2 years with interest is compounded yearly and then find SI on the 2nd year amount for $\frac{4}{12}$ years).

తరుగుదల ఉంటే ఏమి చెయ్యాలి అని అరుణ అడిగింది. అప్పుడు ఉపాధ్యాయుడు క్రింది ఉదాహరణ ఇచ్చారు.

ఉదాహరణ 16: ఒక టెలివిజన్ `21000 లకు కొనబడింది. ఒక సంవత్సరం తరువాత దాని విలువలో తరగుదల 5%. (తరుగుదల అనగా వస్తువు వాడకం, కాలములను బట్టి దాని విలువ తగ్గడం). ఒక సంవత్సరం తరువాత టీ.వీ. విలువ కనుగొనండి.

సాధన:



అసలు = `21,000

తరుగుదల = ప్రతి సంవత్సరం `21,000 లో 5%

$$= ` \frac{21000 \times 5 \times 1}{100} = `1050$$

సంవత్సరం చివర టీ.వీ. వెల = `21000 – `1050 = `19,950

మనం వేరుగా **మరొక విధంగా** దీనిని పొందవచ్చు

సంవత్సరం చివర టీ.వీ. వెల $= `21000 \left(1 - \frac{5}{100}\right)$

$$= `21000 \times \frac{19}{20} = `19,950$$

ప్రయత్నించండి

1. `10,000 విలువ గల ఒక యంత్రం తరుగుదల రేటు 5% అయిన 1 సంవత్సరం తరువాత దాని విలువ కనుగొనుము.
2. ఒక పట్టణపు జనాభా 12 లక్షలు, ఒక సంవత్సరంకు 4% చొప్పున జనాభా పెరుగుతుంటే 2 సం॥ల తరువాత ఆ పట్టణ జనాభాను కనుగొనుము.

అభ్యాసం 8.3

1. క్రింది వాటిపై మొత్తం మరియు చక్రవడ్డీ లెక్కించండి.

(a) సంవత్సరానికి ఒకసారి వడ్డీ లెక్కగట్టు పద్ధతిన సంవత్సరానికి $12\frac{1}{2}$ % వడ్డీ రేటు చొప్పున `10,800పై 3 సంవత్సరాల కాలమునకు.

(b) సం॥నకు ఒకసారి వడ్డీ తిరుగకట్టు పద్ధతిన `18000పై $2\frac{1}{2}$ సం॥లకు, సం॥నికి 10% వడ్డీ రేటు చొప్పున.

(c) అర్ధ సంవత్సరానికి ఒకసారి వడ్డీ లెక్కకట్టు పద్ధతిన `62500పై $1\frac{1}{2}$ సంవత్సరాలకు, సంవత్సరానికి 8% వడ్డీ రేటు చొప్పున

(d) అర్ధ సంవత్సరానికి ఒకసారి వడ్డీ లెక్కకట్టు పద్ధతిన `8000పై 1 సంవత్సరానికి, సంవత్సరమునకు 9% వడ్డీ రేటు చొప్పున. (ప్రతి సంవత్సరం సామాన్య వడ్డీ సూత్రం ప్రకారం వడ్డీ కనుగొని సరి చూడవచ్చు).

(e) అర్ధ సంవత్సరానికి ఒకసారి వడ్డీ తిరుగకట్టు పద్ధతిన `10000పై 1 సంవత్సరానికి, సంవత్సరమునకు 8% వడ్డీ రేటు చొప్పున.

2. కమల స్కూటర్ కొనే నిమిత్తం బ్యాంకు నుండి `26400కు సంవత్సరమునకు 15% వడ్డీ రేటు చొప్పున సంవత్సరానికొకసారి వడ్డీ కట్టేటట్లు తెచ్చుకొనెను. 2 సంవత్సరాల 4 నెలల చివర అప్పు తీర్చవలెనన్న ఎంత మొత్తము చెల్లించవలెను? (**సూచన:** సంవత్సరమునకు ఒక్కసారి వడ్డీ తిరుగకట్టెడు పద్ధతిన 2 సంవత్సరాలకు మొత్తంను కనుగొని, 2వ సంవత్సరం చివర వచ్చిన మొత్తంపై $\frac{4}{12}$ సంవత్సరాలకు సామాన్య వడ్డీ కనుగొనుము).

3. Fabina borrows `12,500 at 12% per annum for 3 years at simple interest and Radha borrows the same amount for the same time period at 10% per annum, compounded annually. Who pays more interest and by how much?

4. I borrowed `12,000 from Jamshed at 6% per annum simple interest for 2 years. Had I borrowed this sum at 6% per annum compound interest, what extra amount would I have to pay?

5. Vasudevan invested `60,000 at an interest rate of 12% per annum compounded half yearly. What amount would he get

(i) after 6 months?

(ii) after 1 year?

6. Arif took a loan of `80,000 from a bank. If the rate of interest is 10% per annum, find the difference in amounts he would be paying after $1\frac{1}{2}$ years if the interest is

(i) compounded annually.

(ii) compounded half yearly.

7. Maria invested `8,000 in a business. She would be paid interest at 5% per annum compounded annually. Find

(i) The amount credited against her name at the end of the second year.

(ii) The interest for the 3rd year.

8. Find the amount and the compound interest on `10,000 for $1\frac{1}{2}$ years at 10% per annum, compounded half yearly. Would this interest be more than the interest he would get if it was compounded annually?

9. Find the amount which Ram will get on `4096, if he gave it for 18 months at $12\frac{1}{2}\%$ per annum, interest being compounded half yearly.

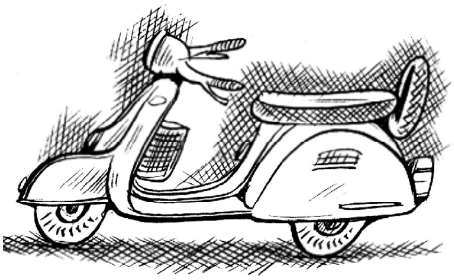
10. The population of a place increased to 54,000 in 2003 at a rate of 5% per annum

(i) find the population in 2001.

(ii) what would be its population in 2005?

11. In a Laboratory, the count of bacteria in a certain experiment was increasing at the rate of 2.5% per hour. Find the bacteria at the end of 2 hours if the count was initially 5, 06,000.

12. A scooter was bought at `42,000. Its value depreciated at the rate of 8% per annum. Find its value after one year.



3. ఫబీనా `12500ను 12% వడ్డీరేటు చొప్పున 3 సంవత్సరాల కాలానికి సాధారణ వడ్డీకి అప్పు తీసుకొనెను. రాధ అదే మొత్తాన్ని అంతేకాలానికి 10% వడ్డీరేటు చొప్పున సంవత్సరానికి ఒక్క సారి వడ్డీకట్టెడు పద్ధతిన అప్పుతీసుకొన్నది . ఆ ఇద్దరిలో ఎవరు ఎక్కువ వడ్డీని చెల్లిస్తారు?ఎంత ఎక్కువ?

4. నేను జంషెడ్ వద్ద `12000ను 6% వడ్డీ రేటు చొప్పున సాధారణ వడ్డీకి 2 సంవత్సరాల కాలానికి అప్పు తీసుకున్నాను.నేను అదే మొత్తమును 6% వడ్డీ రేటుకు సంవత్సరానికొకసారి వడ్డీ చెల్లించు పద్ధతిన చక్రవడ్డీకి అప్పు తీసుకొని ఉంటే ఎంత సొమ్ము అదనంగా చెల్లించవలసి వస్తుంది?

5. వాసుదేవన్ ఏడాదికి 12% వడ్డీ రేటుతో అర్ధసంవత్సరానికి వడ్డీ లెక్కించునట్లు `60,000 లను పెట్టుబడి పెట్టెను. అయితే క్రింది పెట్టుబడి కాలాలకు అతను ఎంత మొత్తమును పొందుతాడు?
   (i) 6 నెలలకు
   (ii) 1 సంవత్సరం

6. ఆరిఫ్ బ్యాంకు నుండి `80000 అప్పు తీసుకున్నాడు. సంవత్సరానికి వడ్డీ రేటు 10% అయితే $1\frac{1}{2}$ సంవత్సరాల తరువాత ఈ కింది రెండు పద్ధతులలో అతను చెల్లించు మొత్తాల మధ్య భేదాన్ని కనుగొనుము.
   (i) సంవత్సరానికి ఒకసారి వడ్డీ తిరుగకట్టెడి పద్ధతిన
   (ii) అర్ధ సంవత్సరమునకు వడ్డీ తిరుగకట్టెడు పద్ధతిన

7. మరియా ఒక వ్యాపారంలో పెట్టిన పెట్టుబడి `8000. సంవత్సరమునకు ఒకసారి వడ్డీ తిరుగకట్టెడు పద్ధతిన 5% వడ్డీరేటు ఉంటే
   (i) 2 సంవత్సరాల చివర ఆమె ఖాతాలో జమ అగుమొత్తము.
   (ii) 3వ సంవత్సరం వచ్చు వడ్డీలను కనుగొనుము.

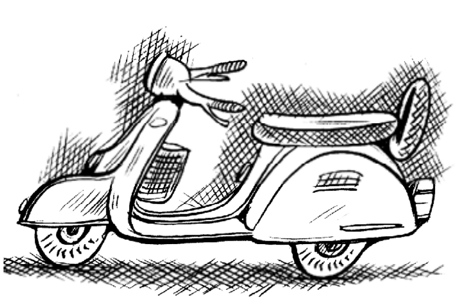
8. అర్ధ సంవత్సరానికొకసారి వడ్డీ తిరుగకట్టెడు పద్ధతిన `10000పై 10% వడ్డీ రేటుతో $1\frac{1}{2}$ సంవత్సరాలకు అగు మొత్తం, చక్రవడ్డీలను కనుగొనండి. ఈ వడ్డీ సంవత్సరానికి ఒకసారి తిరుగకట్టెడు పద్ధతిన వచ్చే వడ్డీ కంటే ఎక్కువగా ఉంటుందా?

9. రామ్ అర్ధసంవత్సరమునకు ఒకసారి వడ్డీ తిరుగగట్టెడు పద్ధతిన 18 నెలల కాలానికి `4096పై ఏడాదికి $12\frac{1}{2}\%$ వడ్డీ రేటుతో అప్పుగా ఇచ్చిన అతను పొందు మొత్తమెంత?

10. ఒక ప్రాంతంలో జనాభా 2003వ సం॥లో 54000, ప్రతి సంవత్సరం జనాభా పెరుగుదల రేటు 5% అయిన
   (i) 2001 లో జనాభా ఎంత ?
   (ii) 2005 లో జనాభా ఎంత ఉంటుంది ?

11. ఒక ప్రయోగశాలలో జరిపే ఒక నిర్దిష్ట ప్రయోగంలో బాక్టీరియా గంటకు 2.5% వృద్ధి చెందుతోందని గుర్తించారు. ప్రారంభ దశలో 5,06,000 ఉన్న బాక్టీరియా 2 గంటల తరువాత ఎంత ఉంటుంది?

12. ఒక స్కూటర్‌ను `42,000కు కొనిన సం॥నకు తరుగుదల రేటు 8% ఉంటే ఒక సంవత్సరం తరువాత దాని విలువ ఎంత?



WHAT HAVE WE DISCUSSED?

1. **Discount** is a reduction given on marked price.
   Discount = Marked Price – Sale Price.
2. Discount can be calculated when discount percentage is given.
   Discount = Discount % of Marked Price
3. Additional expenses made after buying an article are included in the cost price and are known as **overhead expenses**.
   CP = Buying price + Overhead expenses
4. Sales tax is charged on the sale of an item by the government and is added to the Bill Amount.
   Sales tax = Tax% of Bill Amount
5. GST stands for Goods and Services Tax and is levied on supply of goods or services or both.
6. Compound interest is the interest calculated on the previous year's amount (A = P + I)
7. (i) Amount when interest is compounded annually

   $$= P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n; \quad \text{P is principal, R is rate of interest, } n \text{ is time period}$$

   (ii) Amount when interest is compounded half yearly

   $$= P\left(1+\frac{R}{200}\right)^{2n} \quad \begin{cases} \frac{R}{2} \text{ is half yearly rate and} \\ 2n = \text{number of 'half-years'} \end{cases}$$

మనం ఏమి చర్చించుకున్నాం?

1. రుసుము అన్నది ప్రకటనవెలపై ఇచ్చే తగ్గింపు.
   రుసుము = ప్రకటన వెల – అమ్మకపు వెల
2. రుసుము శాతం ఇచ్చినప్పుడూ రుసుమును కనుగొనవచ్చు
   రుసుము = ప్రకటన వెలపై రుసుము శాతం
3. వస్తువును కొన్న తరువాత దానిపై చేయు అదనపు ఖర్చులు, కొన్నవెలకు (CP) కలుపబడుతాయి. వీటిని **అదనపుఖర్చులు** అని తెలిపెదము.
   కొన్న వెల (CP) = వస్తువు అసలు వెల + అదనపు ఖర్చులు
4. అమ్మకపు పన్ను ను వస్తువు అమ్మకం పై ప్రభుత్వం విధిస్తుంది. మరియు అది బిల్లు మొత్తానికి కలుపబడుతుంది.
   అమ్మకపు పన్ను = మొత్తం బిల్లుపై పన్ను శాతం
5. GST అనగా వస్తు మరియు సేవా పన్ను. ఇది వస్తువుల సరఫరా లేదా సేవ లేదా రెండింటిపై విధించబడుతుంది.
6. చక్ర వడ్డీ అనునది గత సంవత్సరం మొత్తంపై లెక్కించిన వడ్డీ (A = P + I)
7. (i) సంవత్సరమునకు ఒకసారి వడ్డీ లెక్కించిన అయ్యే మొత్తము

   $= P\left(1+\dfrac{R}{100}\right)^n$; P – అసలు, R – వడ్డీ రేటు, n – కాల వ్యవధి (కాలం)

   (ii) అర్ధసంవత్సరమునకు ఒకసారి వడ్డీ లెక్కించిన అయ్యే మొత్తము

   $= P\left(1+\dfrac{R}{200}\right)^{2n}$ $\begin{cases}\dfrac{R}{2} = \text{అర్ధ సంవత్సరపు వడ్డీ రేటు}\\ 2n = \text{అర్ధ సంవత్సరాల సంఖ్య}\end{cases}$

ANSWERS

EXERCISE 1.1

1. (i) 2 (ii) $\frac{-11}{28}$

2. (i) $\frac{-2}{8}$ (ii) $\frac{5}{9}$ (iii) $\frac{-6}{5}$ (iv) $\frac{2}{9}$ (v) $\frac{19}{6}$

4. (i) $\frac{-1}{13}$ (ii) $\frac{-19}{13}$ (iii) 5 (iv) $\frac{56}{15}$ (v) $\frac{5}{2}$ (vi) –1

5. (i) Multiplicative identity (ii) Commutativity

(iii) Multiplicative inverse

6. $\frac{-96}{91}$ **7.** Associativity **8.** No, because the product is not 1.

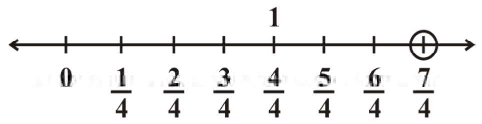
9. Yes, because $0.3 \times 3\frac{1}{3} = \frac{3}{10} \times \frac{10}{3} = 1$

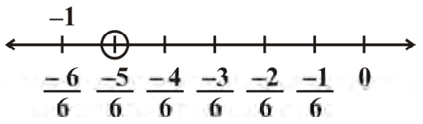
10. (i) 0 (ii) 1 and (–1) (iii) 0

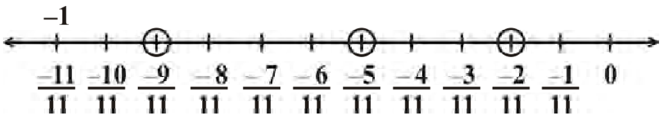
11. (i) No (ii) 1, –1 (iii) $\frac{-1}{5}$ (iv) x (v) Rational number

(vi) positive

EXERCISE 1.2

1. (i) 

(ii) 

2. 

3. Some of these are 1, $\frac{1}{2}$, 0, –1, $\frac{-1}{2}$

4. $\frac{-7}{20}, \frac{-6}{20}, \frac{-5}{20}, \frac{-4}{20}, \frac{-3}{20}, \frac{-2}{20}, \frac{-1}{20}, 0, \ldots, \frac{1}{20}, \frac{2}{20}$ (There can be many more such rational numbers)

5. (i) $\frac{41}{60}, \frac{42}{60}, \frac{43}{60}, \frac{44}{60}, \frac{45}{60}$ (ii) $\frac{-8}{6}, \frac{-7}{6}, 0, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}$ (iii) $\frac{9}{32}, \frac{10}{32}, \frac{11}{32}, \frac{12}{32}, \frac{13}{32}$

(There can be many more such rational numbers)

జవాబులు

అభ్యాసం 1.1

1. (i) 2 (ii) $\frac{-11}{28}$

2. (i) $\frac{-2}{8}$ (ii) $\frac{5}{9}$ (iii) $\frac{-6}{5}$ (iv) $\frac{2}{9}$ (v) $\frac{19}{6}$

4. (i) $\frac{-1}{13}$ (ii) $\frac{-19}{13}$ (iii) 5 (iv) $\frac{56}{15}$ (v) $\frac{5}{2}$ (vi) –1

5. (i) గుణకార తత్సమాంశం (ii) స్థిత్యంతరం
(iii) గుణకార విలోమం

6. $\frac{-96}{91}$ **7.** సహచరం **8.** కాదు, ఎందుకంటే లబ్ధం 1 కాదు.

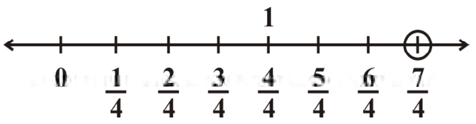
9. అవును, ఎందుకంటే $0.3 \times 3\frac{1}{3} = \frac{3}{10} \times \frac{10}{3} = 1$

10. (i) 0 (ii) 1 మరియు (–1) (iii) 0

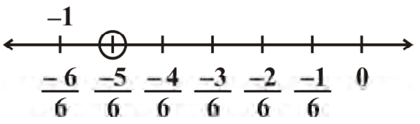
11. (i) లేదు (ii) 1, –1 (iii) $\frac{-1}{5}$ (iv) x (v) అకరణీయ సంఖ్య
(vi) ధనాత్మకం

అభ్యాసం 1.2

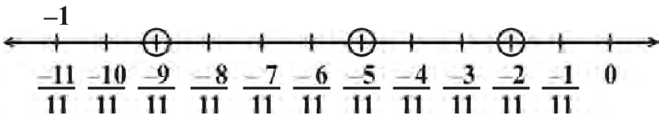
1. (i)



(ii)



2.



3. అందులో కొన్ని $1, \frac{1}{2}, 0, -1, \frac{-1}{2}$

4. $\frac{-7}{20}, \frac{-6}{20}, \frac{-5}{20}, \frac{-4}{20}, \frac{-3}{20}, \frac{-2}{20}, \frac{-1}{20}, 0, \ldots, \frac{1}{20}, \frac{2}{20}$ (ఇలాంటి అకరణీయ సంఖ్యలు చాలా ఉండవచ్చు)

5. (i) $\frac{41}{60}, \frac{42}{60}, \frac{43}{60}, \frac{44}{60}, \frac{45}{60}$ (ii) $\frac{-8}{6}, \frac{-7}{6}, 0, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}$ (iii) $\frac{9}{32}, \frac{10}{32}, \frac{11}{32}, \frac{12}{32}, \frac{13}{32}$
(ఇలాంటి అకరణీయ సంఖ్యలు చాలా ఉండవచ్చు)

6. $-\frac{3}{2}, -1, \frac{-1}{2}, 0, \frac{1}{2}$ (There can be many more such rational numbers)

7. $\frac{97}{160}, \frac{98}{160}, \frac{99}{160}, \frac{100}{160}, \frac{101}{160}, \frac{102}{160}, \frac{103}{160}, \frac{104}{160}, \frac{105}{160}, \frac{106}{160}$
(There can be many more such rational numbers)

EXERCISE 2.1

1. $x = 9$ **2.** $y = 7$ **3.** $z = 4$ **4.** $x = 2$ **5.** $x = 2$ **6.** $t = 50$

7. $x = 27$ **8.** $y = 2.4$ **9.** $x = \frac{25}{7}$ **10.** $y = \frac{3}{2}$ **11.** $p = -\frac{4}{3}$ **12.** $x = -\frac{8}{5}$

EXERCISE 2.2

1. $\frac{3}{4}$ **2.** length = 52 m, breadth = 25 m **3.** $1\frac{2}{5}$ cm **4.** 40 and 55

5. 45, 27 **6.** 16, 17, 18 **7.** 288, 296 and 304 **8.** 7, 8, 9

9. Rahul's age: 20 years; Haroon's age: 28 years **10.** 48 students

11. Baichung's age: 17 years; Baichung's father's age: 46 years;
Baichung's grandfather's age = 72 years **12.** 5 years **13** $-\frac{1}{2}$

14. ` 100 → 2000 notes; ` 50 → 3000 notes; ` 10 → 5000 notes

15. Number of ` 1 coins = 80; Number of ` 2 coins = 60; Number of ` 5 coins = 20

16. 19

EXERCISE 2.3

1. $x = 18$ **2.** $t = –1$ **3.** $x = –2$ **4.** $z = \frac{3}{2}$ **5.** $x = 5$ **6.** $x = 0$

7. $x = 40$ **8.** $x = 10$ **9.** $y = \frac{7}{3}$ **10.** $m = \frac{4}{5}$

EXERCISE 2.4

1. 4 **2.** 7, 35 **3.** 36 **4.** 26 (or 62)

5. Shobo's age: 5 years; Shobo's mother's age: 30 years

6. Length = 275 m; breadth = 100 m **7.** 200 m **8.** 72

9. Grand daughter's age: 6 years; Grandfather's age: 60 years

10. Aman's age: 60 years; Aman's son's age: 20 years

6. $-\frac{3}{2}, -1, \frac{-1}{2}, 0, \frac{1}{2}$ (ఇలాంటి అకరణీయ సంఖ్యలు చాలా ఉండవచ్చు)

7. $\frac{97}{160}, \frac{98}{160}, \frac{99}{160}, \frac{100}{160}, \frac{101}{160}, \frac{102}{160}, \frac{103}{160}, \frac{104}{160}, \frac{105}{160}, \frac{106}{160}$
(ఇలాంటి అకరణీయ సంఖ్యలు చాలా ఉండవచ్చు)

అభ్యాసం 2.1

1. $x = 9$ **2.** $y = 7$ **3.** $z = 4$ **4.** $x = 2$ **5.** $x = 2$ **6.** $t = 50$

7. $x = 27$ **8.** $y = 2.4$ **9.** $x = \frac{25}{7}$ **10.** $y = \frac{3}{2}$ **11.** $p = -\frac{4}{3}$ **12.** $x = -\frac{8}{5}$

అభ్యాసం 2.2

1. $\frac{3}{4}$ **2.** పొడవు = 52 మీ., వెడల్పు = 25 మీ. **3.** $1\frac{2}{5}$ సెం.మీ. **4.** 40 మరియు 55

5. 45, 27 **6.** 16, 17, 18 **7.** 288, 296 మరియు 304 **8.** 7, 8, 9

9. రాహుల్ వయస్సు: 20 సం॥లు; హరూన్ వయస్సు: 28 సం॥లు **10.** 48 విద్యార్థులు

11. బైచుంగ్ వయస్సు: 17 సం॥లు; బైచుంగ్ వాళ్ళ నాన్న వయస్సు: 46 సం॥లు;
బైచుంగ్ తాత వయస్సు = 72 సం॥లు **12.** 5 సం॥ **13** $-\frac{1}{2}$

14. ` 100 → 2000 నోట్లు; ` 50 → 3000 నోట్లు; ` 10 → 5000 నోట్లు

15. ` 1 నాణెముల సంఖ్య = 80; ` 2 నాణెముల సంఖ్య = 60; ` 5 నాణెముల సంఖ్య = 20

16. 19

అభ్యాసం 2.3

1. $x = 18$ **2.** $t = -1$ **3.** $x = -2$ **4.** $z = \frac{3}{2}$ **5.** $x = 5$ **6.** $x = 0$

7. $x = 40$ **8.** $x = 10$ **9.** $y = \frac{7}{3}$ **10.** $m = \frac{4}{5}$

అభ్యాసం 2.4

1. 4 **2.** 7, 35 **3.** 36 **4.** 26 (or 62)

5. షోబో వయస్సు: 5 సం॥లు; షోబో తల్లి వయస్సు : 30 సం॥లు

6. పొడవు = 275 మీ; వెడల్పు = 100 మీ. **7.** 200 మీ. **8.** 72

9. మనమరాలి వయస్సు: 6 సం॥లు; తాతగారి వయస్సు: 60 సం॥లు

10. అమన్ వయస్సు: 60 సం॥లు; అమన్ కుమారుని వయస్సు: 20 సం॥లు

EXERCISE 2.5

1. $x = \frac{27}{10}$ 2. $n = 36$ 3. $x = -5$ 4. $x = 8$ 5. $t = 2$

6. $m = \frac{7}{5}$ 7. $t = -2$ 8. $y = \frac{2}{3}$ 9. $z = 2$ 10. $f = 0.6$

EXERCISE 2.6

1. $x = \frac{3}{2}$ 2. $x = \frac{35}{33}$ 3. $z = 12$ 4. $y = -8$ 5. $y = -\frac{4}{5}$

6. Hari's age = 20 years; Harry's age = 28 years 7. $\frac{13}{21}$

EXERCISE 3.1

1. (a) 1, 2, 5, 6, 7 (b) 1, 2, 5, 6, 7 (c) 1, 2
   (d) 2 (e) 1
2. (a) 2 (b) 9 (c) 0 3. 360°; yes.
4. (a) 900° (b) 1080° (c) 1440° (d) $(n-2)180°$
5. A polygon with equal sides and equal angles.
   (i) Equilateral triangle (ii) Square (iii) Regular hexagon
6. (a) 60° (b) 140° (c) 140° (d) 108°
7. (a) $x + y + z = 360°$ (b) $x + y + z + w = 360°$

EXERCISE 3.2

1. (a) 360° – 250° = 110° (b) 360° – 310° = 50°
2. (i) $\frac{360°}{9} = 40°$ (ii) $\frac{360°}{15} = 24°$
3. $\frac{360}{24} = 15$ (sides) 4. Number of sides = 24
5. (i) No; (Since 22 is not a divisor of 360)
   (ii) No; (because each exterior angle is 180° – 22° = 158°, which is not a divisor of 360°).
6. (a) The equilateral triangle being a regular polygon of 3 sides has the least measure of an interior angle = 60°.
   (b) By (a), we can see that the greatest exterior angle is 120°.

EXERCISE 3.3

1. (i) BC(Opposite sides are equal) (ii) $\angle$DAB (Opposite angles are equal)

అభ్యాసం 2.5

1. $x = \frac{27}{10}$ **2.** $n = 36$ **3.** $x = -5$ **4.** $x = 8$ **5.** $t = 2$

6. $m = \frac{7}{5}$ **7.** $t = -2$ **8.** $y = \frac{2}{3}$ **9.** $z = 2$ **10.** $f = 0.6$

అభ్యాసం 2.6

1. $x = \frac{3}{2}$ **2.** $x = \frac{35}{33}$ **3.** $z = 12$ **4.** $y = -8$ **5.** $y = -\frac{4}{5}$

6. హరి వయస్సు = 20 సం॥లు; హ్యారీ వయస్సు = 28 సం॥ **7.** $\frac{13}{21}$

అభ్యాసం 3.1

1. (a) 1, 2, 5, 6, 7 (b) 1, 2, 5, 6, 7 (c) 1, 2
(d) 2 (e) 1

2. (a) 2 (b) 9 (c) 0 **3.** 360°; అవును.

4. (a) 900° (b) 1080° (c) 1440° (d) $(n-2)180°$

5. సమాన భుజాలు, సమాన కోణాలు కలిగిన ఒక బహుభుజి
(i) సమబాహు త్రిభుజం (ii) చతురస్రం (iii) క్రమ షడ్భుజి

6. (a) 60° (b) 140° (c) 140° (d) 108°

7. (a) $x + y + z = 360°$ (b) $x + y + z + w = 360°$

అభ్యాసం 3.2

1. (a) 360° – 250° = 110° (b) 360° – 310° = 50°

2. (i) $\frac{360°}{9} = 40°$ (ii) $\frac{360°}{15} = 24°$

3. $\frac{360}{24} = 15$ (భుజాలు) **4.** భుజాల సంఖ్య = 24

5. (i) కాదు; (ఎందుకంటే 22 అనేది 360 యొక్క విభాజకం కాదు)
(ii) కాదు; (ఎందుకంటే ప్రతి బాహ్యకోణం 180° – 22° = 158°, ఇది 360° యొక్క విభాజకం కాదు).

6. (a) సమ బాహు త్రిభుజము 3 భుజాలు కలిగిన క్రమ బహుభుజి అగుట వలన క్రమ బహుభుజి కనిష్ఠ అంతర కోణం 60°.
(b) (a) నుంచి, గరిష్ఠ బాహ్యకోణము 120° అని పరిశీలించవచ్చు.

అభ్యాసం 3.3

1. (i) BC(ఎదురెదురు భుజాలు సమానం) (ii) ∠ DAB (ఎదురెదురు కోణాలు సమానం)

(iii) OA (Diagonals bisect each other)

(iv) 180° (Interior opposite angles, since $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$)

2. (i) $x = 80°; y = 100°; z = 80°$ (ii) $x = 130°; y = 130°; z = 130°$

(iii) $x = 90°;\ y = 60°;\ z = 60°$ (iv) $x = 100°;\ y = 80°;\ z = 80°$

(v) $y = 112°; x = 28°; z = 28°$

3. (i) Can be, but need not be.

(ii) No; (in a parallelogram, opposite sides are equal; but here, AD ≠ BC).

(iii) No; (in a parallelogram, opposite angles are equal; but here, $\angle A \neq \angle C$).

4. A kite, for example **5.** 108°; 72°; **6.** Each is a right angle.

7. $x = 110°;\ y = 40°;\ z = 30°$

8. (i) $x = 6;\ y = 9$ (ii) $x = 3;\ y = 13;$ **9.** $x = 50°$

10. $\overline{NM} \parallel \overline{KL}$ (sum of interior opposite angles is 180°). So, KLMN is a trapezium.

11. 60° **12.** $\angle P = 50°; \angle S = 90°$

EXERCISE 3.4

1. (b), (c), (f), (g), (h) are true; others are false.

2. (a) Rhombus; square. (b) Square; rectangle

3. (i) A square is 4 – sided; so it is a quadrilateral.

(ii) A square has its opposite sides parallel; so it is a parallelogram.

(iii) A square is a parallelogram with all the 4 sides equal; so it is a rhombus.

(iv) A square is a parallelogram with each angle a right angle; so it is a rectangle.

4. (i) Parallelogram; rhombus; square; rectangle.

(ii) Rhombus; square (iii) Square; rectangle

5. Both of its diagonals lie in its interior.

6. $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$; $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$. So, in parallelogram ABCD, the mid-point of diagonal $\overline{AC}$ is O.

EXERCISE 5.1

1. (b), (d). In all these cases data can be divided into class intervals.

2.

Shopper	Tally marks	Number
W	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |||	28
M	𝍸 𝍸 𝍸	15
B	𝍸	5
G	𝍸 𝍸 ||	12

(iii) OA (కర్ణాలు పరస్పరం సమద్విఖండన చేసుకుంటాయి.)

(iv) 180° (తిర్యగ్రేఖకు ఒకవైపు గల అంతర కోణాల మొత్తం, ఎందుకనగా $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$)

2. (i) $x = 80°; y = 100°; z = 80°$ (ii) $x = 130°; y = 130°; z = 130°$

(iii) $x = 90°;\ y = 60°;\ z = 60°$ (iv) $x = 100°;\ y = 80°;\ z = 80°$

(v) $y = 112°; x = 28°; z = 28°$

3. (i) కావచ్చు, కానీ ఖచ్చితంగా కానవసరంలేదు.

(ii) కాదు; (ఒక సమాంతర చతుర్భుజంలో ఎదురెదురు భుజాలు సమానం; కానీ ఇచ్చట, $AD \neq BC$).

(iii) కాదు; (ఒక సమాంతర చతుర్భుజంలో ఎదురెదురు కోణాలు సమానం; కానీ ఇచ్చట, $\angle A \neq \angle C$).

4. ఉదాహరణకు, గాలిపటం **5.** 108°; 72°; **6.** ప్రతీది ఒక లంబకోణం

7. $x = 110°;\ y = 40°;\ z = 30°$

8. (i) $x = 6;\ y = 9$ (ii) $x = 3;\ y = 13;$ **9.** $x = 50°$

10. $\overline{NM} \parallel \overline{KL}$ (తిర్యగ్రేఖకు ఒకవైపు గల అంతర కోణాల మొత్తం 180°). అందువలన, KLMN ఒక ట్రెపీజియం

11. 60° **12.** $\angle P = 50°; \angle S = 90°$

అభ్యాసం 3.4

1. (b), (c), (f), (g), (h) లు, సత్యాలు, మిగిలినవి అసత్యం

2. (a) రాంబస్; చతురస్రం. (b) చతురస్రం; దీర్ఘచతురస్రం

3. (i) ఒక చతురస్రం 4 భుజాలను కలిగి ఉంటుంది. కావున అది ఒక చతుర్భుజం

(ii) ఒక చతురస్రంలో ఎదురెదురు భుజాలు సమాంతరం; కావున అది ఒక సమాంతర చతుర్భుజం.

(iii) ఒక చతురస్రం, 4 భుజాలు సమానంగా కలిగిన సమాంతర చతుర్భుజం; కావున అది ఒక రాంబస్

(iv) చతురస్రం, ప్రతీకోణం లంబకోణం కలిగిన సమాంతర చతుర్భుజం; కావున అది ఒక దీర్ఘచతురస్రం.

4. (i) సమాంతర చతుర్భుజం; రాంబస్ ; చతురస్రం; దీర్ఘచతురస్రం.

(ii) రాంబస్; చతురస్రం (iii) చతురస్రం; దీర్ఘచతురస్రం

5. రెండు కర్ణాలూ దాని అంతరంలోనే ఉంటాయి.

6. $\overline{AD} \parallel \overline{BC};\ \overline{AB} \parallel \overline{DC}$. కావున ABCD సమాంతర చతుర్భుజంలో కర్ణము $\overline{AC}$ యొక్క మధ్య బిందువు O.

అభ్యాసం 5.1

1. (b), (d). ఈ అన్ని సందర్భాలలో దత్తాంశాన్ని తరగతి అంతరాలుగా విభజించవచ్చు.

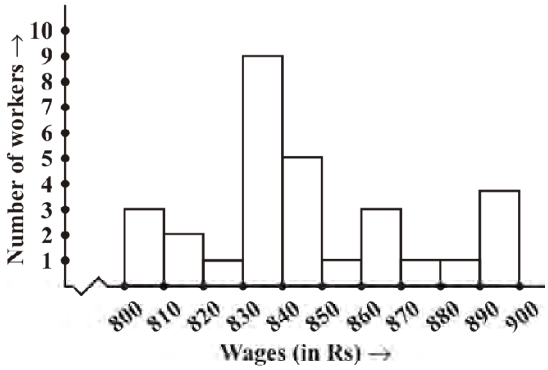
2.

దుకాణాదారు	గణన చిహ్నాలు	సంఖ్య
W	~~||||~~ ~~||||~~ ~~||||~~ ~~||||~~ ~~||||~~ |||	28
M	~~||||~~ ~~||||~~ ~~||||~~	15
B	~~||||~~	5
G	~~||||~~ ~~||||~~ ||	12

3.

Interval	Tally marks	Frequency
800 - 810	|||	3
810 - 820	||	2
820 - 830	|	1
830 - 840	~~||||~~ ||||	9
840 - 850	~~||||~~	5
850 - 860	|	1
860 - 870	|||	3
870 - 880	|	1
880 - 890	|	1
890 - 900	||||	4
	Total	**30**

4. (i) 830 - 840 (ii) 10
(iii) 20

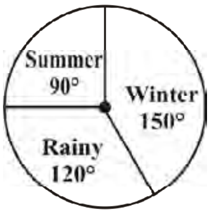


5. (i) 4 - 5 hours (ii) 34
(iii) 14

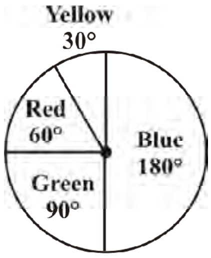
EXERCISE 5.2

1. (i) 200 (ii) Light music (iii) Classical - 100, Semi classical - 200, Light - 400, Folk - 300

2. (i) Winter (ii) Winter - 150°, Rainy - 120°, Summer - 90° (iii)



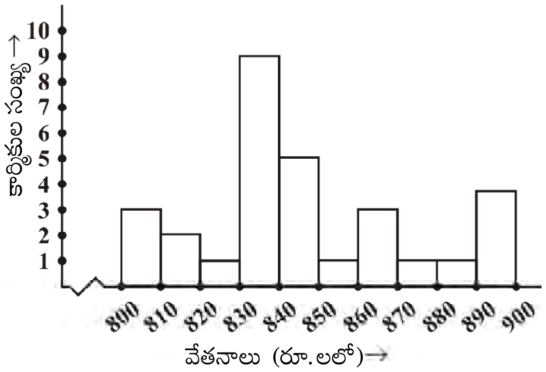
3.



3.

తరగతి అంతరం	గణన చిహ్నాలు	పౌన:పున్యం
800 - 810	|||	3
810 - 820	||	2
820 - 830	|	1
830 - 840	𝍸 ||||	9
840 - 850	𝍸	5
850 - 860	|	1
860 - 870	|||	3
870 - 880	|	1
880 - 890	|	1
890 - 900	||||	4
	మొత్తం	**30**

4. (i) 830 - 840 (ii) 10
(iii) 20

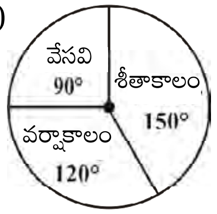


5. (i) 4 - 5 గంటలు (ii) 34
(iii) 14

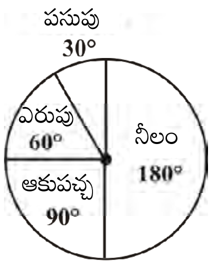
అభ్యాసం 5.2

1. (i) 200 (ii) లలిత సంగీతం
(iii) శాస్త్రీయ సంగీతం -100, అర్ధ శాస్త్రీయ సంగీతం - 200, లలిత సంగీతం- 400,జానపద సంగీతం - 300

2. (i) శీతాకాలం (ii) శీతాకాలం - 150°, వర్షాకాలం - 120°, వేసవికాలం - 90° (iii)

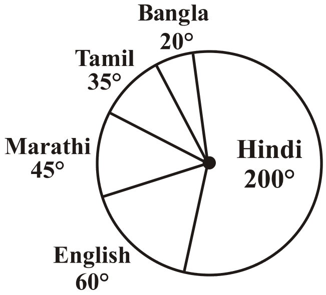


3.



4. (i) Hindi (ii) 30 marks (iii) Yes

5.



EXERCISE 5.3

1. (a) Outcomes → A, B, C, D

(b) HT, HH, TH, TT (Here HT means Head on first coin and Tail on the second coin and so on).

2. Outcomes of an event of getting

(i) (a) 2, 3, 5 (b) 1, 4, 6

(ii) (a) 6 (b) 1, 2, 3, 4, 5

3. (a) $\frac{1}{5}$ (b) $\frac{1}{13}$ (c) $\frac{4}{7}$

4. (i) $\frac{1}{10}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{2}{5}$ (iv) $\frac{9}{10}$

5. Probability of getting a green sector = $\frac{3}{5}$; probability of getting a non-blue sector = $\frac{4}{5}$

6. Probability of getting a prime number = $\frac{1}{2}$; probability of getting a number which is not prime = $\frac{1}{2}$

Probability of getting a number greater than 5 = $\frac{1}{6}$

Probability of getting a number not greater than 5 = $\frac{5}{6}$

EXERCISE 6.1

1. (i) 1 (ii) 4 (iii) 1 (iv) 9 (v) 6 (vi) 9

(vii) 4 (viii) 0 (ix) 6 (x) 5

2. These numbers end with

(i) 7 (ii) 3 (iii) 8 (iv) 2 (v) 0 (vi) 2

(vii) 0 (viii) 0

3. (i), (iii) **4.** 10000200001, 100000020000001

5. 1020304030201, 101010101^2 **6.** 20, 6, 42, 43

7. (i) 25 (ii) 100 (iii) 144

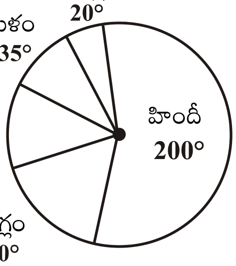
8. (i) 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13

(ii) 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21

9. (i) 24 (ii) 50 (iii) 198

4. (i) హిందీ (ii) 30 మార్కులు (iii) అవును

5.



అభ్యాసం 5.3

1. (a) పర్యవసానాలు → A, B, C, D

(b) HT, HH, TH, TT (ఇచట HT అనగా మొదటి నాణెంపై బొమ్మ, రెండవ నాణెం పై బొరుసు, ఇదే విధంగా మిగిలినవి.)

2. ఘటనకు సాధ్యమయ్యే పర్యవసానాలు

(i) (a) 2, 3, 5 (b) 1, 4, 6

(ii) (a) 6 (b) 1, 2, 3, 4, 5

3. (a) $\frac{1}{5}$ (b) $\frac{1}{13}$ (c) $\frac{4}{7}$

4. (i) $\frac{1}{10}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{2}{5}$ (iv) $\frac{9}{10}$

5. ఆకుపచ్చ సెక్టారుపై ఆగు సంభావ్యత = $\frac{3}{5}$; నీలం రంగు కాని సెక్టారుపై ఆగు సంభావ్యత = $\frac{4}{5}$

6. ప్రధాన సంఖ్య పొందు సంభావ్యత = $\frac{1}{2}$; ప్రధాన సంఖ్య కాని సంఖ్య పొందు సంభావ్యత = $\frac{1}{2}$

5 కంటే పెద్దదైన సంఖ్య పొందు సంభావ్యత = $\frac{1}{6}$

5 కంటే పెద్దది కాని సంఖ్య పొందు సంభావ్యత = $\frac{5}{6}$

అభ్యాసం 6.1

1. (i) 1 (ii) 4 (iii) 1 (iv) 9 (v) 6 (vi) 9

(vii) 4 (viii) 0 (ix) 6 (x) 5

2. ఈ సంఖ్యలు వీటితో అంతమగుట వలన

(i) 7 (ii) 3 (iii) 8 (iv) 2 (v) 0 (vi) 2

(vii) 0 (viii) 0

3. (i), (iii) **4.** 10000200001, 100000020000001

5. 1020304030201, 101010101^2 **6.** 20, 6, 42, 43

7. (i) 25 (ii) 100 (iii) 144

8. (i) 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13

(ii) 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21

9. (i) 24 (ii) 50 (iii) 198

EXERCISE 6.2

1. (i) 1024 (ii) 1225 (iii) 7396 (iv) 8649 (v) 5041 (vi) 2116
2. (i) 6,8,10 (ii) 14,48,50 (iii) 16,63,65 (iv) 18,80,82

EXERCISE 6.3

1. (i) 1, 9 (ii) 4, 6 (iii) 1, 9 (iv) 5
2. (i), (ii), (iii)
3. 10, 13
4. (i) 27 (ii) 20 (iii) 42 (iv) 64 (v) 88 (vi) 98 (vii) 77 (viii) 96 (ix) 23 (x) 90
5. (i) 7; 42 (ii) 5; 30 (iii) 7, 84 (iv) 3; 78 (v) 2; 54 (vi) 3; 48
6. (i) 7; 6 (ii) 13; 15 (iii) 11; 6 (vi) 5; 23 (v) 7; 20 (vi) 5; 18
7. 49
8. 45 rows; 45 plants in each row
9. 900
10. 3600

EXERCISE 6.4

1. (i) 48 (ii) 67 (iii) 59 (iv) 23 (v) 57 (vi) 37 (vii) 76 (viii) 89 (ix) 24 (x) 32 (xi) 56 (xii) 30
2. (i) 1 (ii) 2 (iii) 2 (iv) 3 (v) 3
3. (i) 1.6 (ii) 2.7 (iii) 7.2 (iv) 6.5 (v) 5.6
4. (i) 2; 20 (ii) 53; 44 (iii) 1; 57 (iv) 41; 28 (v) 31; 63
5. (i) 4; 23 (ii) 14; 42 (iii) 4; 16 (iv) 24; 43 (v) 149; 81
6. 21 m
7. (a) 10 cm (b) 12 cm
8. 24 plants
9. 16 children

EXERCISE 7.1

1. (ii) and (iv)
2. (i) 3 (ii) 2 (iii) 3 (iv) 5 (v) 10
3. (i) 3 (ii) 2 (iii) 5 (iv) 3 (v) 11
4. 20 cuboids

EXERCISE 7.2

1. (i) 4 (ii) 8 (iii) 22 (iv) 30 (v) 25 (vi) 24 (vii) 48 (viii) 36 (ix) 56
2. (i) False (ii) True (iii) False (iv) False (v) False (vi) False (vii) True
3. 11, 17, 23, 32

అభ్యాసం 6.2

1.	(i)	1024	(ii)	1225	(iii)	7396	(iv)	8649	(v)	5041	(vi)	2116
2.	(i)	6,8,10	(ii)	14,48,50	(iii)	16,63,65	(iv)	18,80,82				

అభ్యాసం 6.3

1. (i) 1, 9 (ii) 4, 6 (iii) 1, 9 (iv) 5

2. (i), (ii), (iii) **3.** 10, 13

4.	(i)	27	(ii)	20	(iii)	42	(iv)	64	(v)	88	(vi)	98
	(vii)	77	(viii)	96	(ix)	23	(x)	90				
5.	(i)	7; 42	(ii)	5; 30	(iii)	7, 84	(iv)	3; 78	(v)	2; 54	(vi)	3; 48
6.	(i)	7; 6	(ii)	13; 15	(iii)	11; 6	(vi)	5; 23	(v)	7; 20	(vi)	5; 18

7. 49 **8.** 45 వరుసలు; ప్రతి వరుసలో 45 మొక్కలు **9.** 900 **10.** 3600

అభ్యాసం 6.4

1.	(i)	48	(ii)	67	(iii)	59	(iv)	23	(v)	57	(vi)	37
	(vii)	76	(viii)	89	(ix)	24	(x)	32	(xi)	56	(xii)	30
2.	(i)	1	(ii)	2	(iii)	2	(iv)	3	(v)	3		
3.	(i)	1.6	(ii)	2.7	(iii)	7.2	(iv)	6.5	(v)	5.6		
4.	(i)	2; 20	(ii)	53; 44	(iii)	1; 57	(iv)	41; 28	(v)	31; 63		
5.	(i)	4; 23	(ii)	14; 42	(iii)	4; 16	(iv)	24; 43	(v)	149; 81		

6. 21 మీ. **7.** (a) 10 సెం.మీ. (b) 12 సెం.మీ.

8. 24 మొక్కలు **9.** 16 మంది పిల్లలు

అభ్యాసం 7.1

1. (ii) మరియు (iv)

2.	(i)	3	(ii)	2	(iii)	3	(iv)	5	(v)	10
3.	(i)	3	(ii)	2	(iii)	5	(iv)	3	(v)	11

4. 20 దీర్ఘ ఘనాలు

అభ్యాసం 7.2

1.	(i)	4	(ii)	8	(iii)	22	(iv)	30	(v)	25	(vi)	24
	(vii)	48	(viii)	36	(ix)	56						
2.	(i)	అసత్యం	(ii)	సత్యం	(iii)	అసత్యం	(iv)	అసత్యం	(v)	అసత్యం	(vi)	అసత్యం
	(vii)	సత్యం										

3. 11, 17, 23, 32

EXERCISE 8.1

1. (a) 1 : 2 (b) 1 : 2000 (c) 1 : 10

2. (a) 75% (b) $66\frac{2}{3}$% **3.** 28% students **4.** 25 matches **5.** ` 2400

6. 10%, cricket → 30 lakh; football → 15 lakh; other games → 5 lakh

EXERCISE 8.2

1. ` 1,40,000 **2.** 80% **3.** ` 34.80 **4.** ` 18,342.50

5. Gain of 2% **6.** ` 2,835 **7.** Loss of ` 1,269.84

8. ` 14,560 **9.** ` 2,000 **10.** ` 5,000 **11.** ` 1,050

EXERCISE 8.3

1. (a) Amount = ` 15,377.34; Compound interest = ` 4,577.34

(b) Amount = ` 22,869; Interest = ` 4869 (c) Amount = ` 70,304, Interest = ` 7,804

(d) Amount = ` 8,736.20, Interest = ` 736.20

(e) Amount = ` 10,816, Interest = ` 816

2. ` 36,659.70 **3.** Fabina pays ` 362.50 more **4.** ` 43.20

5. (ii) ` 63,600 (ii) ` 67,416 **6.** (ii) ` 92,400 (ii) ` 92,610

7. (i) ` 8,820 (ii) ` 441

8. Amount = ` 11,576.25, Interest = ` 1,576.25 Yes.

9. ` 4,913 **10.** (i) About 48,980 (ii) 59,535 **11.** 5,31,616 (approx)

12. ` 38,640

అభ్యాసం 8.1

1. (a) 1 : 2 (b) 1 : 2000 (c) 1 : 10

2. (a) 75% (b) $66\frac{2}{3}$% **3.** 28% విద్యార్థులు **4.** 25 మ్యాచ్‌లు **5.** ` 2400

6. 10%, క్రికెట్ → 30 లక్షలు; ఫుట్‌బాల్ → 15 లక్షలు; మిగిలిన ఆటలు → 5 లక్షలు

అభ్యాసం 8.2

1. ` 1,40,000 **2.** 80% **3.** ` 34.80 **4.** ` 18,342.50

5. లాభం 2% **6.** ` 2,835 **7.** నష్టం ` 1,269.84

8. ` 14,560 **9.** ` 2,000 **10.** ` 5,000 **11.** ` 1,050

అభ్యాసం 8.3

1. (a) మొత్తం = ` 15,377.34; చక్రవడ్డీ = ` 4,577.34
(b) మొత్తం = ` 22,869; వడ్డీ = ` 4869 (c) మొత్తం = ` 70,304, వడ్డీ = ` 7,804
(d) మొత్తం = ` 8,736.20, వడ్డీ = ` 736.20
(e) మొత్తం = ` 10,816, వడ్డీ = ` 816

2. ` 36,659.70 **3.** ఫెబీనా ` 362.50 ఎక్కువ చెల్లించినది **4.** ` 43.20

5. (ii) ` 63,600 (ii) ` 67,416 **6.** (ii) ` 92,400 (ii) ` 92,610

7. (i) ` 8,820 (ii) ` 441

8. మొత్తం = ` 11,576.25, వడ్డీ = ` 1,576.25 అవును.

9. ` 4,913 **10.** (i) సుమారుగా 48,980 (ii) 59,535 **11.** 5,31,616 (సుమారుగా)

12. ` 38,640

FUNDAMENTAL DUTIES

Fundamental duties: It shall be the duty of every citizen of India-

(a) to abide by the Constitution and respect its ideals and institutions, the National Flag and the National Anthem;

(b) to cherish and follow the noble ideals which inspired our national struggle for freedom;

(c) to uphold and protect the sovereignty, unity and integrity of India;

(d) to defend the country and render national service when called upon to do so;

(e) to promote harmony and the spirit of common brotherhood amongst all the people of India transcending religious, linguistic and regional or sectional diversities; to renounce practices derogatory to the dignity of women;

(f) to value and preserve the rich heritage of our composite culture;

(g) to protect and improve the natural environment including forests, lakes, rivers and wild life, and to have compassion for living creatures;

(h) to develop the scientific temper, humanism and the spirit of inquiry and reform;

(i) to safeguard public property and to abjure violence.

(j) to strive towards excellence in all spheres of individual and collective activity so that the nation constantly rises to higher levels of endeavour and achievement;

(k) who is a parent or guardian, to provide opportunities for education to his child or, as the case may be ward between the age of six and fourteen years;

Right of Children to Free and Compulsory Education (RTE) Act, 2009

The RTE Act provides for the right of children to free and Compulsory Education to every child in the age group of 6 – 14 years which came into force from 1st April 2010 in Andhra Pradesh.

Important provisions of RTE Act

- Ensure availability of schools within the reach of the children. • Improve School infrastructure facilities.
- Enroll children in the class appropriate to his / her age.
- Children have a right to receive special training in order to be at par with other children.
- Providing appropriate facilities for the education of children with special needs on par with other children.
- No child shall be liable to pay any kind of fee or charges or expenses which may prevent him or her from pursuing and completing the elementary education. No test for admitting the children in schools.
- No removal of name and repetition of the child in the same class.
- No child admitted in a school shall be held back in any class or expel from school till the completion of elementary education. • No child shall be subjected to physical punishment or mental harassment.
- Admission shall not be denied or delayed on the ground that the transfer and other certificates have not been provided on time. • Eligible candidates alone shall be appointed as teachers.
- The teaching learning process and evaluation procedures shall promote achievement of appropriate competencies.
- No board examinations shall be conducted to the children till the completion of elementary education.
- Children can continue in the schools even after 14 years until completion of elementary education.
- No discrimination and related practices towards children belonging to backward and marginalized communities.
- The curriculum and evaluation procedures must be in conformity with the values enshrined in the constitution and make the child free of fear and anxiety and help the child to express views freely.